

广义相对论“星系长城”

陶必修

(贵州民族学院物理系, 贵阳 550025)

陶必友

(成都77信箱职工大学, 成都 610066)

(1995年2月24日收到; 1995年10月30日收到修改稿)

在度规系数为可分离和能量动量张量为 $T_t^t = T_x^x = T_y^y = -\sigma(t, z)$ 形式的假设下, 得到 Einstein 场方程的三个新解, 并研究了它们的对称性、奇异性等整体特性.

PACC: 0420; 9850

1 引 言

广义相对论 Einstein 场方程的平面对称解是一种普通的对称解, 但是自 1989 年 Geller 和 Huchra 发现宇宙中最大结构“星系长城”以来^[1-3], 还没有适合于“星系长城”形式的平面对称解.

1976 年 Kibble 提出宇宙弦的概念以来^[4], 很多科学家意识到宇宙弦的存在能揭示星系及宇宙中其它巨大结构形成的奥秘^[5-7].

按照大统一理论, 产生于宇宙相变时期的众多宇宙弦(cosmic strings)在宇宙中构成具有混沌自相似性的弦网络, 网络上的结就是单极子(monopoles), 网面就是畴壁(domain walls). 在宇宙演化过程中, 宇宙弦凭借其非凡引力将宇宙物质聚集成星系等巨大结构^[8,9].

标准的无限长直弦模型用形如 $T_t^t = T_x^x = -\sigma(r, t)$ 的能动张量描述, 柱对称度规, 并用广义相对论进行分析^[10,11].

我们采用相似的简化方案, “星系长城”模型用能动张量描述 $T_t^t = T_x^x = T_y^y = -\sigma(t, z)$, 所有其它分量为零. 这里能量密度 σ 仅为时间 t 和距离 z 的函数, 采用直角坐标系, xy 平面为对称平面.

2 场方程

考虑对 xy 平面对称、无限大的星系长城, 采用一般的平面对称度规^[12]

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dz^2 + Y^2(dx^2 + dy^2), \quad (1)$$

式中 ν, λ 和 Y 为 z 和 t 的函数. 我们采用记法: $(t, z, x, y) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. 假定能量动量张量为 $T_0^0 = T_2^2 = T_3^3 = -\sigma(t, z)$, Einstein 场方程($G_\beta^\alpha = 8\pi T_\beta^\alpha$)为

$$\dot{Y}' - \nu' \dot{Y} - \dot{\lambda} Y' = 0, \quad (2)$$

$$\left(-\frac{\dot{Y}^2}{Y^2} - 2\frac{\dot{Y}\dot{\lambda}}{Y}\right)e^{-2\nu} + \left(2\frac{Y''}{Y} - 2\frac{Y'\lambda'}{Y} + \frac{Y'^2}{Y^2}\right)e^{-2\lambda} = -8\pi\sigma, \quad (3)$$

$$\left(-2\frac{\ddot{Y}}{Y} + 2\frac{\dot{Y}\nu}{Y} - \frac{\dot{Y}^2}{Y^2}\right)e^{-2\nu} + \left(2\frac{Y'\nu'}{Y} + \frac{Y'^2}{Y^2}\right)e^{-2\lambda} = 0, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\dot{Y}\nu}{Y} - \frac{\ddot{Y}}{Y} - \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \nu\dot{\lambda} - \frac{\dot{Y}\dot{\lambda}}{Y}\right)e^{-2\nu} + \left(-\frac{Y'\lambda'}{Y} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Y'\nu'}{Y} + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \nu''\right)e^{-2\lambda} = -8\pi\sigma, \quad (5)$$

式中函数上面一点表示 $\partial/\partial t$, 一撇表示 $\partial/\partial z$.

由方程(3)和(4), 得

$$\left(-2\frac{\ddot{Y}}{Y} + 2\frac{\dot{Y}\nu}{Y} + 2\frac{\dot{Y}\dot{\lambda}}{Y}\right)e^{-2\nu} + \left(2\frac{Y'\nu'}{Y} - 2\frac{Y''}{Y} + 2\frac{Y'\lambda'}{Y}\right)e^{-2\lambda} = 8\pi\sigma. \quad (6)$$

由方程(3)和(5), 得

$$\left(\frac{\dot{Y}\nu}{Y} - \frac{\ddot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Y}\dot{\lambda}}{Y} + \frac{\dot{Y}^2}{Y^2} - \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \nu\dot{\lambda}\right)e^{-2\nu} + \left(\frac{Y'\lambda'}{Y} - \frac{Y''}{Y} + \frac{Y'\nu'}{Y} - \frac{Y'^2}{Y^2} + \nu'^2 + \nu'' - \nu'\lambda'\right)e^{-2\lambda} = 0. \quad (7)$$

用(6)和(7)式代替(3)和(5)式求解.

