

自由衰减法测量线性内耗的准确公式

朱贤方 水嘉鹏

(中国科学院固体物理研究所, 合肥 230031)

(1994年6月14日收到)

推导出了自由衰减系统线性内耗准确计算公式, 并讨论了原有的自由衰减系统线性内耗近似计算公式应用范围. 文章最后用准确公式和近似公式分别对有关实验结果进行了计算, 并对计算结果进行了比较、分析与讨论.

PACC: 6240; 6170L; 0320

1 引 言

自由振动衰减(简称自由衰减)法是测量固体材料中内耗的主要方法, 因此得到人们广泛使用. 但是, 到目前为止, 还未发现该方法准确且实用的内耗计算公式. 人们一直是使用其近似公式来计算内耗值. 这些近似公式在计算像纯金属这样低阻尼材料的线性内耗时误差不大, 但在计算大线性内耗时会出现不可忽略的误差, 甚至对判断内耗机制会产生本质上的差异. 由于新材料如新型合金、高分子、非晶材料、纳米材料及其各种复合材料不断涌现, 而这些新材料在常态和相变过程中往往出现以往材料不易出现的大线性内耗, 传统的自由衰减法线性内耗计算公式已不再适用于计算其内耗值. 因此迫切需要给出准确且实用的线性内耗计算公式来测量这些材料中线性内耗值. 为此, 本文推导出一个准确且实用的自由衰减法内耗计算公式, 以满足新的需要.

2 自由衰减系统准确线性内耗公式

2.1 运动方程式及求解

考虑一个自由振动系统线性运动方程

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

式中第一项是惯性项, 第二项为阻尼项, 第三项是回复项, 并假定了质量 m 、阻尼系数 η 及弹性系数 k 均与位移 x 、速率 $\dot{x}$ 及加速度 $\ddot{x}$ 无关.

设方程(1)的解 x 具有 e^{-r} 形式, 则其特征方程为

$$mr^2 - \eta r + k = 0, \quad (2)$$

其解为

$$r_{1,2} = \frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4mk}}{2m}. \quad (3)$$

因此 x 的振动解条件为

$$\eta^2 - 4mk \leq 0,$$

或

$$\frac{k}{m} - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 \geq 0,$$

令

$$\omega = [(k/m) - (\eta/2m)^2]^{1/2}; \quad (4)$$

$$\delta = \pi\eta/\omega m, \quad (5)$$

则(3)式变为

$$r_{1,2} = \frac{\omega}{2\pi}\delta \pm i\omega, \quad (6)$$

于是方程(1)的解为

$$x = c_1 e^{-r_1 t} + c_2 e^{-r_2 t}. \quad (7)$$

根据初始条件 $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$, 可求得 c_1 和 c_2 , 得到

$$x = \frac{-r_2 x_0}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t} + \frac{r_1 x_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t}, \quad (8)$$

将(6)式结果代入(8)式并化简得

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\delta}{2\pi}\omega t\right) \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \psi). \quad (9)$$

其中 $\tan\psi = \frac{\delta}{(2\pi)}$, (9)式就是运动方程(1)式的准确解.

2.2 对数减缩量

由(9)式可以得到振动解的振幅为

$$A(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\delta}{2\pi}\omega t\right) \left[1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

这个振幅为时间函数. 下面求相邻两次振动的振幅比. 设第一次测量振幅的时间是 t_n , 那么经过一个周期再测量振幅的时间为 $t_n + T$, 其中 T 为振动周期或 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 由(10)式可求得两次相邻振动振幅比为

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A(t_n)}{A(t_n + T)} = e^{\delta},$$

即

$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right). \quad (11)$$

这个结果可以推广到任意个周期, 设第一次测量振幅的时间是 t_n , 经过 m 个周期再测量振动的振幅, 这时的时间是 $t_n + mT$, 或 $t_n + m\frac{2\pi}{\omega}$, 同样可求得两次测量的振幅比

$$\frac{A_n}{A_{n+m}} = \frac{A(t_n)}{A(t_n + mT)} = e^{m\delta},$$

即

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \left(\frac{A_n}{A_{n+m}} \right). \quad (12)$$

(11)和(12)式即是自由衰减系统振幅的对数减缩量表达式.

2.3 自由衰减系统内耗表达式

根据内耗的基本定义

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad (13)$$

式中 ΔW 是振动一周消耗的能量, W 是循环开始时系统总能量. (13)式可理解为循环单位弧度消耗能量与总能量之比.

