第 45 卷 第 8 期 1996 年 8 月
1000-3290/96/45(08)/1255-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 45, No. 8, August, 1996

高阶微商场论中奇异拉氏量系统的量子正则对称性*

李子平†

(北京工业大学应用物理系，北京 100022)

(1994 年 7 月 25 日)

给出了高阶微商场论中奇异拉氏量系统规范生成元的构成. 从相空间中 Green 函数的生成泛函出发，导出了约束 Hamilton 系统正则形式的 Ward 恒等式. 指出该系统的量子正则方程与由 Dirac 猜想得到的经典正则方程不同. 给出了与 Chern-Simons 理论等价的一个广义动力学系统的量子化. 将正则 Ward 恒等式初步应用于该系统，不作出对正则动量的路径积分，也可导出场的传播子与正规顶角之间的某些关系.

PACC: 1110; 1130

1 引 言

高阶微商场论与引力理论、规范场论、超对称、弦理论等问题直接有关，近来的研究日益活跃[1,2]. 规范不变的系统均是用奇异拉氏量来描述的. 文献[1]中讨论了高阶微商场论中奇异拉氏量系统的经典正则对称性，这里进一步研究该系统的量子正则对称性.

场论中采用路径积分量子化有其突出的优点(特别是对非 Abel 规范场). Ward 恒等式在量子场论中占十分重要的地位，是理论可重正化的依据. 在实际计算中(如 QCD 中)，利用该恒等式可将高阶顶角的计算化为低阶顶角的计算. 当相空间的路径积分关于动量的积分属于 Gauss 型或 Feynman 型时，该积分可化为位形空间中的路径积分[3]. 传统的 Ward 恒等式是在位形空间中给出的[4,5]. 当“质量”依赖于坐标[6]或“质量”依赖于坐标和动量[7]，即使对动量的路径积分可以作出，其有效拉氏量有含 δ 函数的奇异性. 这种奇异性寄希望于重正化过程去消除. 一般来说，相空间中 Green 函数的生成泛函对动量的路径积分是不能积出的. 对约束 Hamilton 系统和高阶微商系统要作出对动量的路径积分，当约束结构复杂时是难以完成的，甚至是不可能的. 因此研究量子系统在相空间中的正则对称性质，就具有更普遍的意义.

本文首先给出高阶微商奇异拉氏量系统规范生成元的构成. 其次基于约束 Hamilton 系统相空间中 Green 函数的生成泛函在正则变量变换下的不变性，导出了正则形式的

* 国家自然科学基金资助的课题.

† 中国高等科学技术中心(世界实验室)协联成员.

Ward 恒等式,它与传统的表述形式是完全不同的.指出约束 Hamilton 系统的量子正则方程与由 Dirac 猜想得到的经典正则方程是不同的.对于一个给定的奇异拉氏量系统,一旦找出了系统的第一类约束,就可构造出系统规范变换的生成元.从而就有相应的正则形式的 Ward 恒等式.作为理论的初步应用,文中讨论了与 Chern-Simons 理论等价的一个广义动力系统的量子化,在广义 Coulomb 规范下,理论中不出现 Faddeev-Popov 鬼粒子场,将规范生成元的构造和正则 Ward 恒等式用于该系统,勿需作出对动量的路径积分,导出了场的传播子与正规顶角间的某些关系.

2 规范生成元

设 $\varphi^{\alpha}(x)(\alpha = 1,2,\cdots,n)$ 为描述系统运动的场量,α 为不同场或场的不同分量的指标,$x = (x^0, x^i)$ $(x^0 = t, i = 1,2,3)$.平坦时空度规为 $\eta_{\mu\nu} = (+---)$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$.设场的运动由含高阶微商的拉氏量来描述,其泛函形式为

$$L[\varphi^{\alpha}_{(0)}, \varphi^{\alpha}_{(1)}, \cdots, \varphi^{\alpha}_{(N)}] = \int \mathrm{d}^3x \mathscr{L}(\varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{,\mu}, \cdots, \varphi_{,\mu(N)}), \tag{1}$$

其中 $\mathscr{L}$ 为场的拉氏量密度,$\varphi^{\alpha}_{(0)} = \varphi^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{(1)} = \dot{\varphi}^{\alpha}, \varphi^{\alpha}_{(2)} = \ddot{\varphi}^{\alpha}, \cdots$ 等等.$\varphi^{\alpha}_{,\mu} = \partial_{\mu}\varphi^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\varphi^{\alpha}$, $\varphi^{\alpha}_{,\mu(m)} = \underbrace{\partial_{\mu}\partial_{\nu}\cdots\partial_{\rho}\partial_{\sigma}}_{m}\varphi^{\alpha}$.系统 Euler-Lagrange 方程为

$$\sum_{r=0}^{N}(-1)^r\partial_0^r\frac{\delta L}{\delta\varphi^{\alpha}_{(r)}} = 0. \tag{2}$$