守恒方程 $T_{\beta;\alpha} = 0$ 给出如下两个关系:

$$\dot{\sigma} + \sigma\dot{\lambda} = 0 \quad (8)$$

和

$$\sigma(\nu' + 2\frac{Y'}{Y}) = 0. \quad (9)$$

从(9)式看到, 为了使能量密度 σ 不为零, $(\nu' + 2\frac{Y'}{Y})$ 必为零, 故有

$$Y^2 = f_1(t)e^{-\nu}. \quad (10)$$

$$\text{积分(8)式, 得} \quad \sigma = f_2(z)e^{-\lambda}, \quad (11)$$

式中 $f_1(t)$ 为 t 的任意函数, $f_2(z)$ 为 z 的任意函数.

假设度规系数为其自变量的可分离函数, 即 $\lambda = \lambda_1(t) + \lambda_2(z)$, $\nu = \nu_1(t) + \nu_2(z)$, $Y = Y_1(t) \cdot Y_2(z)$, 由(11)式知, σ 也将是可分离函数.

如果 $\dot{Y}_1 \cdot Y_2' \neq 0$, (2)式可写成

$$1 - \frac{Y_2\nu_2'}{Y_2'} = \frac{Y_1\dot{\lambda}_1}{\dot{Y}_1} = \alpha, \quad (12)$$

式中 α 为一常数, 由此有

$$Y_1 = C_1 e^{\frac{\lambda_1}{\alpha}} \quad (13)$$

$$\text{和} \quad Y_2 = C_2 e^{\frac{\nu_2}{1-\alpha}}. \quad (14)$$

由此开始, 令 C_n 代表一积分常数, (4)式变为

$$\left(2 \frac{Y_2' \nu_2'}{Y_2} + \frac{Y_2'^2}{Y_2^2}\right) e^{2(\nu_2 - \lambda_2)} = \left(2 \frac{\ddot{Y}_1}{Y_1} - 2 \frac{\dot{Y}_1 \dot{\nu}_1}{Y_1} + \frac{\dot{Y}_1^2}{Y_1^2}\right) e^{2(\lambda_1 - \nu_1)} = \beta, \quad (15)$$

式中 β 为一常数. 把(13)和(14)式代入(15)式, 有

$$\left[\frac{3-2\alpha}{(1-\alpha)^2} \nu_2'^2\right] e^{2(\nu_2 - \lambda_2)} = \beta \quad (16)$$

$$\text{和} \quad \left[3\left(\frac{\dot{\lambda}_1}{\alpha}\right)^2 + 2 \frac{\ddot{\lambda}_1}{\alpha} - 2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\alpha} \dot{\nu}_1\right] e^{2(\lambda_1 - \nu_1)} = \beta. \quad (17)$$

同样, 由(7)和(6)式得

$$\left[\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1 - \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right) \ddot{\lambda}_1 + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \dot{\lambda}_1^2\right] e^{2(\lambda_1 - \nu_1)} = \gamma, \quad (18)$$

$$\left[\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}\right) \nu_2' \lambda_2' + \frac{-\alpha^2 + 3\alpha}{(1-\alpha)^2} \nu_2'^2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \nu_2''\right] e^{2(\nu_2 - \lambda_2)} = \gamma \quad (19)$$

和

$$\left[\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right) \dot{\lambda}_1^2 + \frac{\dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1}{\alpha} - \frac{\ddot{\lambda}_1}{\alpha}\right] e^{-2(\nu_1 + \nu_2)} + \left[\frac{-\alpha}{(1-\alpha)^2} \nu_2'^2 + \frac{\nu_2' \lambda_2'}{1-\alpha} - \frac{\nu_2''}{1-\alpha}\right] e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)} = 4\pi\sigma, \quad (20)$$

式中 γ 为一常数. 把(13)和(14)式代入(10)式, 得

$$C_1^2 C_2^2 e^{\frac{2\lambda_1}{\alpha}} e^{\frac{2\nu_2}{1-\alpha}} = f_1(t) e^{-(\nu_1 + \nu_2)}.$$

因为 C_1 和 C_2 为任意常数, 为了简单化, 取 $C_1^2 C_2^2 = 1$, 得

$$e^{\frac{2\lambda_1}{\alpha}} = f_1(t) e^{-\nu_1} \quad (21)$$

和

$$e^{\frac{2\nu_2}{1-\alpha}} = e^{-\nu_2},$$

故有 $\frac{2\nu_2}{1-\alpha} = -\nu_2$, 由此推出

$$\nu_2 = 0 \quad (22)$$

或

$$\alpha = 3, \quad (23)$$

而 ν_2 为 z 的任意函数. 由此得到对应于 $\nu_2 = 0$ 或 $\nu_2 \neq 0 (\alpha = 3)$ 的不同类型的解.

