

双原子耦合摆阵中孤子的 振幅回归现象^{*}

俞 军¹⁾ 林 机²⁾ 张家琨¹⁾

1)(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

2)(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

楼森岳

(复旦大学李政道物理学综合实验室, 物理系, 上海 200433; 宁波师范学院物理系, 宁波 315211)

(1995 年 8 月 29 日收到)

利用带阻尼参数激励的一维双原子非线性耦合摆阵, 实验上观察到局域孤子的摆幅随激励参数的变化, 而呈现稳定的、准周期的、周期的或随机的现象, 并在理论上用一个五次非线性 Schrödinger 方程来解释.

PACC: 0690; 0320; 0230; 0340K

1 引 言

自 Denardo 等^[1]用一维匀质非线性耦合摆阵观察到了非传播的自局域结构(扭结和畴壁)后, 在宏观离散的力学模型中发现孤子的现象已有一些报道^[2,3]. 最近, 我们在一维垂直激励的双原子格点体系中观察到了丰富的自局域结构——声学支与光学支截止孤子和扭结, 并对其中的光学支底截止孤子(也称交错模)进行了讨论^[4]. 同时, 实验还发现, 一维摆链上形成的自局域结构其格点的振幅显示出某种变化, 我们称其为振幅回归现象. 这一实验现象在文献中尚未见报道. 本文就一维双原子格点体系中同相孤子的振幅回归现象的最近研究结果进行报道.

2 实验及主要结果

实验装置参见文献[4]. 用 50 个双原子格点做成一维非线性耦合摆, 如图 1. 相邻格点的耦合通过摆线交叉处的固定结, 摆只能沿垂直于阵列方向运动. 每一自由摆的固有角频率 $\omega_0 \approx 10.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 固有频率 $f_0 \approx 1.7 \text{ Hz}$. 振动台是一低频喇叭, 垂直激励的驱动频率 $2f_c$ 及振幅 A_c 是可调的, 驱动波形选正弦波.

实验结果采用电视摄像, 慢放读数记录. 由于孤子的稳定性好, 且摆幅变化明显, 这种直观而简便的观察记录方法是行之有效的.

^{*} 国家自然科学基金及浙江省自然科学基金资助的课题.

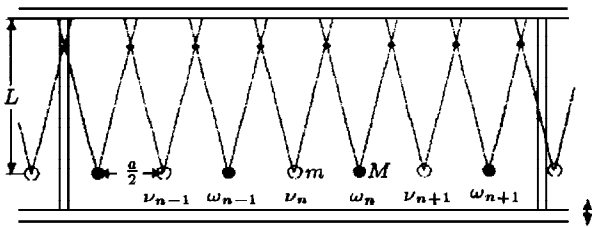


图 1 一维双原子耦合摆阵几何参数 $L = 85\text{ mm}$; $a = 50\text{ mm}$;
 $m = 4.04\text{ g}$; $M = 8.06\text{ g}$

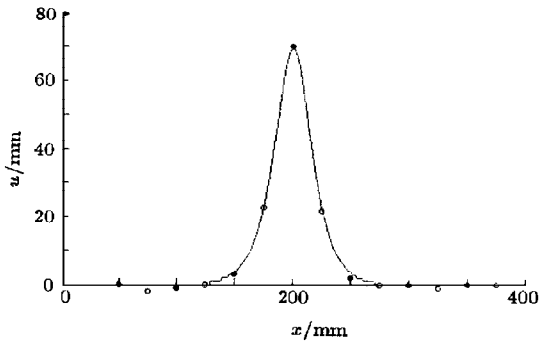


图 2 稳定态孤子摆幅包络的最佳双曲正割拟合曲线 $A_e = 5.0$
 $—5.1\text{ mm}$; 实心圆点为重原子; 空心圆点为轻原子

幅回归周期按 28, 27, 27, 27 规律变化; 随机状态不仅中间重格点的振幅回归周期变化不定, 且各格点的振幅回归周期也不一样, 但实验表明它仍是一稳定的局域状态。