系统的总能量由动能 $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ 和势能 $\frac{1}{2} k x^2$ 两部分组成, 于是

$$W = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2,$$

考虑(1)式知

$$dW = -\eta \dot{x}^2 dt,$$

从 $t=0$ 到 $t=T$ 的一个周期内消耗的能量 ΔW 为

$$\Delta W = \int_0^T |dW| = \int_0^T \eta \dot{x}^2 dt, \quad (14)$$

由(9)式可得

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\delta}{2\pi} \omega t} \omega \sin \omega t / \cos \psi$$

代入(14)式, 积分得

$$\Delta W = \eta x_0^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right) \frac{\omega \pi}{2\delta} (1 - e^{-2\delta}). \quad (15)$$

在环循开始时, 系统总能量为

$$W = \frac{1}{2} k x_0^2. \quad (16)$$

将(15)和(16)式代入(13)式得到

$$Q^{-1} = \frac{\omega \eta}{k} \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{2\delta} (1 - e^{-2\delta}),$$

由(4)和(5)式知: $\frac{\omega \eta}{k} \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{2\pi}$, 代入上式得

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-2\delta}). \quad (17)$$

这就是自由衰减系统线性内耗准确计算公式, 将(11)式和(12)式分别代入(17)式, 还可以得到 Q^{-1} 的另外两种表达形式

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_n^2 - A_{n+1}^2}{A_n^2}, \quad (18)$$

和

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{A_n^{2/m} - A_{n+m}^{2/m}}{A_n^{2/m}}. \quad (19)$$

因为在相邻两次振动的振幅处即 A_n 和 A_{n+1} 处, 系统总能量等于势能, 与振幅平方成正比, 所以(18)式可以理解为

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (\Delta W = W_n - W_{n+1}, W = W_n).$$

这与内耗基本定义(13)式一致, 说明了(17)式的准确性. (18)式虽可以由内耗基本定义, 在不需求解方程(1)条件下直接推导出, 但是因相邻两次振动振幅较难测准, 所以尽管人们以前知道公式(18), 仍无法普及使用它. 由本文推导出的(19)式中, 用了相隔 m 次两次振动的振幅, 避免了测量相邻两次振动振幅的不便, 但因指数函数 $A^{2/m}$ 不便计算, 使用起来也不方便, 因此公式(18)和(19)只有通过计算机采集数据技术和编程计算方能得到使用. 可见(17)式既准确, 计算又简便、实用, 我们可以通过(12)式求得对数减缩量, 再代入(17)式就能方便地求出准确线性内耗值.

另外, 还应从(17)式看到, 如果无阻尼时, $\delta = 0$ 或 $A_{n+1} = A_n$, $Q^{-1} = 0$; 如果阻尼非常大, $\delta \rightarrow \infty$ 或 $A_{n+1}/A_n = 0$, $Q^{-1} = 1/(2\pi)$. 所以, 自由衰减法可测的线性内耗范围, 理论上应是 0 到 $1/(2\pi)$ 之间.

3 近似公式及其应用范围

当 $\delta \ll 1$, 公式(17)中 $e^{-2\delta}$ 函数可以展开并近似到 δ 项, 并得到近似公式

$$\begin{aligned} Q_A^{-1} &= \delta/\pi \\ &= \ln(A_n/A_{n+1})/\pi \\ &= \ln(A_n/A_{n+m})/(m\pi). \end{aligned} \quad (20)$$

这就是人们目前使用的线性内耗近似计算公式^[1]. 如图 1 所示, 使用公式(20)的相对误差 $\Delta = (Q_A^{-1} - Q^{-1})/Q^{-1}$ 随近似内耗值 Q_A^{-1} 增加而几乎成线性迅速增大. 如当 $Q_A^{-1} = 5 \times 10^{-3}$ 时, 使用公式(20)误差已达 1%. 因此, 公式(20)仅适于计算小于 5×10^{-3} 的线性内耗.