2.1 $\nu_2 = 0$

此时(19)式给出 $\gamma = 0$, (16)式给出 $\beta = 0$, (20)式变为 $\left(\frac{\alpha-1}{\alpha^2} \dot{\lambda}_1^2 + \frac{\dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1}{\alpha} - \frac{\ddot{\lambda}_1}{\alpha}\right) e^{-2\nu_1} = 4\pi\sigma$. 由于 σ 独立于 z , 这种解不适于星系墙.

2.2 $\alpha = 3$

此时 ν_2 为 z 的任意函数, (19), (16), (20), (18)和(17)式变为

$$\left(\frac{3}{2} \nu_2' \lambda_2' - \frac{3}{2} \nu_2''\right) e^{2(\nu_2 - \lambda_2)} = \gamma, \quad (24)$$

$$\left(-\frac{3}{4} \nu_2'^2\right) e^{2(\nu_2 - \lambda_2)} = \beta, \quad (25)$$

$$\left(\frac{2}{9} \dot{\lambda}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1 - \frac{1}{3} \ddot{\lambda}_1\right) e^{-2(\nu_1 + \nu_2)} + \left(-\frac{3}{4} \nu_2'^2 - \frac{1}{2} \nu_2' \lambda_2' + \frac{1}{2} \nu_2''\right) e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)} = 4\pi\sigma, \quad (26)$$

$$\left(\frac{4}{3}\nu_1\dot{\lambda}_1 - \frac{4}{3}\ddot{\lambda}_1 - \frac{2}{3}\dot{\lambda}_1^2\right)e^{2(\lambda_1-\nu_1)} = \gamma, \quad (27)$$

$$\left(\frac{1}{3}\dot{\lambda}_1^2 + \frac{2}{3}\ddot{\lambda}_1 - \frac{2}{3}\dot{\lambda}_1\nu_1\right)e^{2(\lambda_1-\nu_1)} = \beta. \quad (28)$$

(16)式可写成

$$e^{2(\nu_2-\lambda_2)} = \frac{\beta}{\frac{3-2\alpha}{(1-\alpha)^2}\nu_2'^2}. \quad (16a)$$

把(16a)式代入(19)式,得

$$\beta\left[\frac{(\alpha-1)\alpha}{3-2\alpha}\frac{\lambda_2'}{\nu_2'} + \frac{3\alpha-\alpha^2}{3-2\alpha} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{3-2\alpha}\frac{\nu_2''}{\nu_2'^2}\right] = \gamma. \quad (29)$$

(16a)式取对数再求导,得

$$\lambda_2' = \nu_2' + \frac{\nu_2''}{\nu_2'}. \quad (16b)$$

把(16b)式代入(29)式,得

$$\beta\frac{2\alpha}{3-2\alpha} = \gamma, \quad (30)$$

因为 $\alpha=3$, 有

$$-2\beta = \gamma. \quad (31)$$

现在(27)式变为

$$\left(-\frac{2}{3}\nu_1\dot{\lambda}_1 + \frac{2}{3}\ddot{\lambda}_1 + \frac{1}{3}\dot{\lambda}_1^2\right)e^{2(\lambda_1-\nu_1)} = \beta. \quad (32)$$

可以看到(28)和(32)式完全相同. 把(31)式代入(24)式, 有

$$\left(-\frac{3}{4}\nu_2'\lambda_2' + \frac{3}{4}\nu_2''\right)e^{2(\nu_2-\lambda_2)} = \beta. \quad (33)$$

由(25)和(33)式得

$$\nu_2'\lambda_2' = \nu_2'^2 + \nu_2'' \quad (34)$$

和

$$\lambda_2 = \nu_2 + \ln\nu_2' + C_3. \quad (35)$$

把(34)和(35)式代入(26)式, 有

$$\left(\frac{2}{9}\dot{\lambda}_1^2 + \frac{1}{3}\nu_1\dot{\lambda}_1 - \frac{1}{3}\ddot{\lambda}_1\right)e^{-2(\nu_1+\nu_2)} + C_4e^{-2\lambda_1}e^{-2\nu_2} = 4\pi\sigma. \quad (36)$$

令 $f_1(t)=1$, (21)式变为

$$\nu_1 = -\frac{2}{3}\lambda_1. \quad (37)$$

现在来考虑几种可能的场方程新解.