利用 Ostrogradsky 变换,引入正则动量[1]

$$\pi_{\alpha}^{(N-1)} = \delta L/\delta\varphi^{\alpha}_{(N)}, \tag{3a}$$

$$\pi_{\alpha}^{(s-1)} = \delta L/\delta\varphi^{\alpha}_{(s)} - \pi_{\alpha}^{(s)} \quad (s = 1,2,\cdots,N-1), \tag{3b}$$

于是,可将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述.系统的正则 Hamilton 量为

$$H^{c}[\varphi^{\alpha}_{(s)}, \pi_{\alpha}^{(s)}] = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}^{c} = \int \mathrm{d}^3x\Big[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{s=0}^{N-1}(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi^{\alpha}_{(s+1)} - \mathscr{L})\Big]$$

$$= \int \mathrm{d}^3x(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi^{\alpha}_{(s+1)} - \mathscr{L}), \tag{4}$$

它由(3a)式消去其中最高阶导数 $\varphi^{\alpha}_{(N)}$ 而得(重复指标代表求和,下同).对于正规系统,其 Hess 矩阵 $(H_{\alpha\beta})$ 非退化,$\det|H_{\alpha\beta}| = \det|\delta^2L/\delta\varphi^{\alpha}_{(N)}\delta\varphi^{\beta}_{(N)}| = \det|\partial^2\mathscr{L}/\partial\varphi^{\alpha}_{,\mu(N)}\partial\varphi^{\beta}_{,\mu(N)}| \neq 0$,此时由(3a)式可解出所有的 $\varphi^{\alpha}_{(N)}$ 作为 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数,正则 Hamilton 量是独立正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的泛函.对于用奇异拉氏量描述的系统(简称奇异系统),其 Hess 矩阵是退化的,$\det|H_{\alpha\beta}| = 0$,因而由(3a)式不能解出所有的 $\varphi^{\alpha}_{(N)}$ 作为正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 和 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数,设 Hess 矩阵的秩为 R,此时正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 与 $\pi_{\alpha}^{(s)}$ 之间存在 $n-R$ 个初级约束[8]

$$\Phi_{a}^{0}(\varphi^{\alpha}_{(s)}, \pi_{\alpha}^{(s)}) \approx 0. \tag{5}$$

记号≈代表弱等,表示等式在约束超曲面上成立.奇异拉氏量描述的系统为约束 Hamilton

系统.它的运动方程为

$$\dot{\varphi}^{a}_{(s)} = \{\varphi^{a}_{(s)}, H_T\}, \quad \dot{\pi}^{(s)}_{a} = \{\pi^{(s)}_{a}, H_T\}, \tag{6}$$

其中

$$H_T = \int \mathrm{d}^3x(\mathscr{H}^c + \lambda^a \Phi^0_a), \tag{7}$$

$\lambda^a(x)$ 为拉氏乘子,$\{,\}$代表场的广义 Poisson 括号.按约束的自洽性条件,由初级约束可逐次求出次级约束

$$\Phi^k_a = \{\Phi^{k-1}_a, H_T\} \approx 0, \tag{8}$$

直至 Φ^m_a 适合

$$\Phi^{m+1}_a = \{\Phi^m_a, H_T\} = C^b_{ak}\Phi^k_b \tag{9}$$

为止.将全部初级约束和次级约束记为 $\{\Psi_n\}$.一个约束 Ψ_a 如果与其他约束 Ψ_b 均适合 $\{\Psi_a, \Psi_b\} = 0(\mathrm{mod}\Psi_c)$,则称 Ψ_a 为第一类约束,否则称为第二类约束.

