

$\Lambda \neq 0$ 时高维类 Vaidya 时空的事件视界方程及其热效应*

黎 忠 恒

(甘肃省庆阳师范专科学校物理系, 西峰 745000)
(1993年12月20日收到; 1994年5月20日收到修改稿)

讨论了事件视界存在的条件, 发现黑洞质量与宇宙因子之间存在一种制约关系, 这种制约关系不但与时空维数有关, 而且与黑洞蒸发的快慢有关. 并给出了 Klein-Gordon 方程在黑洞视界附近的渐近解, 得到了 Hawking 辐射温度和热谱公式.

PACC: 0420; 9760L

1 引 言

由于物理学的发展, 人们逐渐认识到可能真实时空不是四维, 至少是方法上的需要, 越来越多的人把研究的问题转移到 1+3 维以外^[1], 引力理论也出现了象 1+1 维度规^[2]和 D 维类 Vaidya 度规^[3]这样许许多多的低维、高维时空基本场方程的解, 其中宇宙因子不为零的 D 维类 Vaidya 时空的线元为^[4]

$$ds^2 = -[1 - 2M(v)/r^{D-3} - 2\Lambda r^2/(D-1) \cdot (D-2)]dv^2 + 2dvdr + r^2 dQ_{D-2}^2, \quad (1)$$

式中

$$dQ_{D-2}^2 = d\theta_{D-3}^2 + \sin^2\theta_{D-3}d\theta_{D-4}^2 + \sin^2\theta_{D-3}\sin^2\theta_{D-4}d\theta_{D-5}^2 + \cdots + \sin^2\theta_{D-3}\sin^2\theta_{D-4}\cdots\sin^2\theta_1d\theta_0^2. \quad (2)$$

本文将研究(1)式所示时空存在事件视界的条件, 并从标量粒子出发, 讨论这种黑洞的量子热效应.

2 事件视界

通常人们用零曲面方程确定事件视界^[5-7], 这样得到的视界是局部视界, 由于没有采用整体技术容易对局部视界的真实性产生怀疑, 而文献 [8] 用两种不同的方法, 证明了 Hawking 辐射自局部视界产生, 从物理角度有力地支持了局部视界的真实性. 肯定了零曲面方程定义的事件视界包围的时空区就是黑洞区.

* 国家自然科学基金资助的课题.

延拓到 D 维时空的零曲面方程为

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1). \quad (3)$$

利用(1)和(2)式,方程(3)可化为

$$2 \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial r} + [1 - 2M/r^{D-3} - 2\Lambda r^2/(D-1)(D-2)](\partial f/\partial r)^2 \\ + r^2(\partial f/\partial \theta_{D-3})^2 + (r^2 \sin^2 \theta_{D-3})^{-1}(\partial f/\partial \theta_{D-4})^2 + \dots + (r^2 \sin^2 \theta_{D-3} \\ \dots \sin^2 \theta_1)^{-1}(\partial f/\partial \theta_0)^2 = 0. \quad (4)$$

考虑到视界面的超球对称性,有

$$r = r(v), \quad (5)$$

于是得到事件视界所满足的方程为

$$\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} r_H^{D-1} - (1 - 2\dot{r}_H) r_H^{D-3} + 2M = 0, \quad (6)$$

其中 r_H 代表事件视界. 显然若 $\Lambda = 0$, r_H 很容易解出. 由于 Λ 的存在, 使方程(6)没有一般解法, 但可以利用 Sturm 定理讨论它在区间 $(0, \infty)$ 存在解(事件视界)的条件.

计算表明, 不同时空维数下的 Sturm 序列分别为

$D = 4$

$$f_0 = \frac{\Lambda}{3} r_H^3 - (1 - 2\dot{r}_H) r_H + 2M,$$

$$f_1 = \Lambda r_H^3 - (1 - 2\dot{r}_H), \quad f_2 = \frac{2}{3} (1 - 2\dot{r}_H) r_H - 2M,$$

$$f_3 = -g\Lambda M^2/(1 - 2\dot{r}_H)^2 + (1 - 2\dot{r}_H); \quad (7)$$

$D = 5$

$$f_0 = \frac{\Lambda}{6} r_H^4 - (1 - 2\dot{r}_H) r_H^2 + 2M, \quad f_1 = \frac{2\Lambda}{3} r_H^3 - 2(1 - 2\dot{r}_H) r_H,$$