假设 1 $\beta=0$

在这种假设下, 把(37)式代入(32)式, 得

$$\lambda_1 = \frac{6}{7}\ln\left(\frac{7}{6}t + C_5\right) + C_6. \quad (38)$$

由(37)和(38)式有

$$\nu_1 = -\frac{4}{7} \ln\left(\frac{7}{6}t + C_5\right) - \frac{2}{3}C_6. \quad (39)$$

(36)式变为

$$\left[C_7\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{6}{7}} + C_8\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{12}{7}} \right] e^{-2\nu_2} = 4\pi\sigma. \quad (40)$$

1) 当 $\alpha=3$ 时, ν_2 为 z 的任意函数. 如果令 $\nu_2 = az^2$, 这里 a 为常数, 且 $a>0$, 由(40)式得

$$\left[C_7\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{6}{7}} + C_8\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{12}{7}} \right] e^{-2az^2} = 4\pi\sigma, \quad (41)$$

度规为

$$\begin{aligned} ds^2 = & -C_9\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{8}{7}} e^{2az^2} dt^2 + C_{10}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{12}{7}} e^{2az^2} (az)^2 dz^2 \\ & + C_{11}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{4}{7}} e^{-az^2} (dx^2 + dy^2). \end{aligned} \quad (42)$$

与此相似, 可以令 $\nu_2 = \frac{1}{2}z^2 \sin^2 z$, 由(40)式得

$$\left[C_7\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{6}{7}} + C_8\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{12}{7}} \right] e^{-\frac{1}{2}z^2 \sin^2 z} = 4\pi\sigma, \quad (43)$$

度规为

$$\begin{aligned} ds^2 = & -C_9\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{8}{7}} e^{\frac{1}{2}z^2 \sin^2 z} dt^2 + C_{10}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{12}{7}} (z \sin^2 z + z^2 \sin z \cos z)^2 e^{\frac{1}{2}z^2 \sin^2 z} dz^2 \\ & + C_{11}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{4}{7}} e^{-\frac{1}{2}z^2 \sin^2 z} (dx^2 + dy^2). \end{aligned} \quad (44)$$

我们得到的这两种平面对称新解, (41)至(44)式可以代表平面对称且能量密度按负指数律随 z^2 增大而衰减的星系墙解. 第一个解的能量密度 σ 图像相似于标准正态分布的分布密度图像, 但峰值随时间推移而递减; 第二个解的 σ 图像稍复杂, 多了一个正弦平方指数因子, 为不稳定的波动衰减型.

2) 还可以得到另一种有用的新解, 如果令

$$\nu_2 = \ln\left(\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b} \sin^2 \eta z\right),$$

式中 η 和 b 均为常数, 且 $\eta>0, b \gg 2$, 由(40)式得

$$\left[C_7\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{6}{7}} + C_8\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{12}{7}} \right] \left(\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b} \sin^2 \eta z\right)^{-2} = 4\pi\sigma, \quad (45)$$

度规为

$$\begin{aligned} ds^2 = & -C_9\left(\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b} \sin^2 \eta z\right)^2 \left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{-\frac{8}{7}} dt^2 + 4C_{10}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{12}{7}} \\ & \times \left[\eta \frac{(b-1)}{b} \sin \eta z \cos \eta z \right]^2 dz^2 + C_{11}\left(\frac{7}{6}t + C_5\right)^{\frac{4}{7}} \left(\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b} \sin^2 \eta z\right)^{-1} (dx^2 + dy^2). \end{aligned} \quad (46)$$

这是一种在 z 方向上具有周期性的新解.