从分析系统的约束结构,可以构造规范变换的生成元.考虑系统仅含第一类约束的情况.规范变换保持系统的动力学方程不变,系统的轨线 $(\varphi^a_{(s)}, \pi^{(s)}_a, \lambda^a)$ 和无穷小规范变换后的轨线 $(\varphi^a_{(s)} + \xi^a_{(s)}, \pi^{(s)}_a + \eta^{(s)}_a, \lambda^a + \zeta^a)$ 均适合方程(5)和(6).将规范变换后的轨线方程(5)和(6)关于 $\xi^a_{(s)}$, $\eta^{(s)}_a$ 和 λ^a 等小量展开,利用原有的轨线方程(5)和(6),得

$$(\partial\Phi^0_a/\partial\varphi^a_{(s)})\xi^a_{(s)} + (\partial\Phi^0_a/\partial\pi^{(s)}_a)\eta^{(s)}_a = 0 \quad (\mathrm{mod}\Phi^0_a), \tag{10}$$

$$\dot{\xi}^a_{(s)} = \int \mathrm{d}^3x[(\delta^2 H_T/\delta\varphi^\beta_{(r)}\delta\pi^{(s)}_a)\xi^\beta_{(r)} + (\delta^2 H_T/\delta\pi^{(r)}_\beta\delta\pi^{(s)}_a)\eta^{(r)}_\beta] \quad (\mathrm{mod}\Phi^0_a), \tag{11}$$

$$\dot{\eta}^{(s)}_a = -\int \mathrm{d}^3x[(\delta^2 H_T/\delta\varphi^\beta_{(r)}\delta\varphi^a_{(s)})\xi^\beta_{(r)} + (\delta^2 H_T/\delta\pi^{(r)}_\beta\delta\varphi^a_{(s)})\eta^{(r)}_\beta] \quad (\mathrm{mod}\Phi^0_a). \tag{12}$$

在规范理论中,规范变换含时空的任意函数及其微商.一般可将规范生成元写为

$$G = \int \mathrm{d}^3x\varepsilon^{(k)}_j G^j_k(\varphi^a_{(s)}, \pi^{(s)}_a), \tag{13}$$

其中 $\varepsilon^{(k)}_j = \partial^k_0\varepsilon_j(x)$, $\varepsilon_j(x)$ 为时空的任意函数.此规范生成元产生正则变量的变更为

$$\xi^a_{(s)} = \delta\varphi^a_{(s)} = \{\varphi^a_{(s)}, G\} = \delta G/\delta\pi^{(s)}_a, \tag{14a}$$

$$\eta^{(s)}_a = \delta\pi^{(s)}_a = \{\pi^{(s)}_a, G\} = -\delta G/\delta\pi^a_{(s)}. \tag{14b}$$

将(14)式代入(10),(11)和(12)式,由于 $\varepsilon_j(x)$ 的任意性,得

$$\{G^j_k, \Phi^0_a\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\Phi^0_a), \tag{15}$$

$$(\partial/\partial\varphi^a_{(s)})[G^j_{k-1} + \{G^j_k, H_T\}] = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a), \tag{16}$$

$$(\partial/\partial\pi^{(s)}_a)[G^j_{k-1} + \{G^j_k, H_T\}] = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a). \tag{17}$$

因为变更后的正则变量仍在约束超曲面上,对次级约束 Ψ_n 亦应有$\{G^j_k, \Psi_n\} \approx 0$.这样,如果 G^j_k 取为约束,那么 G^j_k 必为第一类约束,又因系统仅含第一类约束,(16)和(17)式中的 H_T 可用H^c 来代替.由此得如下的递推关系[9]:

$$G^j_m = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a), \tag{18}$$

$$G^j_{k-1} + \{G^j_k, H^c\} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^0_a), \tag{19}$$

$$\{G_0^j, H^c\} = 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Phi_a^0). \tag{20}$$

从(19)式可知，G_{k-1}^j 可由 G_k^j 导出，从每一个初级约束 G_m^j 出发，由(19)式可逐次求出 G_{m-1}^j，直至 G_0^j 适合(20)式为止.这样求出 G_k^j 后，代入(13)式就构造出了规范变换的生成元.

当系统同时含第一类约束和第二类约束时，只要由初级第一类约束导出的次级第一类约束系列与第二类约束是完全分开的，上述构造规范生成元的方法对这类系统仍适用.这里的讨论假定了不存在约束线性化问题[10]以及拉氏乘子不进入 Poisson 括号的情形[11].