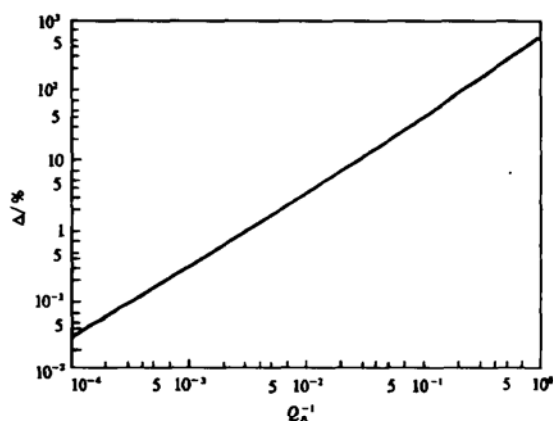


图 1

4 实验结果分析

图 2 是用正扭摆测得的非晶 PdSi 合金升温过程中线性(与振幅无关)内耗曲线. 实线

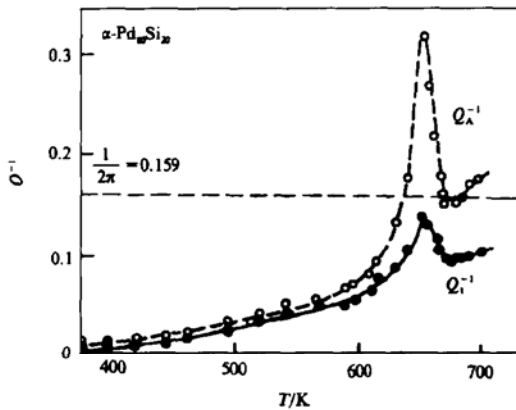


图 2

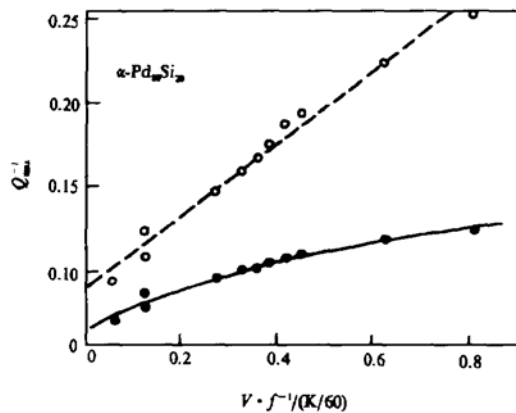


图 3

是用公式 (17) 算出的内耗曲线, 很显然, 整体内耗曲线不超出 $1/(2\pi)$ 范围. 但是, 用 (20) 式算出的内耗曲线 (虚线), 因为存在误差, 在非晶转变内耗峰峰温及其附近内耗超出了 $1/(2\pi)$, 明显与内耗基本定义 (13) 式相矛盾.

图 3 给出了图 2 中内耗峰值 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 关系, T 代表升温速率, f 是内耗峰处对应的样品振动频率. 同样, 实线代表用 (17) 式算得的 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 之间的非线性关系, 而虚线是用 (20) 式算得的结果, 表明 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 之间呈线性关系. 可见, 同样的实验结果, 由于使用了两种公式来计算, 得出的 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 之间明显不同的关系, 导致了对非晶转变内耗机制完全不同判断. 很明显, $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 之间虚线表示的线性关系是不正确的, 它们之间真正依赖关系应是实线所示的非线性依赖关系.

文献 [2] 报道用强迫振动扭摆测量证实 Mn-Cu 铸造合金中马氏体相变线性内耗峰峰值 (最

大可达 3×10^{-2}) $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f , T 及 $1/f$ 之间均为非线性依赖关系, 而同样样品用自由衰减法测量并用近似公式 (20) 计算的以上关系为线性的或近似为线性的. 因为强迫振动法计算内耗公式是 $Q^{-1} = \tan(\phi)$ (ϕ 为应力与应变之间相位差), 避免了自由衰减法近似计算公式的误差, 因此, 该相变内耗峰峰值 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 等之间存在是非线性关系而不是线性关系. 线性关系出现是由于使用了近似计算公式的误差引起的结果. 为了进一步确定以前文献报道的相变内耗机制, 凡用自由衰减法近似公式计算的相变内耗峰峰值 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T , $1/f$ 及 T/f 之间关系都应用准确公式 (17) 来重新计算或改用强迫振动法测量进行验

证. 因为转变内耗峰峰值 $Q_{\max}^{-1}$ 与 T/f 之间是否存在线性关系在判断某些合金(像 Mn-Cu, NiTi, Cu-Zn-Al 等)马氏体相变, 非晶合金晶化转变甚至高分子、纳米材料及新型复合材料某些转变的内耗机制至关重要.

附录 自由衰减系统共振频率

由(4)和(5)式可得到

$$k/m = \omega^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right).$$

设无阻尼($\delta=0$)时系统共振频率 $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$, 由上式知

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2},$$

即无阻尼时共振频率总大于有阻尼时共振频率 ω , 且当阻尼增加, ω 下降, 这与实验事实一致.

对同样系统的近似运动方程, Nowick 和 Berry^[1], 近似解结果为

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\delta^2}{4\pi^2},$$

即无阻尼($\delta=0$)共振频率 ω_0 总小于有阻尼时共振频率 ω , 当阻尼增加, ω 变大, 这与实验事实相矛盾. 因此, 近似解或近似公式同样不能正确反映共振频率变化规律.

[1] Nowick, A. S., Berry, B. S., *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids* (Academic Press, New York, 1972), p. 21.

[2] 谢存毅、文亦汀、宋贤方, 金属学报, 24(1988), A71.

ACCURATE LINEAR DAMPING CALCULATION FORMULA FOR FREE VIBRATION SYSTEM

ZHU XIAN-FANG SHUI JIA-PENG

(*Institute of Solid State Physics, Academia Sinica, Hefei 230031*)

(Received 14 June 1994)

ABSTRACT

An accurate linear damping calculation formula for free vibration system has been deduced and the application limits of the corresponding approximate calculation formula has been discussed as well. Finally, the related experimental results have been calculated respectively by the newly-deduced formula and the present approximate one, and the two kinds of calculated results have been compared, analysed, and discussed.

PACC: 6240; 6170L; 0320