$$f_2 = \frac{1}{2} (1 - 2\dot{r}_H) r_H^2 - 2M, \quad f_3 = [2(1 - 2\dot{r}_H) - 8\Lambda M/3(1 - 2\dot{r}_H)] \dot{r}_H,$$

$$f_4 = 2M; \quad (8)$$

$D = 6$

$$f_0 = \frac{\Lambda}{10} r_H^5 - (1 - 2\dot{r}_H) r_H^3 + 2M, \quad f_1 = \frac{\Lambda}{2} r_H^4 - 3(1 - 2\dot{r}_H) r_H^2,$$

$$f_2 = \frac{2}{5} (1 - 2\dot{r}_H) r_H^3 - 2M, \quad f_3 = 3(1 - 2\dot{r}_H) \dot{r}_H^2 - \frac{5M\Lambda}{2(1 - 2\dot{r}_H)} r_H,$$

$$f_4 = -\frac{5M^2\Lambda^2}{18(1 - 2\dot{r}_H)^3} r_H + 2M,$$

$$f_5 = \frac{36(1 - 2\dot{r}_H)^3}{5M\Lambda^2} [5M\Lambda/2(1 - 2\dot{r}_H) - 108(1 - 2\dot{r}_H)^4/5M\Lambda^2]; \quad (9)$$

$D \geq 7$

(a) D 为偶数

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} r_H^{D-1} - (1-2\dot{r}_H) r_H^{D-3} + 2M, \\
f_1 &= \frac{2\Lambda}{D-2} r_H^{D-2} - (D-3)(1-2\dot{r}_H) r_H^{D-4}, \\
f_2 &= \frac{2}{D-1} (1-2\dot{r}_H) r_H^{D-3} - 2M, \\
f_3 &= (D-3)(1-2\dot{r}_H) r_H^{D-4} - \frac{2M\Lambda(D-1)}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)} r_H, \\
f_4 &= -\frac{4M\Lambda}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)(D-3)} r_H^2 + 2M, \\
f_5 &= \frac{2M\Lambda(D-1)}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)} r_H - (1-2\dot{r}_H)^{\frac{D-1}{2}-1} (D-2)^{\frac{D-1}{2}-1} (D-3)^{\frac{D-1}{2}-1} / 2^{\frac{D-1}{2}-1} \Lambda^{\frac{D-1}{2}-1}, \\
f_6 &= -2M + (1-2\dot{r}_H)^{D-1} (D-2)^{D-3} (D-3)^{D-3} / 2^{D-4} M \Lambda^{D-3} (D-1)^2; \quad (10)
\end{aligned}$$

(b) D 为奇数

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} r_H^{D-1} - (1-2\dot{r}_H) r_H^{D-3} + 2M, \\
f_1 &= \frac{2\Lambda}{D-2} r_H^{D-2} - (D-3)(1-2\dot{r}_H) r_H^{D-4}, \\
f_2 &= \frac{2}{D-1} (1-2\dot{r}_H) r_H^{D-3} - 2M, \\
f_3 &= (D-3)(1-2\dot{r}_H) r_H^{D-4} - \frac{2M\Lambda(D-1)}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)} r_H, \\
f_4 &= -\frac{4M\Lambda}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)(D-3)} r_H^2 + 2M, \\
f_5 &= \left[\frac{2M\Lambda(D-1)}{(1-2\dot{r}_H)(D-2)} - (1-2\dot{r}_H)^{\frac{D-1}{2}-1} (D-2)^{\frac{D-1}{2}-1} \right. \\
&\quad \left. \cdot (D-3)^{\frac{D-1}{2}-1} / 2^{\frac{D-1}{2}-1} \Lambda^{\frac{D-1}{2}-1} \right] r_H, \\
f_6 &= -2M. \quad (11)
\end{aligned}$$

根据 Sturm 在区间 $(0, \infty)$ 上的变号个数可确定是否存在事件视界。研究表明, 当 $V=0$ 时, 方程(1)将总是描述一个视界为 $r_H = (2M/(1-2\dot{r}_H))^{\frac{1}{D-3}}$ 的动态黑洞; 但当 $\Lambda \approx 0$ 时, 方程(1)描述黑洞将是有条件的, 即质量与宇宙因子之间必须存在一种制约关系, 这种制约关系, 不但与时空维数有关, 而且与黑洞蒸发的快慢有关。例如当 $1-2\dot{r}_H > 0$, $\Lambda > 0$ 时, 视界存在的充要条件分别为

