

# 频域干涉及调制光谱的可能性\*

徐 斌 郭光灿<sup>†</sup>

(中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

(1995 年 7 月 12 日收到; 1995 年 9 月 25 日收到修改稿)

研究光场频域干涉和谱相关引起的光谱密度变化, 探讨通过对光谱调制来构造光谱的可能性. 给出一个压窄谱宽的例子并进行了数值计算, 发现频域干涉的方法能够在谱宽变窄的同时利用较多的光能量, 其可利用的光能量的比例比滤波片要大得多.

PACC: 4210

## 1 引 言

1957 年 Alford 和 Gold 设计了一个巧妙的实验来测光速<sup>[1]</sup>, 利用的原理是两束有相对延迟的光叠加后谱密度随频率周期性变化, 最小值可能为零. 随后, 谱密度的周期性变化引起了广泛的兴趣, 并和光场相干性联系在一起<sup>[2-4]</sup>. Mandel 和 Wolf<sup>[5]</sup>把这种由两束光叠加引起的谱密度的周期性变化称为空间-频域相干, 以有别于普通的空间-时域相干, 并定义了复光谱相干度. 他们认为这种空间-频域相干是比通常的空间-时域相干更基本的关系, 因为由前者可以导出后者而由后者却导不出前者. 1993 年 Heiniger 等<sup>[6]</sup>把一束白光通过 Twyman-Green 干涉仪以后用两个三棱镜作色散元件直接观察到了频域干涉. 1992 年 Zou 等<sup>[7]</sup>使用参量下转换光观察到了频域相干, 与以往不同的是这次实验中的光场是非经典的, 但更突出的是这次实验明确提出了是在光程差远远大于相干长度时观察到了频域干涉. 这显然与我们熟知的空间-时域相干的情况不同. 一般来说光场经过频域干涉后光谱都要发生变化, 我们在本文中研究通过控制频域干涉条件来构造所需的光谱线型.

## 2 时域与频域干涉

考虑两束光的叠加

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}_1, t_1) + V(\mathbf{r}_2, t_2), \quad (1)$$

其中  $(\mathbf{r}_i, t_i)$  表示时刻  $t_i$  在  $\mathbf{r}_i$  处发出的光, 于是互强度为

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) &\equiv \langle V^*(\mathbf{r}_i, t) V(\mathbf{r}_j, t + \tau) \rangle \\ &\equiv \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \tau) + \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \tau) \\ &\quad + \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau + \tau_{21}) + \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \tau + \tau_{12}). \end{aligned} \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人.

上式已假定了光场是平稳的,  $\tau_{21} = t_2 - t_1$  是光从  $\mathbf{r}_2$  和  $\mathbf{r}_1$  传播到  $\mathbf{r}$  的时间差. 因为

$$I(\mathbf{r}) \equiv \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0), \quad (3)$$

并且  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) \equiv \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) / [I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2)]^{1/2}$ . (4)

所以, (2) 式中令  $\tau=0$ , 得

$$I(\mathbf{r}) = I^{(1)}(\mathbf{r}) + I^{(2)}(\mathbf{r}) + 2[I^{(1)}(\mathbf{r}) I^{(2)}(\mathbf{r})]^{1/2} \text{Re}[\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_{21})], \quad (5)$$

$$I^{(1)}(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}_1), \quad I^{(2)}(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}_2).$$

应该注意到, 一阶复相干度  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau_{21})$  一般是随  $\tau_{21}$  周期性变化并且振幅递减趋于零的.

(5) 式即为我们熟知的时域干涉公式.

现在对 (2) 式作逆 Fourier 变换,

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) e^{2\pi i \nu \tau} d\tau \\ &= W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu) + W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu) \\ &\quad + W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau_{21}} + W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \nu) e^{2\pi i \nu \tau_{21}}. \end{aligned} \quad (6)$$

当  $i=j$  时,  $W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, \nu)$  代表光束  $V(\mathbf{r}_i, t_i)$  的谱密度. 当  $i \neq j$  时,  $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  称为交叉谱密度. 现定义复光谱相干度为

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \equiv W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) / [W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu) W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2}. \quad (7)$$

不难证明<sup>[5]</sup>

$$0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| \leq 1 \quad (8)$$

(注意:  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  和  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  并非直接的 Fourier 变换关系), 按一般的习惯把  $W(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i, \nu)$  改记为  $\Phi^{(i)}(\nu)$ , 则 (6) 式可改写为

$$\Phi(\nu) \equiv \Phi^{(1)}(\nu) + \Phi^{(2)}(\nu) + 2[\Phi^{(1)}(\nu) \Phi^{(2)}(\nu)]^{1/2} \text{Re}[\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) e^{-2\pi i \nu \tau_{21}}]. \quad (9)$$

