第45卷 第8期 1996年8月 物 理 学 报 Vol.45, No.8, August, 1996
1000-3290/96/45(08)/1249-06 ACTA PHYSICA SINICA

Aharonov-Bohm 磁通对一维铁磁链中孤子的影响*

陈 浩 陈 渊
(华南师范大学物理系,广州 510631)
(1995年12月25日收到)

分析了 Aharonov-Bohm 磁通对一维铁磁链中孤子的影响,结果表明 Aharonov-Bohm 磁通对孤子的峰值、宽度、静止能量及有效质量均有影响.

PACC: 0365; 7510J; 0290

1 引 言

对于铁磁链中存在孤子的问题,是人们长期以来一直所感兴趣的问题,人们从理论[1]和实验[2]两方面对此问题进行了考察.理论研究基本上遵循两种方法:1)从一开始即将自旋变量看成是经典的;2)开始将自旋看成是量子的,到后来再作半经典近似.第2种方法主要是利用相干态表示[3],这也是本文所要用的方法.

Aharonov-Bohm(缩写为 A-B)效应[4]显示电磁势并不是人们通常所认为的仅仅为方便而引入的辅助量,而是能产生可观察的量子效应的物理量.A-B 效应在许多物理领域,如量子场论[5]、量子统计[5]、介观物理[6]及凝聚态物理的其它方面[7]有着广泛的应用.本文将研究 A-B 势对铁磁链中孤子特征,如孤子宽度、峰值、静止能量和有效质量的影响.

2 运动方程及其解

无外磁场时,铁磁链的 Hamiltonian 为

$$H = -\frac{J}{2}\sum_{l\delta}(S_l^+S_{l+\delta}^- + S_l^-S_{l+\delta}^+) - \widetilde{J}\sum_{l\delta}S_l^zS_{l+\delta}^z, \tag{1}$$

其中 $l+\delta$ 表示 l 的最邻近格点,而总格点数为 N, $S_l^\pm = S_l^x \pm \mathrm{i}S_l^y$ 及 S_l^z 为第 l 个格点上的自旋算符,满足对易关系

$$[S_l^\pm, S_{l'}^z] = \mp S_l^\pm\delta_{ll'}, \qquad [S_l^+, S_{l'}^-] = 2S_l^z\delta_{ll'}.$$

在(1)式中, $\widetilde{J} \geqslant J > 0$.当取"="时(1)式描述各向同性铁磁链,而当取">"时,(1)式描述各向异性铁磁链.

---

*广东省自然科学基金和中山大学高等学术中心基金资助的课题.

作 Holstein-Primakoff 变换[8]

$$S_l^+ = (\sqrt{2S - a_l^+ a_l})a_l \approx \sqrt{2S}(1 - a_l^+ a_l/4S)a_l,$$
$$S_l^- = a_l^+ \sqrt{2S - a_l^+ a_l} \approx \sqrt{2S}a_l^+(1 - a_l^+ a_l/4S), \tag{2}$$
$$S_l^z = S - a_l^+ a_l,$$

其中 S 为每个格点上的自旋, a_l, a_l^+ 为第 l 个格点上的玻色子算符,满足对易关系

$$[a_l, a_{l'}^+] = \delta_{ll'}, \qquad [a_l, a_{l'}] = [a_l^+, a_{l'}^+] = 0.$$

将(2)式代入(1)式,并准确到 a_l, a_l^+ 的四次项得

$$\begin{aligned} H = & S\sum_{l\delta}[\widetilde{J}(a_l^+ a_l + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}) - J(a_l a_{l+\delta}^+ + a_l^+ a_{l+\delta})] \\ & - \widetilde{J}\sum_{l\delta} a_l^+ a_l a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} + \frac{1}{4}J\sum_{l\delta}(a_l^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_{l+\delta} + a_{l+\delta}^+ a_l^+ a_l a_l \\ & + a_l^+ a_l^+ a_l a_{l+\delta} + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_l), \end{aligned} \tag{3}$$

其中已略去了无关紧要的常数项 $-2\widetilde{J}S^2N$.