$D=4$ 时,

$$3M\Lambda^{\frac{1}{2}}/(1-2\dot{r}_H)^{\frac{1}{2}} < 1; \quad (12)$$

$D=5$ 时

$$4M\Lambda/3(1-2\dot{r}_H)^2 < 1; \quad (13)$$

$D = 6$ 时

$$216(1 - 2\dot{r}_H)^2/25M^2\Lambda^3 > 1; \quad (14)$$

$D \geq 7$ 时

(a) D 为偶数

$$(1 - 2\dot{r}_H)^{D-1}(D-2)^{D-3}(D-3)^{D-3}/2^{D-3}M^2\Lambda^{D-3}(D-1)^2 > 1; \quad (15)$$

(b) D 为奇数

$$(1 - 2\dot{r}_H)^{\frac{D-1}{2}}(D-2)^{\frac{D-1}{2}-1}(D-3)^{\frac{D-1}{2}-1}/2^{\frac{D-1}{2}-1}\Lambda^{\frac{D-1}{2}-1}M(D-1) > 1. \quad (16)$$

当上述诸条件满足时,相应时空中将有两个事件视界。它们分别代表黑洞视界和宇宙视界。(12)式正是 Vaidya-Schwarzschild-de Sitter 黑洞视界满足的条件^[1]。有趣的是这个条件对 Λ 的取值作了限制。对于大黑洞的蒸发, $\dot{r}_H$ 很小, (12)式要求 Λ 也很小,这与当前的观测值是相符合的。

3 Klein-Gordon 方程

D 维时空中,描述质量为 μ 的标量场的 Klein-Gordon 方程为

$$(-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi / \partial x^\mu) - \mu^2 \phi = 0, \\ (\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1). \quad (17)$$

从(1)和(2)式得

$$\sqrt{-g} = r^{D-2} (\sin \theta_{D-3})^{D-3} (\sin \theta_{D-4})^{D-4} \dots \sin \theta_1. \quad (18)$$

用上式及(1)和(2)式,方程(17)可化为

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu \partial r} + \frac{D-2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \left[\frac{D-2}{r} - \frac{2M}{r^{D-2}} - \frac{2D\Lambda r}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ + \left[1 - \frac{2M}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \mu^2 \phi \\ + \frac{1}{r^2} \frac{1}{(\sin \theta_{D-3})^{D-3}} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-3}} \left[(\sin \theta_{D-3})^{D-3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_{D-3}} \right] + \dots \\ + (r^2 \sin^2 \theta_{D-3} \dots \sin^2 \theta_{D-(k-1)} (\sin \theta_{D-k})^{D-k})^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta_{D-k}} \\ \cdot \left[(\sin \theta_{D-k})^{D-k} \frac{\partial \phi}{\partial \theta_{D-k}} \right] + \dots + (r^2 \sin^2 \theta_{D-3} \sin^2 \theta_{D-4} \\ \dots \sin^2 \theta_1)^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta_1^2} = 0. \quad (19)$$

方程(19)显然可以分离变量,而且可令

$$\phi = r^{-(\frac{D-2}{2})} \rho(\nu, r) Y_{J_{D-3} \dots J_1 m}(\theta_{D-3}, \theta_{D-4}, \dots, \theta_0), \quad (20)$$

其中 $0 \leq |m| \leq J_1 \leq \dots \leq J_{D-3}$, $Y_{J_{D-3} \dots J_1 m}$ 为 $D-1$ 维空间的球谐函数, J_{D-3} 为 SO_{D-1} 的 Casimir 算子相应的量子数^[10]。

把(20)式代入方程(19)得到径向函数 ρ 满足的方程为

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial v \partial r} + \left[1 - \frac{2M}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \\
& + \left[\frac{2M(D-3)}{r^{D-2}} - \frac{4\Lambda r}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial \rho}{\partial r} \\
& - \left[\frac{(D-2)(D-4)}{4r^2} + \frac{(D-2)^2 M}{2r^{D-1}} - \frac{\Lambda D}{2(D-1)} \right. \\
& \left. + \mu^2 + \frac{J_{D-3}(J_{D-3} + D - 3)}{r^2} \right] \rho = 0.
\end{aligned} \quad (21)$$