(9) 式就是所谓的空间-频域相干关系式, 等号右边第三项为干涉因子, 干涉条纹的可见度正比于  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|$ . 从 (9) 式可以导出 (5) 式而从 (5) 式不能导出 (9) 式, 所以说频域相干比时域相干更基本. 若光束  $V(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $V(\mathbf{r}_2, t_2)$  均是中心频率为  $\nu_0$  的准单色光, 且谱宽  $\Delta\nu \ll \nu_0$ , 则当  $\tau_{21} \ll 1/\Delta\nu$  时, 对 (9) 式作 Fourier 变换并取  $\tau=0$ , 因为  $\tau_{21} \Delta\nu \ll 1$ , 所以 (9) 式等号右边指数中以  $\nu_0 \tau_{21}$  代替  $\nu \tau_{21}$  是一个很好的近似, 于是有

$$I(\mathbf{r}) = I^{(1)}(\mathbf{r}) + I^{(2)}(\mathbf{r}) + 2[I^{(1)}(\mathbf{r}) I^{(2)}(\mathbf{r})]^{1/2} \text{Re}[\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) e^{-2\pi i \nu_0 \tau_{21}}], \quad (10)$$

此为准单色光的干涉公式.

当  $\tau_{21} \gg 1/\Delta\nu$  时,  $\tau_{21} \Delta\nu \gg 1$ , (9) 式等号右边的第三项变换因为积分核中有周期函数且积分区间包含很多个周期, 故积分为零, 于是

$$I(\mathbf{r}) = I^{(1)}(\mathbf{r}) + I^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

即两光束的非相干叠加.

从 (9) 式可以看出, 即使不考虑光谱  $\Phi^{(1)}(\nu)$ ,  $\Phi^{(2)}(\nu)$  在传播中的变化 (由于光源的关联性, 光谱确实会在传播中变化, 甚至在自由空间中也是如此<sup>[8]</sup>),  $\mathbf{r}$  处的光谱也和  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  处的不同. 在干涉相长的地方谱密度变大, 在干涉相消的地方则谱密度变小. 下面我们将讨论如何通过频域干涉来构造所需要的光谱线型.

### 3 构造光谱的可能性

文献[5]证明了  $0 \leq |\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| \leq 1$ . 若光场是交叉光谱纯的, 则  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  与  $\nu$  无关, 且一般  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0)$ ,  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  只与光源空间关联性质有关. 然而交叉光谱只是一种理论假设, 并没有直接的理论依据<sup>[9]</sup>. 一般说, 若  $V(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $V(\mathbf{r}_2, t_2)$  来自不同的光源, 则  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) = 0$  (文献[7]中参量下转换光是一个例外, 但那里的相关性不能在经典范围内理解<sup>[10]</sup>). 若  $V(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $V(\mathbf{r}_2, t_2)$  来自同一的光源, 无论它们是分振幅还是分波前而来, 一般  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \neq 0$ , 但这与  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  不同, 因为若  $\tau$  远大于相干时间, 则  $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = 0$ , 而  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$  可以不为零. 为简单起见, 我们只考虑分振幅情况的  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)$ .

考虑光场  $V(\mathbf{r}, t)$  的 Fourier 谱,

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\mathbf{r}, t) e^{2\pi i \nu t} dt, \quad (12)$$

则对于稳定光场其空间-频率相关函数为

$$\begin{aligned} \langle \nu^*(\mathbf{r}_1, \nu) \nu(\mathbf{r}_2, \nu') \rangle &= \delta_{\nu\nu'} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \\ &= [\Phi^{(1)}(\nu) \Phi^{(2)}(\nu)]^{1/2} \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu) \delta_{\nu\nu'} \end{aligned} \quad (13)$$

由此可见不同频率间的谱相关度为零. 若  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$  则(13)式变为

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu) = \langle \nu^*(\mathbf{r}_1, \nu) \nu(\mathbf{r}_1, \nu) \rangle / \Phi^{(1)}(\nu) = 1 \quad (14)$$

与  $\nu$  和  $\mathbf{r}_1$  无关. 当然, 实际的光场由于光传播因子以及光传播中空气的扰动问题,  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)|$  应该小于 1, 例如文献[6]指出, 测得白光的  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)| = 0.6$ , 对于多模相干态的激光, 例如频谱较宽的半导体激光, 可以认为  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)| = 1$ .

从(9)式可看出经过频域干涉后光谱干涉的幅度为  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)|$ , 一般  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)|$  接近于 1. 理论上说用多束不同延迟的光束叠加可以产生我们所需要的光谱线型. 作为一个特例, 我们考虑把宽线型变成窄线谱的可能性.