3 正则形式的 Ward 恒等式

在约束 Hamilton 系统的路径积分量子化中，对含第一类约束的系统，必须选取适当的规范条件，以限制理论中的规范自由度，规范条件必须为系统动力学演化所保持，高阶微商奇异系统 Green 函数的生成泛函可写为[8]

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^a \mathscr{D}\pi_a^{(s)} \delta(\Phi_l) \sqrt{\det|\{\Phi_l, \Phi_m\}|} \exp\left\{ i\int d^4x (\mathscr{L}^{\mathrm{p}} + J_a^{(s)}\varphi_{(s)}^a + K_{(s)}^a \pi_a^{(s)}) \right\}, \tag{21}$$

其中 $J_a^{(s)}$ 和 $K_{(s)}^a$ 分别为 $\varphi_{(s)}^a$ 和 $\pi_a^{(s)}$ 的外源.对第二类约束系统，$\{\Phi_l\}$ 代表所有第二类约束；对第一类约束系统，$\{\Phi_l\}$ 代表所有第一类约束和规范条件的总体，

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}} = \pi_a^{(s)}\varphi_{(s+1)}^a - \mathscr{H}^c. \tag{22}$$

根据 Grassmann 变量 $C(x)$ 和 $\bar{C}(x)$ 的积分性质，有

$$\det|\{\Phi_l(x), \Phi_m(y)\}| = \int \mathscr{D}C_m(y)\mathscr{D}\bar{C}_l(x) \exp\left[i\int d^4x d^4y\ \bar{C}_l(x)\{\Phi_l(x), \Phi_m(y)\} C_m(y) \right], \tag{23}$$

利用 δ 函数的性质和(23)式，可将(21)式写为

$$Z[J,K] = \int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^a \mathscr{D}\pi_a^{(s)} \mathscr{D}\lambda \mathscr{D}C \mathscr{D}\bar{C} \exp\left\{ i\int d^4x (\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} + J_a^{(s)}\varphi_{(s)}^a + K_{(s)}^a \pi_a^{(s)}) \right\}, \tag{24}$$

其中

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}} = \mathscr{L}^{\mathrm{p}} + \mathscr{L}_{\mathrm{f}} + \mathscr{L}_{\mathrm{gh}}, \tag{25}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{f}} = \lambda_l \Phi_l, \qquad \mathscr{L}_{\mathrm{gh}} = \frac{1}{2}\int d^4y\, \bar{C}_l(x)\{\Phi_l(x), \Phi_m(y)\} C_m(y).$$

考虑生成泛函(24)式在增广相空间中无限李群 $G_{\infty r}$ 下的性质，其无穷小变换为

$$\begin{cases} x^{\mu'} = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + R_\sigma^\mu \varepsilon^\sigma(x), \\ \varphi_{(s)}^{a'}(x') = \varphi_{(s)}^a(x) + \Delta\varphi_{(s)}^a(x) = \varphi_{(s)}^a(x) + S_{(s)\sigma}^a \varepsilon^\sigma(x), \\ \pi_a^{(s)'}(x') = \pi_a^{(s)}(x) + \Delta\pi_a^{(s)}(x) = \pi_a^{(s)}(x) + T_{a\sigma}^{(s)} \varepsilon^\sigma(x), \end{cases} \tag{26}$$

其中 $\varepsilon^\sigma(x)(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 为无穷小任意函数，它们及其微商在四维时空区域的边界上为零，而

$$R_\sigma^\mu = A_\sigma^{\mu\nu(k)}\partial_{\nu(k)},\ S_{(s)\sigma}^\alpha = B_\sigma^{\alpha\nu(l)}\partial_{\nu(l)},\ T_{\alpha\sigma}^{(s)} = C_{\alpha\sigma}^{(s)\nu(m)}\partial_{\nu(m)},$$

$$\nu(n) = \underbrace{\nu\lambda\cdots\rho\sigma}_{n}\quad,\qquad \partial_{\nu(n)} = \partial_\nu\partial_\lambda\cdots\partial_\rho\partial_\sigma, \tag{27}$$

系数 A, B, C 等均为 x，$\varphi_{(s)}^\alpha$ 和 $\pi_\alpha^{(s)}$ 的函数，在(26)式变换下，有[1]

$$\Delta I_{\text{eff}}^{\text{p}} = \int \mathrm{d}^4 x\left\{\frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\varphi_{(s)}^\alpha}\delta\varphi_{(s)}^\alpha + \frac{\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}}{\delta\pi_\alpha^{(s)}}\delta\pi_\alpha^{(s)} + \partial_\mu\left[\left(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^\alpha - \mathscr{H}^{\text{c}}\right)\Delta x^\mu\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\pi_\alpha^{(s)}\delta\varphi_{(s)}^\alpha\right)\right\}, \tag{28}$$

其中

$$\delta\varphi_{(s)}^\alpha = \Delta\varphi_{(s)}^\alpha - \varphi_{(s),\mu}^\alpha\Delta x^\mu,\ \delta\pi_\alpha^{(s)} = \Delta\pi_\alpha^{(s)} - \pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\Delta x^\mu, \tag{29}$$

$$\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha = -\dot{\pi}_\alpha^{(s)} - \delta H_{\text{eff}}^{\text{c}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha,\ \delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)} = \dot{\varphi}_{(s)}^\alpha - \delta H_{\text{eff}}^{\text{c}}/\delta\pi_\alpha^{(s)}, \tag{30}$$