在(21)式中引进新坐标

$$\tilde{r} = r - r_H(v), \quad \tilde{v} = v. \quad (22)$$

于是(21)式化为

$$\begin{aligned}
& \left[1 - 2\dot{r}_H - \frac{2M}{r^{D-3}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tilde{r}^2} + 2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \tilde{v} \partial \tilde{r}} \\
& + \left[\frac{2M(D-3)}{r^{D-2}} - \frac{4\Lambda r}{(D-1)(D-2)} \right] \frac{\partial \rho}{\partial \tilde{r}} \\
& - \left[\frac{(D-2)(D-4)}{4r^2} + \frac{(D-2)^2 M}{2r^{D-1}} - \frac{\Lambda D}{2(D-1)} \right. \\
& \left. + \mu^2 + \frac{J_{D-3}(J_{D-3} + D - 3)}{r^2} \right] \rho = 0.
\end{aligned} \quad (23)$$

用(23)式中算子 $\partial^2/\partial \tilde{r}^2$ 和 $\partial^2/\partial \tilde{v} \partial \tilde{r}$ 的系数定义 Tortoise 坐标变换的微分形式

$$\begin{aligned}
dr_* &= (1 - 2\dot{r}_H)/(1 - 2\dot{r}_H - 2M/r^{D-3} - 2\Lambda r^2/(D-1)(D-2))^{-1} d\tilde{r} + \eta d\tilde{v}, \\
v_* &= \tilde{v},
\end{aligned} \quad (24)$$

其中 η 为微分因子, 要求满足

$$\lim_{r \rightarrow r_H+0} \eta = \dot{r}_H. \quad (25)$$

利用(24)和(25)式可把(23)式在局部事件视界外附近化为

$$\partial^2 \rho / \partial r_*^2 + 2 \partial^2 \rho / \partial v_* \partial r_* + \Theta \partial \rho / \partial r_* = 0, \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned}
\Theta &= 2 \left\{ \frac{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} r^{D-1} - (1 - 2\dot{r}_H) r^{D-3} + 2M}{(1 - 2\dot{r}_H) r^{D-3}} \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{(1 - 2\dot{r}_H) r^{D-3}}{\frac{2\Lambda}{(D-1)(D-2)} r^{D-1} - (1 - 2\dot{r}_H) r^{D-3} + 2M} \right] \right\}_{r=r_H}.
\end{aligned} \quad (27)$$

不难证明 Θ 在局部事件视界 r_H 的邻域内是解析的.

在 Tortoise 坐标变换下, 将 Klein-Gordon 方程在视界附近化成波动方程(26), 它的两个线性独立解为

$$\begin{aligned}
\rho_{in} &= e^{-\frac{i}{2} \int \Theta dv_*} e^{-i\omega v_*} \\
\rho_{out} &= e^{-\frac{i}{2} \int \Theta dv_*} e^{-i\omega v_* + i2\omega r_*},
\end{aligned} \quad (28)$$

ρ_{in} 和 ρ_{out} 分别为视界外的入射波和出射波。积分(24)式,且当 $r \rightarrow r_H$ 时有

$$r_* \approx \frac{1}{2k(v)} \ln(r - r_H), \quad (29)$$

式中 k 只是 v 的函数,其值为

$$k(v) = \frac{(D-3)(1-2\dot{r}_H)/r_H - 2\Lambda r_H/(D-2)}{2(1-2\dot{r}_H)}. \quad (30)$$

从(29)式可以看出在视界上 ρ_{in} 是解析的,而 ρ_{out} 具有对数奇异性,按照 Damour 和 Ruffini^[11] 的方法,将其延拓到黑洞内得到

$$\rho_{out} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2} \int \Theta dr_*} e^{-i\omega r_* + i2\omega r_*} & (r > r_H); \\ e^{-\frac{1}{2} \int \Theta dr_*} e^{-i\omega r_* + i2\omega r_*} e^{\pi\omega/k} & (r < r_H). \end{cases} \quad (31)$$

由此得到出射波在视界上的散射概率

$$\left| \frac{\rho_{out}(r > r_H)}{\rho_{out}(r < r_H)} \right|^2 = e^{-2\pi\omega/k}. \quad (32)$$