表 1 实验测量结果

A_e/mm	摆幅变化状态	振幅回归周期/次	中间重格点振幅/mm
5.0—5.1	稳 定	—	70
5.3	准 周 期	28, 27, 27, 27	61—77
5.4	周 期	27	61—77
5.5	周 期	31	60—78
5.7	随 机	不规则	65—70

图 3 给出同相孤子的三维空时图, 其中 (a) 为稳定状态, (b) 为准周期状态, (c) 为周期状态, (d) 为随机状态 (以中间重格点为主描出)。图 4 给出周期状态和随机状态的 5 个主要格点的振幅随时间的变化曲线, 其中每一格点都有一条基线, 竖线高度表示振幅的大小, 图 4(a) 为周期状态, (b) 为随机状态。

我们还对中间重格点的振动周期进行了测定。结果显示: 不论孤子处于何种状态, 其振动周期变化甚微, 约为 $0.592—0.595\text{ s}$, 略大于未耦合时自由单摆的振动周期 ($T_0 \approx 0.588$

实验的主要结果:

当驱动频率 $2f_e$ 选 3.40 Hz (约两倍于自由频率 f_0), 驱动振幅 A_e 在 $4.3—7.0\text{ mm}$ 时, 摆链上均可形成局域的同相孤子, 此即声学支底截止孤子, 它以某一重原子为中心。

当 $A_e = 4.5—5.1\text{ mm}$ 时, 孤子的摆幅包络非常稳定。图 2 给出 $A_e = 5.0—5.1\text{ mm}$ 时, 孤子的摆幅包络的最佳双曲正割拟合曲线。 u 表示格点的最大水平位移, x 表示格点位置, 拟合关系为: $u(x) = 69.5 \operatorname{sech} 0.071(x - 200)\text{ mm}$ 。

当驱动振幅 A_e 增大到 5.3 mm 时, 孤子的摆幅明显变化, 出现分岔现象。我们用振幅回归周期表示格点的振幅经一次变化后回复到原值时摆的全振动次数。表 1 中列出对几个典型状态的实验测量值。表 1 中的准周期状态, 其振

s). 这说明孤子仅在空间摆幅上呈现有序和无序的变化. 显然, 也正由于摆的振动周期基本不变, 所以才得以保证各格点在振幅变化时基本同步.