现将链闭合成一环 c,并让一磁通量为 Φ 的 A-B 磁通穿过环 c 中间,A-B 势 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \Phi. \tag{4}$$

A-B 势对玻色子 a_l, a_l^+ 的影响,可通过类似于格点规范理论[9]中的作法得出,即在 Hamiltonian(3)式中作变换

$$a_l a_{l+\delta}^+ \rightarrow a_l a_{l+\delta}^+ \exp\left(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_l^{l+\delta}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right). \tag{5}$$

于是考虑了 A-B 磁通后的 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned} H_{\text{A-B}} = & S\sum_{l\delta}\Big[\widetilde{J}(a_l^+ a_l + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}) - J\Big(a_l a_{l+\delta}^+ \exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_l^{l+\delta}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big) \\ & + a_l^+ a_{l+\delta}\exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_{l+\delta}^{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big)\Big] - \widetilde{J}\sum_{l\delta} a_l^+ a_l a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} \\ & + \frac{1}{4}J\sum_{l\delta}\Big[a_l^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_{l+\delta}\exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_{l+\delta}^{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big) + a_{l+\delta}^+ a_l^+ a_l a_l \exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_l^{l+\delta}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big) \\ & + a_l^+ a_l^+ a_l a_{l+\delta}\exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_{l+\delta}^{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big) + a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta}^+ a_{l+\delta} a_l \exp\Big(\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\int_l^{l+\delta}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{6}$$

因此算符 a_l 的运动方程为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\dot{a}_l = [a_l, H_{\text{A-B}}] = & 4\widetilde{J}Sa_l - 2JS(a_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + a_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \\ & - 2\widetilde{J}(a_{l+1}^+ a_{l+1} + a_{l-1}^+ a_{l-1})a_l + \frac{1}{2}J(a_{l+1}^+ a_{l+1} a_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ & + a_{l-1}^+ a_{l-1} a_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + a_{l+1}^+ a_l a_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + a_{l-1}^+ a_l a_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ & + 2a_l^+ a_l a_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + 2a_l^+ a_l a_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\varphi = \frac{e}{\hbar c}\int_{l}^{l+1}\mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{e}{\hbar c}\frac{1}{N}\oint_{c}\mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{2\pi\Phi}{N\Phi_0}, \tag{8}$$

而 $\Phi_0 = hc/e$ 为 A-B 磁通量子.

利用相干态表示[3]

$$a_l|\alpha_l\rangle = \alpha_l|\alpha_l\rangle$$

系统的状态由

$$|\psi\rangle = \prod_l |\alpha_l\rangle$$

描述.

$$\alpha_l = \langle\psi|a_l|\psi\rangle$$

为第 l 个格点上自旋的概率幅.从而运动方程(7)成为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\dot{\alpha}_l =& 4\widetilde{J}S\alpha_l - 2JS(\alpha_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \alpha_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - 2\widetilde{J}(|\alpha_{l+1}|^2 + |\alpha_{l-1}|^2)\alpha_l \\ &+ \frac{1}{2}J(|\alpha_{l+1}|^2\alpha_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + |\alpha_{l-1}|^2\alpha_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \alpha_{l+1}^{*}\alpha_l^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ &+ \alpha_{l-1}^{*}\alpha_l^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + 2|\alpha_l|^2\alpha_{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + 2|\alpha_l|^2\alpha_{l-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}). \end{aligned} \tag{9}$$

取连续近似

$$\begin{aligned} &\alpha_l(t) = \alpha(x,t), \\ &\alpha_{l\pm1}(t) = \alpha(x,t) \pm \alpha_x(x,t) + \frac{1}{2}\alpha_{xx}(x,t)\cdots, \end{aligned}$$

其中已取晶格常数 $a = 1$.