$H_{\text{eff}}^{\text{c}}$ 为 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{\text{p}}$ 相应的正则 Hamilton 量.设变换(26)式的 Jacobi 行列式为 $J[\varphi,\pi,\varepsilon]$，在(26)式变换下，生成泛函(24)式是不变的，表明 $\delta Z/\delta\varepsilon^\sigma|_\sigma = 0$，由(24)和(28)式得正则形式的 Ward 恒等式

$$\begin{aligned}\Big[J_\sigma^0 &+ \widetilde{S}_{(s)\sigma}^{\alpha}(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha) - \widetilde{R}_\sigma^\mu(\varphi_{(s),\mu}^\alpha\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha) + \widetilde{S}_{(s)\sigma}^{\alpha}J_\alpha^{(s)} - \widetilde{R}_\sigma^\mu(\varphi_{(s),\mu}^\alpha J_\alpha^{(s)})\\ &+ \widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)}) - \widetilde{R}_\sigma^\mu(\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)})\\ &+ \widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}K_{(s)}^\alpha - \widetilde{R}_\sigma^\mu(\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}K_{(s)}^\alpha)\Big]_{\substack{\varphi_{(s)}^\alpha\to\frac{1}{\mathrm{i}}\delta/\delta J_\alpha^{(s)}\\ \pi_\alpha^{(s)}\to\frac{1}{\mathrm{i}}\delta/\delta K_{(s)}^\alpha}} Z[J,K] = 0,\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $J_\sigma^0 = \delta J[\varphi,\pi,\varepsilon]/\delta\varepsilon^\sigma|_{\varepsilon^\sigma=0}$，$\widetilde{R}_\sigma^\mu$，$\widetilde{S}_{(s)\sigma}^\alpha$ 和 $\widetilde{T}_{\alpha\sigma}^{(s)}$ 分别为 R_σ^μ，$S_{(s)\sigma}^\alpha$ 和 $T_{\alpha\sigma}^{(s)}$ 的伴随算符[12].在得到(31)式时，我们用了关系式 $J[\varphi,\pi,0] = 1$.将(31)式对外源求多次泛函微商，然后让外源为零，可进一步得到多种形式的正则形式的 Ward 恒等式.

例如，考虑相空间中的无穷小平移变换

$$\begin{cases}\varphi_{(s)}^{\alpha'}(x) = \varphi_{(s)}^\alpha(x) + \varepsilon_{(s)1}^\alpha(x),\\ \pi_\alpha^{(s)'}(x) = \pi_\alpha^{(s)}(x) + \varepsilon_{\alpha 2}^{(s)}(x),\end{cases} \tag{32}$$

此变换的 Jacobi 行列式为 1. 在(32)式变换下，生成泛函(24)式是不变的，从而分别有

$$\int\mathscr{D}\varphi_{(s)}^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha^{(s)}(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha + J_\alpha^{(s)})\exp\{\mathrm{i}I_{\text{eff}}^{\text{p}} + \mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha^{(s)}\varphi_{(s)}^\alpha + K_{(s)}^\alpha\pi_\alpha^{(s)})\} = 0, \tag{33a}$$

$$\int\mathscr{D}\varphi_{(s)}^\alpha\mathscr{D}\pi_\alpha^{(s)}(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)} + K_{(s)}^\alpha)\exp\{\mathrm{i}I_{\text{eff}}^{\text{p}} + \mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(J_\alpha^{(s)}\varphi_{(s)}^\alpha + K_{(s)}^\alpha\pi_\alpha^{(s)})\} = 0. \tag{33b}$$

让 $J_\alpha^{(s)} = K_{(s)}^\alpha = 0$，由(33)式得

$$\langle 0|\mathrm{T}^*(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha)|0\rangle = 0,\quad \langle 0|T^*(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\pi_\alpha^{(s)})|0\rangle = 0, \tag{34}$$

其中 T^* 为一种特殊的编时乘积[4].对(33a)式关于 $J_\alpha^{(s)}$ 求 n 次泛函微商，然后让 $t_1, t_2, \cdots, t_m\to\infty, t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n\to-\infty$，得

$$\langle\text{out}, m|(\delta I_{\text{eff}}^{\text{p}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha)|n-m, \text{in}\rangle = 0. \tag{35}$$

由于 m 和 n 是任意的,由(35)式得

$$\pi_\alpha^{(s)}(x) = -\delta H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}/\delta\varphi_{(s)}^\alpha(x). \tag{36a}$$

类似地,由(33b)式可得

$$\varphi_{(s)}^\alpha(x) = \delta H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}/\delta\pi_{(s)}^\alpha(x). \tag{36b}$$

(36)式为约束 Hamilton 系统的量子正则方程.