假设 2 $\beta \neq 0$

此时, 由(32)或(28)式, 有

$$e^{2(\lambda_1 - \nu_1)} \left(-\frac{2}{3} \dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1 + \frac{2}{3} \ddot{\lambda}_1 + \frac{1}{3} \dot{\lambda}_1^2 \right) = \beta,$$

取对数得

$$2(\lambda_1 - \nu_1) + \ln \left(-\frac{2}{3} \dot{\nu}_1 \dot{\lambda}_1 + \frac{2}{3} \ddot{\lambda}_1 + \frac{1}{3} \dot{\lambda}_1^2 \right) = \ln \beta,$$

对 t 求导并利用(37)式, 有

$$9\ddot{\lambda}_1 + 51\dot{\lambda}_1\ddot{\lambda}_1 + 35\dot{\lambda}_1^3 = 0. \quad (47)$$

解方程(47), 得如下三个解:

$$\lambda_1 = C_{12}, \quad (48)$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{15} \ln \frac{15}{9} (C_{13}t + C_{14}), \quad (49)$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{7} \ln \frac{7}{6} (C_{13}t + C_{15}). \quad (50)$$

通过比较, 可以看到(49), (50)两式和(38)式相似, 所以它们不会给出另外的新解. 而利用(48)式容易求出静态解, 其能量的空间分布由 $\nu_2(z)$ 的具体形式决定, 其细节这里不再讨论.

3 整体特性

首先研究时空的整体对称性. 时空的对称性可以用其中的独立 Killing 矢量数来标志, 独立的 Killing 矢量数越多, 时空的对称性越强.

对于(42)式, 令 $C_9 = C_{10} = C_{11} = 1$, 由 Killing 方程 $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$, 得以下 10 个方程:

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{2}{3} \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-1} \xi_0 - 2 \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-\frac{20}{7}} (az)^{-1} \xi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial z} + \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - 4az\xi_0 - 2 \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-1} \xi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \frac{2}{3} \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-1} \xi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial t} - \frac{2}{3} \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-1} \xi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{\frac{13}{7}} (az)^2 \xi_0 - (2az + z^{-1}) \xi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial z} + 2az\xi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z} + 2az\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{\frac{5}{7}} e^{-3az^2} \xi_0 - \left(\frac{7}{6}t + C_5 \right)^{-\frac{8}{7}} e^{-3az^2} (az)^{-1} \xi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\xi_3}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{\frac{5}{7}} e^{-3az^2} \xi_0 - \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{8}{7}} e^{-3az^2} (az)^{-1} \xi_1 = 0.$$

解这 10 个方程, 得 $\xi_0 = \xi_1 = 0$,

$$\xi_2 = C_{16} e^{-az^2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{\frac{4}{7}} y,$$

$$\xi_3 = -C_{16} e^{-az^2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{\frac{4}{7}} x.$$

另外还有三个平面对称时空所固有的独立 Killing 矢量, 即表示沿 x, y 两个方向上平移对称性的 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^a$ 及表示在 xy 平面内旋转对称性的 Killing 矢量

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^a = x \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^a - y \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a,$$

所以(42)式所表示的时空具有 5 个独立的 Killing 矢量. 由于 $\xi_0 = 0$, 不存在类时 Killing 矢量, 所有 5 个 Killing 矢量全是类空的, 所以(42)式所表示的是不稳定时空. (44)和(46)式的整体对称性大致相似, 它们所表示的也是不稳定时空.

下面研究时空的奇异性.

从(42), (44)和(46)式看出, 如果积分常数 $C_5 < 0$, 当 $t \rightarrow -\frac{6}{7} C_5$ 时, 度规函数出现奇异性. 另外, 当 $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, (44)式度规函数也出现奇异性; 又当 $\eta z = n \left(\frac{\pi}{2} \right)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, (46)式同样出现奇异性. 为了看出它们是否只是坐标奇异性, 需要通过计算曲率标量才能确定.

对于度规(42)式表示的时空, 求出曲率标量

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{7}{3} (C_9)^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{6}{7}} - 6 (C_{10})^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{12}{7}} \right] e^{-2az^2}, \\ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \left[\frac{49}{27} (C_9)^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{12}{7}} - 14 (C_9 C_{10})^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{18}{7}} \right. \\ &\quad \left. + 60 (C_{10})^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{24}{7}} \right] e^{-4az^2}, \\ R_{\lambda\mu\nu\kappa} R^{\lambda\mu\nu\kappa} &= \left[\frac{53}{27} (C_9)^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{12}{7}} - \frac{56}{3} (C_9 C_{10})^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{18}{7}} \right. \\ &\quad \left. + 108 (C_{10})^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{24}{7}} \right] e^{-4az^2}. \end{aligned}$$