(9)式成为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\alpha_t =& 4S(\widetilde{J} - J\cos\varphi)\alpha + \mathrm{i}4SJ\sin\varphi\alpha_x - 2SJ\cos\varphi\alpha_{xx} \\ &- 4(\widetilde{J} - J\cos\varphi)|\alpha|^2\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

令

$$\begin{aligned} &\alpha(x,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\phi(\xi,t), \\ &\hbar\lambda = 4(\widetilde{J} - J\cos\varphi)S, \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar}{2SJ\cos\varphi}}x, \end{aligned} \tag{11}$$

则(10)式成为

$$\mathrm{i}\phi_t = \mathrm{i}2\sin\varphi\sqrt{\frac{2JS}{\hbar\cos\varphi}}\phi_\xi - \phi_{\xi\xi} - \frac{4(\widetilde{J} - J\cos\varphi)}{\hbar}|\phi|^2\phi. \tag{12}$$

现求方程(12)的形式为

$$\phi(\xi,t) = u(\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}, \quad \eta = x - vt \tag{13}$$

的解.将(13)式代入(11)式,可得

$$k = \frac{\hbar v}{4SJ\cos\varphi} + \tan\varphi \tag{14}$$

及

$$u_{\eta\eta} + 2\gamma u^3 = \mu^2 u, \tag{15}$$

其中

$$\gamma = \frac{\widetilde{J} - J\cos\varphi}{SJ\cos\varphi}, \quad \mu^2 = \frac{2k^2 SJ\cos\varphi - 4kSJ\sin\varphi - \hbar w}{2SJ\cos\varphi}. \tag{16}$$

(15)式是标准的非线性 Schrödinger 方程,具有标准的解

$$u = \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}}\mathrm{sech}\mu\eta. \tag{17}$$

由概率幅的归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\eta)\mathrm{d}\eta = 1,$$

可得

$$\mu = \gamma/2. \tag{18}$$

结合(18)和(16)式可得

$$\mu = \frac{\widetilde{J} - J\cos\varphi}{2SJ\cos\varphi} \tag{19}$$

及

$$\begin{aligned}\hbar w &= 2k^2 SJ\cos\varphi - 4kSJ\sin\varphi - \frac{(\widetilde{J} - J\cos\varphi)^2}{2SJ\cos\varphi}\\ &= -\frac{(\widetilde{J} - J\cos\varphi)^2}{2SJ\cos\varphi} - 2SJ\sin\varphi\tan\varphi + \frac{\hbar^2 v^2}{8SJ\cos\varphi}.\end{aligned} \tag{20}$$

由(17)和(18)式得归一的孤子解为

$$u(\eta) = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\mathrm{sech}\mu\eta, \tag{21}$$

其峰值为

$$u_{\max} = \sqrt{\mu/2} = \sqrt{\frac{\widetilde{J} - J\cos\varphi}{4SJ\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{\widetilde{J}\ /\cos\varphi - J}{4SJ}}, \tag{22}$$

宽度为

$$\Delta\eta = \mu^{-1} = \frac{2SJ\cos\varphi}{\widetilde{J} - J\cos\varphi} = \frac{2SJ}{\widetilde{J}\ /\cos\varphi - J}. \tag{23}$$

而由(11),(13)和(21)式可得归一的概率幅为

$$\alpha(x,t) = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\exp\left(\mathrm{i}(kx - w_s t)\right)\cdot\mathrm{sech}\mu(x - vt), \tag{24}$$

其中

$$\hbar w_s = \hbar\lambda + \hbar w = 4(\widetilde{J} - J\cos\varphi)S - \frac{(\widetilde{J} - J\cos\varphi)^2}{2SJ\cos\varphi} - 2SJ\sin\varphi\tan\varphi + \frac{\hbar^2 v^2}{8SJ\cos\varphi}$$
$$= E_0 + \frac{1}{2}m_s v^2 \tag{25}$$