在约束 Hamilton 的经典理论中,Dirac 曾猜想所有第一类约束均是规范变换的生成元.长期以来对这猜想的有效性,一直存在着争议[12],高阶微商理论也有类似的问题[13].如果 Dirac 猜想成立,系统的经典正则方程应该由扩展 Hamilton 量 H_{E} 导出,H_{E} 中包含了所有第一类(初级和次级)约束.而在约束 Hamilton 的量子理论中,其正则方程应由(36)式给出,$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{c}}$ 中不仅包含了所有约束(可以是第二类约束),而且还包含了规范条件,这与经典理论是完全不同的.在量子理论中,基本的是生成泛函,而不是经典运动方程.

4 Chern-Simons 理论的广义等价形式

考虑有质量矢量场和标量场的二阶微商拉氏量密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - c^2\partial_\lambda F^{\alpha\lambda}\partial_\rho F_\alpha^\rho + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - mB_\mu)(\partial^\mu\varphi - mB^\mu), \tag{37a}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{37b}$$

其中 c 和 m 均为常数.这个拉氏量是 Chern-Simons 等价理论的推广形式.在超导理论中,电磁规范不变性的自发破缺,有质量光子规范不变的拉氏量可以通过 Chern-Simons 项来得到[14].该拉氏量等价于(37a)式中 $c=0$ 的情形[15].

由(2)和(37)式导出的 Euler-Lagrange 方程为

$$(1-2c^2\Box)\Box B_\mu - \partial_\mu[(1-2c^2\Box)\partial^\nu B_\nu] - m^2B_\mu + m\partial_\mu\varphi = 0. \tag{38}$$

场 $\varphi(x)$, $B^\mu(x) = B_{(0)}^\mu(x)$ 和 $\dot{B}^\mu(x) = B_{(1)}^\mu(x)$ 的正则动量分别为

$$\pi(x) = \partial\mathscr{L}/\partial\varphi(x) = -mB^0(x) + \varphi(x), \tag{39}$$

$$\pi_\mu = -F_{0\mu} - 2c^2(\partial_k\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta_\mu^k - \partial_0\partial_\lambda F_\mu^\lambda), \tag{40}$$

$$\pi_\mu^{(1)} = 2c^2(\partial_\lambda F^{0\lambda}\delta_\mu^0 - \partial_\lambda F_\mu^\lambda). \tag{41}$$

正则 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}^{\mathrm{c}} = \int \mathrm{d}^3x[&\pi_\mu B_{(1)}^\mu - \frac{1}{4c^2}(\pi_i^{(1)})^2 + \pi_i\partial_k F^{ik} + \pi_i^{(1)}\partial^i B_{(1)}^0 \\ &+ \frac{1}{2}(B_{(1)i} - \partial_i B_0)(B_{(1)}^i - \partial^i B_0) - c^2(\partial_i B_{(1)}^i - \partial_i\partial^i B_0)(\partial_k B_{(1)}^k - \partial_k\partial^k B_0) \\ &+ \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{1}{2}m^2B_iB^i + \frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi - mB_i\partial^i\varphi - (\partial^i\pi_i + m\pi)B^0]. \end{aligned} \tag{42}$$

初级约束为

$$\Phi^0 = \pi_0^{(1)} \approx 0. \tag{43}$$

由约束的自洽性条件,有下列次级约束:

$$\Phi^1 = \{\Phi^0, H_T\} = \partial^i\pi_i^{(1)} - \pi_0 \approx 0, \tag{44}$$

$$\Phi^2 = \{\Phi^1, H_T\} = \partial^i \pi_i + m\pi \approx 0. \tag{45}$$

所有约束 $\Phi^k(k = 0,1,2)$ 均为第一类约束.由它们构成的规范变换生成元为

$$G = \int d^3x[\pi_\mu \partial^\mu \varepsilon(x) + m\pi\varepsilon(x) + \pi_\mu^{(1)}\partial_0\partial^\mu\varepsilon(x)]. \tag{46}$$

由 G 导致的规范变换为

$$\begin{cases} \delta B^\mu = \{B^\mu, G\} = \partial^\mu\varepsilon(x), \delta B^\mu_{(1)} = \partial_0\partial^\mu\varepsilon(x), \delta\varphi = m\varepsilon(x), \\ \delta\pi = \delta\pi_\mu = \delta\pi_\mu^{(1)} = 0. \end{cases} \tag{47}$$

在这个规范变换下,系统的拉氏量是不变的.