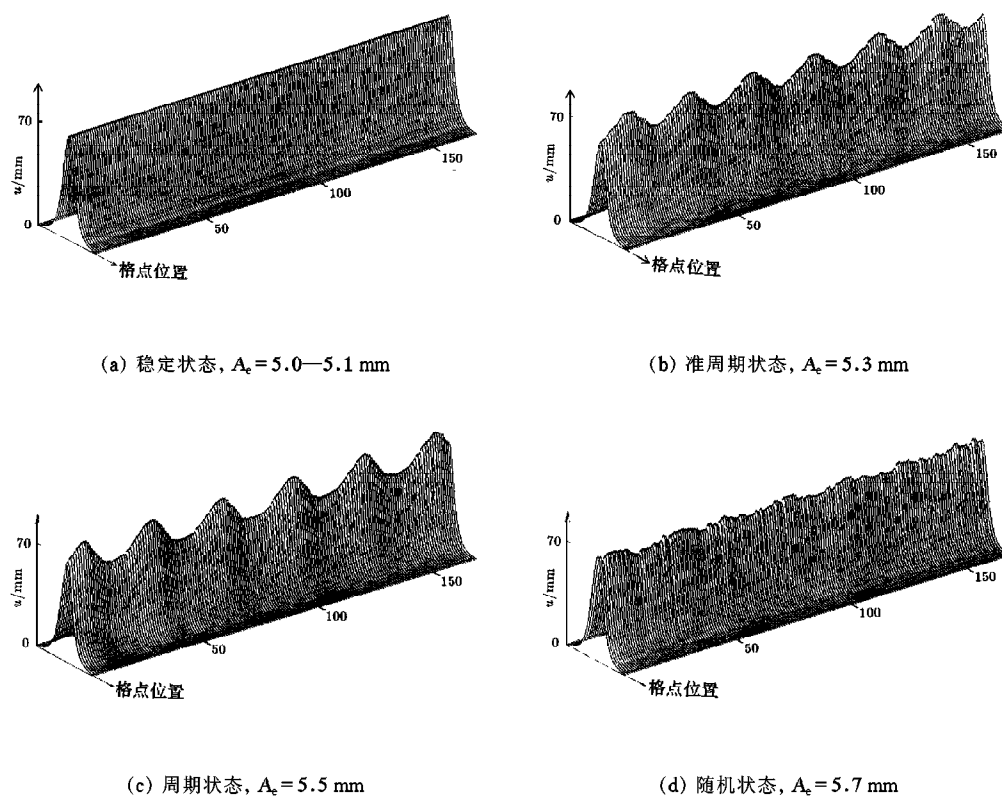


图3 同相孤子的三维空时图

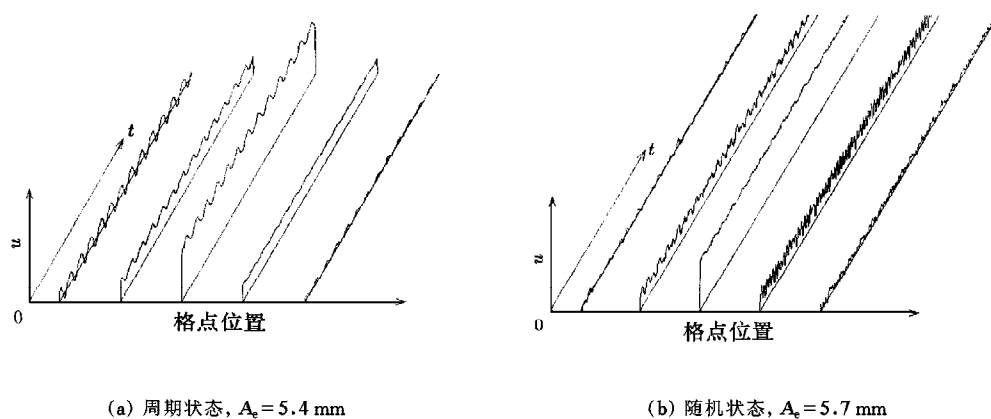


图4 周期状态和随机状态的主要格点的振幅随时间的变化曲线

3 理论分析

对上述双原子格点体系,采用多重尺度法近似,可以导出格点摆幅包络所满足的方程.如图 1 所示, m 和 M 分别为轻原子和重原子的质量, a 为相邻轻原子(或重原子)的间距.设 v_n 与 w_n 分别为第 n 个轻原子和重原子的水平位移,考虑最近邻的相互作用,第 n 个格点的运动方程为

$$m\ddot{v}_n - K_2(w_n + w_{n-1} - 2v_n) - K_4[(w_n - v_n)^3 + (w_{n-1} - v_n)^3] + \beta_1 \dot{v}_n + m[\omega_0^2 + \frac{\eta}{2}\cos(2\omega_e t)]v_n - \alpha m v_n^3 + \gamma m v_n^5 = 0, \quad (1)$$

$$M\ddot{w}_n - K_2(v_n + v_{n+1} - 2w_n) - K_4[(v_n - w_n)^3 + (v_{n+1} - w_n)^3] + \beta_2 \dot{w}_n + M[\omega_0^2 + \frac{\eta}{2}\cos(2\omega_e t)]w_n - \alpha M w_n^3 + \gamma M w_n^5 = 0, \quad (2)$$

式中 $\eta = \frac{4}{L}\omega_e^2 A_e$ ($2\omega_e$ 为驱动角频率), β_1, β_2 为阻尼参数, α 和 γ 均为势参数.