为孤子量子，E_0 及 m_s 分别为孤子的静止能量和有效质量，其值分别为

$$E_0 = 4(\widetilde{J} - J\cos\varphi)S - \frac{(\widetilde{J} - J\cos\varphi)^2}{2SJ\cos\varphi} - 2SJ\sin\varphi\tan\varphi, \tag{26}$$

$$m_s = \frac{\hbar^2}{4SJ\cos\varphi}. \tag{27}$$

3　结论与讨论

我们得到了考虑 A-B 磁通后，一维铁磁链的孤子解. 孤子的峰值、宽度、静止能量和有效质量均受到 A-B 磁通的影响. 当 $0 \leqslant \varphi < \pi/2$ 时，$0 < \cos\varphi \leqslant 1$，由(22)式可知 $\sqrt{(J/\cos\varphi - J)/4SJ} \geqslant \sqrt{(J - J)/4SJ}$，即 A-B 磁通使孤子的峰值变大. 同样的分析用到(23)，(26)和(27)式可知，A-B 磁通使孤子的宽度变狭、静止能量变小而有效质量变大.

当无 A-B 磁通时，$\varphi = 0$，若 $\widetilde{J} = J$，即各向同性时，由(24)式可知 $\alpha(x,t) = 0$，无孤子解. 而当存在 A-B 磁通时，$\varphi \neq 0$，此时即使 $\widetilde{J} = J$，$\alpha(x,t)$ 也不为零，存在孤子解. 从物理上讲是由于 A-B 磁通破坏了各向同性.

我们的讨论适用于 $0 \leqslant \varphi < \pi/2$，由(8)式，即为 $\Phi < N\Phi_0/4$，因此所加的 A-B 磁通受到一定的限制. 当 $\varphi = \pi/2$，即 $\Phi = N\Phi_0/4$ 时，出现奇异性，这一点有待进一步研究.

作者之一陈　浩非常感谢中山大学周义昌教授极其有益的讨论.

[1] D. I. Pushkarov and K. I. Pushkarov, *Phys. Lett.*, **61A**(1977), 339; H. R. Jauslin and T. Schneider, *Phys. Rev.*, **B26**(1982), 5153; L. R. Mead and N. Papanicolaou, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 1633; M. J. Skrinjar *et al.*, *J. Phys.*, **C20**(1987), 2243.

[2] F. Borsa *et al.*, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 5173; K. Kopinga *et al.*, *Phys. Rev.*, **B29**(1984), 2868.

[3] A. Perelomov, Generalized Coherent States and Their Applications(Springer-Verlag, Berlin, 1986).

[4] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115**(1959), 485; 周义昌、李华钟，物理学进展，**15**(1995), 114.

[5] E. Fradkin, Field Theories of Condensed Matter Systems (Addison-Wesley, Redwood, 1991); J. Lykken *et al.*, *Int. J. Mod. Phys.*, **A6**(1991), 5155.

[6] 李华钟、周义昌，物理学进展，**15**(1995), 391.

[7] 冯　端、金国钧，凝聚态物理学新论(上海科学技术出版社，上海，1992).

[8] 李正中，固体理论(高等教育出版社，北京，1985).

[9] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775.

EFFECTS OF THE AHARONOV-BOHM FLUX TO THE SOLITON IN A ONE-DIMENSIONAL FERROMAGNETIC RING

CHEN HAO CHEN YUAN
(*Department of Physics, South China Normal University, Guangzhou* 510631)
(Received 25 December 1995)

ABSTRACT

Effects of the Aharonov-Bohm flux to the soliton in a one-dimensional ferromagnetic ring are investigated. The effects on the peak, the width, the rest energy and the effective mass of the soliton by the Aharonov-Bohm flux are shown.

PACC: 0365; 7510J; 0290