基于 Sannan^[12] 的讨论,视界温度为

$$T = \frac{k}{2\pi k_B} = \frac{1}{2\pi k_B} \frac{(D-3)(1-2\dot{r}_H)/r_H - 2\Lambda r_H/(D-2)}{2(1-2\dot{r}_H)}, \quad (33)$$

其热辐射谱为

$$N_\omega = \left[\exp\left(\frac{\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (34)$$

其中 k_B 为玻耳兹曼常数。

当 $\Lambda = 0$ 时,由(33)和(6)式给出

$$T = \frac{1}{2\pi k_B} \left(\frac{D-3}{2} \right) \frac{1}{r_H} = \frac{D-3}{4\pi k_B} \left(\frac{1-2\dot{r}_H}{2M} \right)^{\frac{1}{D-3}}, \quad (35)$$

即回到 D 维类 Vaidya 情况^[13]。进一步在(35)式中令 $D = 4$, 有

$$T = \frac{1}{2\pi k_B} \left(\frac{1-2\dot{r}_H}{4M} \right), \quad (36)$$

便回到 Vaidya 的情况^[14]。在弱辐射近似下,(36)式可化成

$$T = \frac{1}{8\pi k_B} (1 - 4\dot{M}), \quad (37)$$

这个结果与采用能动张量的方法求出的渐近结果完全一致^[15]。

当 $D = 4$ 时

$$T = \frac{1}{2\pi k_B} \frac{(1-2\dot{r}_H) - \Lambda r_H^2}{2r_H(1-2\dot{r}_H)}, \quad (38)$$

这正是 Vaidya-Schwarzschild-de Sitter 黑洞的辐射温度^[9]。

至此,得到了宇宙因子不为零的高维类 Vaidya 时空存在局部事件视界的条件,并用我们自己建议的新方法,确定了这种时空的 Tortoise 坐标变换。讨论了黑洞的 Hawking 效应,其结果都能回到已知的特殊情况。

本工作得到北京师范大学物理系赵峰教授的指导,在此表示衷心感谢。

- [1] 如: S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.*, **69** (1992), 406; H.J. de Vega, M. Ramon Medrano and N. Sanchez, *Class. Quantum Grav.*, **10**(1993), 2007.
- [2] R. B. Mann, *Gen. Rel. Grav.*, **24**(1992), 433.
- [3] B. R. Iyer and C.V. Vishveshwara, *Pramana-J. Phys.*, **32**(1989), 749.
- [4] 李奎增, 物理学报, **41**(1992), 1389.
- [5] T. I. Gutsunayev, V. S. Manko, *Gen. Rel. Grav.*, **17**(1985), 1025.
- [6] T. I. Gutsunayev, V. S. Manko, *Class. Quantum Grav.*, **6**(1989), 137.
- [7] J. Castejon-Amenedo, V.S. Manko, *Class. Quantum Grav.*, **7**(1990), 779.
- [8] 孟晓东、赵峰, 北京师范大学学报(自然科学版), **28**(1993), 43.
- [9] 戴宪新、赵峰、刘辽, 中国科学(A 辑), **23**(1993), 69.
- [10] 钱裕昆、曾谨言, 中国科学(A 辑), **23**(1993), 65.
- [11] T. Damour and R. Ruffini, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 332.
- [12] S. Sannaan, *Gen. Rel. Grav.*, **20**(1988), 239.
- [13] Li Zhongheng and Zhao Zheng, *Chin. Phys. Lett.*, **11**(1994), 8.
- [14] Li Zhongheng and Zhao Zheng, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1993), 126.
- [15] R. Balbinot and A. Barletta, *Class. Quantum Grav.*, **6**(1989), 195.

THERMAL EFFECT AND EVENT HORIZON EQUATION IN HIGHER DIMENSIONAL VAIDYA SPACETIME WITH $\Lambda \neq 0$

LI ZHONG-HENG

(Department of Physics, Qingyang Teachers College of Gansu, Xifeng 745000)

(Received 20 December 1993; revised manuscript received 20 May 1994)

ABSTRACT

The condition for the existence of event horizons is discussed, which shows the restricting relation between the cosmological constant and the black hole mass. This relation not only depends on the black hole evaporation rate but also the space-time dimension. It gives the solution of the Klein-Gordon equation near the event horizon, from which one can get both the Hawking temperature and the formula of thermal spectrum.

PACC: 0420; 9760L