由(44)式可求出

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{7}{3} (C_9)^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{6}{7}} - \frac{3}{2} (C_{10})^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{12}{7}} \right] e^{-z^2 \sin^2 z}, \\ R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \left[\frac{49}{27} (C_9)^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{12}{7}} - \frac{7}{2} (C_9 C_{10})^{-1} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{18}{7}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{4} (C_{10})^{-2} \left(\frac{7}{6} t + C_5 \right)^{-\frac{24}{7}} \right] e^{-2z^2 \sin^2 z}, \end{aligned}$$

$$R_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda\mu\nu} = \left[\frac{53}{27}(C_9)^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{12}{7}} - \frac{14}{3}(C_9C_{10})^{-1}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{18}{7}} + \frac{27}{4}(C_{10})^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{24}{7}} \right] e^{-2z^2 \sin^2 \eta z}.$$

同样,利用(46)式可求出

$$\begin{aligned} R &= -2(C_{10})^{-1}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{12}{7}}(\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b}\sin^2 \eta z)^{-2}, \\ R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} &= \left[\frac{7889}{2592}(C_9)^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{12}{7}} - \frac{287}{72}(C_9C_{10})^{-1}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{18}{7}} + 3(C_{10})^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{24}{7}} \right] (\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b}\sin^2 \eta z)^{-4}, \\ R_{\lambda\mu\nu}R^{\lambda\mu\nu} &= \left[\frac{101}{27}(C_9)^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{12}{7}} + \frac{10}{3}(C_9C_{10})^{-1}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{18}{7}} + \frac{27}{4}(C_{10})^{-2}(\frac{7}{6}t + C_5)^{-\frac{24}{7}} \right] (\frac{1}{b} + \frac{(b-1)}{b}\sin^2 \eta z)^{-4}. \end{aligned}$$

在 $t \rightarrow -\frac{6}{7}C_5$ 时,以上 9 个曲率标量全部发散,说明度规(42),(44)和(46)式所表示的三种时空中, $t = -\frac{6}{7}C_5$ 都是标量多项式的曲率奇异性,为本性奇点;而 $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 和 $\eta z = n(\frac{\pi}{2})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (分别对(44)和(46)式)只是坐标奇点,不是本性奇点,故可引入坐标变换来消除.

上面证明了对三个解而言, $t = -\frac{6}{7}C_5$ 为本性奇点,是一个不能引入坐标变换来消除掉的时空流形的内禀奇点.另外,这三种度规还提供了平面对称时空结构的动态演化信息:

1)从(42)和(44)式的曲率标量看出,它们与时间 t 有关的同时,还表现出 $|z|$ 的增加比 t 的推移使所有项更快地趋于零,即在星系长城内部大部分时空很快趋于平坦.

2)从(46)式的曲率标量看出,它们与时间 t 有关的同时还在 z 方向上呈周期性变化,由于时空是大爆炸之后生成的,我们可进一步猜测这一平面对称结构是在空间中运动着的.

3)从这三组曲率标量可看出,它们与 t 和 z 有关而与 x 和 y 无关,这正是非稳定平面对称时空所特有的性质.

感谢颜骏博士的有益讨论.

- [1] M. Geller and J. Huchra, *Science*, **246**(1989), 897.
- [2] H. Hodges, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1080.
- [3] N. Jurok, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 2625.
- [4] T. W. Kibble, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **9**(1976), 1387.
- [5] A. Vilenkin, *Phys. Rep.*, **121**(1985), 263.
- [6] Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **192**(1980), 663.

- [7] A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.*, **46**(1981), 1169.
- [8] D. Garfinkle and R. Gregory, *Phys. Rev.*, **D41**(1990), 1889.
- [9] A. Wang, *Phys. Rev.*, **D44**(1991), 1705.
- [10] E. Shaver and K. Lake, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 3287.
- [11] D. Garfinkle, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 1323.
- [12] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).

GENERAL-RELATIVISTIC “WALL OF GALAXIES”

TAO BI-XIU

(*Department of Physics, Guizhou Institute for Nationalities, Guiyang 550025*)

TAO BI-YOU

(*Workers and Staffs University, P. O. Box 77, Chengdu 610066*)

(Received 24 February 1995; revised manuscript received 30 October 1995)

ABSTRACT

We examine plane symmetric solutions to the Einstein equations under the assumption of functional separability of the metric coefficients. Under the further assumption that the energy-momentum tensor is of the form $T_t^t = T_x^x = T_y^y = -\sigma(t, z)$, three new solutions are found, the global properties of the spacetimes, such as their symmetries and singularities are investigated.

PACC: 0420; 9850