采用路径积分量子化.对第一类约束须选取相应的规范条件.由方程(38)的零分量,有

$$B_0 = ((1 - 2c^2\Box)\nabla^2 + m^2)^{-1}\partial_0[(1 - 2c^2\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B} - m\varphi]. \tag{48}$$

取广义 Coulomb 规范条件

$$(1 - 2c^2\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B} - m\varphi = 0. \tag{49}$$

条件(49)式随时间的稳定性,相应于 $B_0(x) = 0$,对 $B_0(x)$ 的稳定性要求,有 $\dot{B}_0(x) = 0$. 这样就有如下三个规范条件:

$$\Omega_1 = B^0_{(1)} \approx 0, \tag{50}$$

$$\Omega_2 = (1 - 2c^2\Box)\nabla\cdot\boldsymbol{B} - m\varphi \approx 0, \tag{51}$$

$$\Omega_3 = B^0 \approx 0. \tag{52}$$

全部约束和规范条件一起记为 $\Phi = \{\Phi_l\} = \{\Phi^k(k = 0,1,2), \Omega_i(i = 1,2,3)\}$, 它们成为了第二类约束,且有如下 Poisson 括号:

$$\{\Omega_1(x), \Phi^1(y)\} = \delta^{(3)}(x - y), \tag{53}$$

$$\{\Omega_2(x), \Phi^2(y)\} = [(1 - 2c^2\nabla^2)\nabla^2 - m]\delta^{(3)}(x - y), \tag{54}$$

$$\{\Omega_3(x), \Phi^0(y)\} = \delta^{(3)}(x - y). \tag{55}$$

由此可见, $\det|\{\Phi_l, \Phi_m\}|$ 与场量无关.这个行列式可以从生成泛函(21)式中略去.

由奇异拉氏量(37)式描述的系统,其 Green 函数的生成泛函为

$$Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = \int \mathscr{D}B^\mu \mathscr{D}B^\mu_{(1)} \mathscr{D}\pi \mathscr{D}\pi_\mu \mathscr{D}\pi_\mu^{(1)} \mathscr{D}\varphi \mathscr{D}\lambda_k \mathscr{D}\mu^m \exp\{i\int d^4x(\mathscr{L}^p_{\mathrm{eff}} + J_\mu B^\mu + J\varphi + \xi^k\lambda_k + \xi_m\mu^m)\}, \tag{56}$$

这里我们仅对场量(包括乘子场) $B^\mu, \varphi, \lambda_k$ 和 μ^m 引入了外源 J_μ, J, ξ^k 和 ξ_m,而

$$\mathscr{L}^p_{\mathrm{eff}} = \pi_\mu \dot{B}^\mu + \pi_\mu^{(1)}\dot{B}^\mu_{(1)} + \pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}^c + \lambda_k\Phi^k + \mu^m\Omega_m. \tag{57}$$

系统的正则作用量和生成泛函(56)式在(47)式变换下是不变的,变换(47)式的 Jacobi 行列式为 1.此时正则形式的 Ward 恒等式(31)成为

$$\left[-\partial_0\frac{\delta}{\delta\xi_1} + [\nabla^2(1 - 2c^2\Box) - m^2]\frac{\delta}{\delta\xi_2} - \partial_0\frac{\delta}{\delta\xi_3} - \partial^\mu J_\mu + mJ\right]Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = 0. \tag{58}$$

令 $Z[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] = \exp\{iW[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m]\}$,并由泛函 Legendre 变换引入正规顶角的生成泛函

$$\Gamma[B^\mu, \varphi, \lambda, \mu] = W[J_\mu, J, \xi^k, \xi_m] - \int d^4x (J_\mu B^\mu + J\varphi + \xi^k \lambda_k + \xi_m \mu^m), \tag{59}$$

$$\delta W / \delta J_\mu(x) = B^\mu(x), \quad \delta\Gamma / \delta B^\mu(x) = -J_\mu(x), \tag{60a}$$

$$\delta W / \delta J(x) = \varphi(x), \quad \delta\Gamma / \delta\varphi(x) = -J(x), \tag{60b}$$

$$\delta W / \delta\xi^k(x) = \lambda_k(x), \quad \delta\Gamma / \delta\lambda_k(x) = -\xi^k(x), \tag{60c}$$

$$\delta W / \delta\xi_m(x) = \mu^m(x), \quad \delta\Gamma / \delta\mu^m(x) = -\xi_m(x). \tag{60d}$$