在我们的实验条件下,可作如下的数量级估计:

$$v, w \sim O(\epsilon), \quad (3)$$

$$\eta \sim O(\epsilon^2), \quad (4)$$

$$\beta \sim O(\epsilon^2), \quad (5)$$

$$\omega_0^2 - \omega_e^2 \sim O(\epsilon^2), \quad (6)$$

并设

$$v_n = [F(x_n, t)e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}] + [-\frac{a}{2}\frac{\partial F}{\partial x_n}e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}] + O(\epsilon^3), \quad (7)$$

$$w_n = [F(x_n, t)e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.}] + 0 + O(\epsilon^3). \quad (8)$$

(7)和(8)式中第一个方括号为二阶小量, (7)式中第二个方括号与(8)式中 0 为三阶小量.

经过冗长的演算,当取三阶小量,且仍保留五阶小量 $|F|^4 F$ 项,则摆幅包络 $F_n(x_n, t)$ 满足一个五次的非线性 Schrödinger (NLS) 方程

$$2i\omega_0 \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{a^2 I_2 J_2}{2(I_2 + J_2)} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 3\alpha |F|^2 F + i\omega_0 \frac{I_2 R_2 + J_2 R_1}{I_2 + J_2} F - \frac{\eta}{2} F^* + |\alpha\gamma| |F|^4 F = 0, \quad (9)$$

式中 $I_2 = \frac{K_2}{m}$, $J_2 = \frac{K_2}{M}$, $R_1 = \frac{\beta_1}{m}$, $R_2 = \frac{\beta_2}{M}$, 且 $\alpha, \gamma > 0$. 若略去五次非线性项,可得一孤子解,而五次项的存在则可解释振幅回归现象.

4 小结与讨论

利用宏观的力学模型——非线性耦合摆阵,在实验上观察到双原子点阵中孤子的摆幅随驱动振幅的变化,而出现稳定的准周期的、周期的或随机的现象.在理论上采用多重尺度

展开法, 用一个五次的非线性 Schrödinger 方程来解释实验结果.

虽然我们的实验装置非常简单, 但实验结果却很有意义. 主要体现在: 1. 孤子的振幅回归现象类似于 Fermi-Pasta-Ulam(FPU)循环, 能在实验上宏观地观察到这类 FPU 现象, 是一较大的突破; 2. Deissler 和 Brand^[5]首次证明了在五次复 Ginzburg-Landau 方程中存在着稳定的、周期的、准周期的甚至是混沌的局域解, 但迄今有关这些局域解的实验观察还未见报道. 本文在这方面作了有益的尝试. 至于我们观察到的随机状态, 究竟是决定论的混沌状态还是准周期的有序状态, 或者是完全随机的噪声状态, 还需通过动力学特征来判断. 如进行 Liapunov 指数或分维的计算, 这有待于进一步的研究.

- [1] B. Denardo, B. Galvin, A. Greenfield, A. Larraza, S. Putterman and W. Wright, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 1730.
- [2] 陈伟中, 物理学报, **42**(1993), 1567.
- [3] W. Z. Chen, *Phys. Rev.*, **B49**(1994), 15063.
- [4] S. Y. Lou, J. Yu, J. Lin and G. X. Huang, *Chin. Phys. Lett.*, **12**(1995), 400.
- [5] R. J. Deissler and H. R. Brand, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 478.

STUDY ON THE AMPLITUDE REGRESSION PHENOMENA OF SOLITON IN DIATOMIC COUPLED PENDULUM LATTICE

YU JUN^{a)} LIN JI^{b)} ZHANG JIA-KUN^{a)}

a) (Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing 312000)

b) (Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004)

LOU SEN-YUE

(T. D. Lee Physics Laboratory, Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433;

Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo 315211)

(Received 29 August 1995)

ABSTRACT

Using a one-dimensional damped and parametrically driven diatomic nonlinear coupled pendulum lattice, we find for the first time in the macro-experiment that the amplitude of localized soliton is stable, quasiperiodic, periodic or random depending on the driven parameter. Theoretically, these experimental results can be explained by the solution of a quintic nonlinear Schrödinger equation.

PACC: 0690; 0320; 0230; 0340K