由此 Ward 恒等式(58)化为

$$\partial_0\mu_1(x) - \nabla^2(1 - 2c^2\Box - m^2)\mu_2 + \partial_0\mu_3(x) + \partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu(x)} - m\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(x)} = 0. \tag{61}$$

将(61)式分别对 $\varphi(x_2)$ 或 $B^\nu(x_2)$ 求泛函微商,然后让所有场(包括乘子场)为零, $B_\mu = \varphi = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, 分别得

$$\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} = \frac{1}{m}\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta B^\mu(x_1)\delta\varphi(x_2)}, \tag{62}$$

$$\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)} = m\frac{\delta^2\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)}. \tag{63}$$

(62)和(63)式分别给出了 $\varphi(x)$ 场和 $B^\mu(x)$ 场传播子所适合的关系式.

将(61)式分别关于 $B^\nu(x_2)$ 和 $\varphi(x_3)$ 求泛函微商,然后让所有场为零,得

$$\partial^\mu_{x_1}\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta B^\mu(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)} = m\frac{\delta^3\Gamma[0]}{\delta\varphi(x_1)\delta B^\nu(x_2)\delta\varphi(x_3)}. \tag{64}$$

上式给出了场的三点正规顶角应适合的关系式.将(61)式对场多次求泛函数商,可得到正规角间更多的关系.

由正则形式 Ward 恒等式导出正规顶角间的关系,其突出优点在于:对相空间中生成泛函可以不事先作出对动量的路径积分.

当 $\det|\{\Phi_l, \Phi_m\}|$ 与场量有关时,这时只需寻找保持 $\mathscr{L}^\mathrm{P} + \mathscr{L}_\mathrm{gh}$ 不变的定域或非定域变换[16],在该变换下由正则 Ward 恒等式,仍可导致正规顶角所适合的关系.进一步的应用将在另文中讨论.

[1] 李子平,中国科学(A辑),(9)(1992),977.
[2] Y-G. Maio, S-M. Li and Y-Y. Liu, *J. Phys.*, **G19**(1993), L33.
[3] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.*, **20**(1948), 267; *Phys. Rev.*, **80**(1950), 440.
[4] H. Suura and B-L. Young, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 4353.
[5] T. Lhallabi, *Int. J. Theor. Phys.*, **28**(1989), 875.
[6] T. D. Lee and C. N. Young, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 885.
[7] 阮图南、范洪义、王明中,规范场及其他物理问题讨论会文集,李华钟、谷超豪和周光召主编(上海科学技术出版社,上海,1984).
[8] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, Quantization of Fields with Constraints(Springer-Verlag, Berlin, 1990).
[9] Z-P Li, *J. Phys.*, **A24**(1991), 4261.
[10] L. Castellani, *Ann. Phys.* (NY), **143**(1983), 357.
[11] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Nucl. Phys.*, **B332**(1990), 169.
[12] Z-P. Li, *Int. J. Theor. Phys.*, **32**(1993), 201.

[13] Z-P. Li, *Europhys. Lett.*, **21**(1993), 141.
[14] D. Sénéchal, *Phys. Lett.*, **B297**(1992), 138.
[15] N. Dorey and N. E. Mavromatos, *Phys. Lett.*, **B250**(1990), 107.
[16] 邝宇平、易余萍,高能物理与核物理,**4**(1980),286.

QUANTAL CANONICAL SYMMETRY FOR A SYSTEM WITH SINGULAR HIGHER-ORDER LAGRANGIAN IN FIELD THEORIES

LI ZI-PING
(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)
(Received 25 July 1994)

ABSTRACT

An algorithm to construct the generator of gauge transformation for a system with singular higher-order Lagranian in field theories is given. Starting from generating functional of Green function in phase space, the Ward identities in canonical formalism for the constrained Hamiltonian system are deduced. It is pointed out that the quantal canonical equation for such a system deffers from the classical canonical equation, arising from the fact that Dirac conjecture is valid. The quantization for a generalized dynamical system which can be equivalent to Chern-Simons theory is given. With preliminary application of canonical Ward identities to such a system, some relationships among the vertices and propagators for the fields can be deduced without carrying out the integration for canonical momenta in phase space path integral.

PACC: 1110; 1130