考虑把一束多色光输入 Michelson 干涉仪, 干涉仪的两全反镜互相垂直且均和半透半反镜成  $45^\circ$  角, 并设半透半反镜的透过和反射光强度为 50%:50%, 光束经两全反镜反射后的光程差为  $cT_1$ , 假设  $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)$  与  $\nu$  无关并且是实数, 于是(9)式可改写为

$$\Phi(\nu) = 2\Phi^{(1)}(\nu)(1 + \mu \cos 2\pi\nu T_1), \quad (15)$$

这里  $\Phi^{(1)}(\nu)$  为输入光场的谱密度,  $\Phi(\nu)$  为输出光场的谱密度. 现在用归一化谱密度来表示光谱:

$$\Phi^{(1)}(\nu) = \langle I \rangle^{(1)} \Phi_n^{(1)}(\nu),$$

并记

$$\Phi(\nu) = 2\langle I \rangle^{(1)} \Phi_n(\nu). \quad (16)$$

其中  $\langle I \rangle^{(1)}$  为光束  $V(\mathbf{r}_1, t_1)$  总强度, 于是(15)式改写为

$$\Phi_n(\nu) = \Phi_n^{(1)}(\nu)(1 + \mu \cos 2\pi\nu T_1). \quad (17)$$

$cT_1$  远大于相干长度时

$$\int_0^{+\infty} \Phi_n^{(1)}(\nu) \cos 2\pi \nu T_1 d\nu = 0. \quad (18)$$

于是  $\Phi_n(\nu)$  也是归一化的. 显然从 Michelson 干涉仪输出的归一化光谱线型受到了调制, 当  $T_1$  很大时,  $\Phi(\nu)$  即成为分离的线谱, 如图 1(b) 所示. 由于  $cT_1$  远大于相干长度, 此时描述时域强度的是 (11) 式而不是 (10) 式,  $2\langle I \rangle^{(1)}$  正是叠加光束的总强度.

若选择合适的  $T_1$  使得谱中心频率  $\nu_0$  有

$$\nu_0 T_1 = n \quad n \text{ 为整数 (这里 } n \text{ 待定)}. \quad (19)$$

若谱  $\Phi_n^{(1)}(\nu)$  半高宽为  $\Delta\nu$ , 则取

$$T_1 \cong 2/\Delta\nu. \quad (20)$$

由 (19), (20) 两式确定  $T_1$ , 则经过 Michelson 干涉仪后,  $\nu_0$  处的归一化谱密度加倍, 其他频率处的压制了. 把输出光再输入 Michelson 干涉仪, 这样经过三次干涉仪之后有

$$\Phi_n(\nu) = \Phi_n^{(1)}(\nu)(1 + \mu_1 \cos 2\pi \nu T_1)(1 + \mu_2 \cos 2\pi \nu T_2)(1 + \mu_3 \cos 2\pi \nu T_3). \quad (21)$$

若取  $T_2 = \frac{1}{2} T_1$ ,  $T_3 = \frac{1}{2} T_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ , 则

$$\begin{aligned} \Phi_n(\nu) = & \Phi_n^{(1)}(\nu) \left\{ 1 + \mu \left[ \cos \frac{1}{2} \pi \nu T_1 + \cos \pi \nu T_1 + \cos 2\pi \nu T_1 \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} \mu^2 \left[ \cos \frac{1}{2} \pi \nu T_1 + \cos \pi \nu T_1 + 2\cos \frac{3}{2} \pi \nu T_1 + \cos \frac{5}{2} \pi \nu T_1 + \cos 3\pi \nu T_1 \right] \\ & \left. + \frac{1}{4} \mu^3 \left[ \cos \frac{1}{2} \pi \nu T_1 + \cos \frac{3}{2} \pi \nu T_1 + \cos \frac{5}{2} \pi \nu T_1 + \cos \frac{7}{2} \pi \nu T_1 \right] \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

若取  $\mu=1$ , 则上式简化为

$$\begin{aligned} \Phi_n(\nu) = & \Phi_n^{(1)}(\nu) \left( 1 + \frac{7}{4} \cos \frac{1}{2} \pi \nu T_1 + \frac{3}{2} \cos \pi \nu T_1 + \frac{5}{4} \cos \frac{3}{2} \pi \nu T_1 \right. \\ & \left. + \cos 2\pi \nu T_1 + \frac{3}{4} \cos \frac{5}{2} \pi \nu T_1 + \frac{1}{2} \cos 3\pi \nu T_1 + \frac{1}{4} \cos \frac{7}{2} \pi \nu T_1 \right). \quad (23) \end{aligned}$$

下面进行一些数值计算估计. 对半导体激光束取典型值  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ ,  $\Delta\lambda = 2 \text{ nm}$ ,  $\Delta\nu = 9.375 \times 10^{11} \text{ Hz}$ ,  $cT_1 = 6.4 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\mu=1$ , 输入光谱  $\Phi_n^{(1)}(\nu)$  为 Gauss 线型:

$$\Phi_n^{(1)}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\nu} e^{-(\nu-\nu_0)^2/2\Delta\nu^2}. \quad (24)$$

所得结果以曲线表示 (如图 1). 图 1(a) 给出了输入线型  $\Phi_n^{(1)}(\nu)$ , (b), (c), (d) 分别是经过一、二、三个干涉仪后的光谱输出线型, 可见最后的光谱线型近似为准单色光, 中心频率处的谱密度增加到 8 倍. 作为对比, 我们还给出经过三次干涉仪后的结果 (图 1(e)). 由图可见, 只要  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)| \neq 0$ , 构造光谱皆有可能, 且就构造窄线而言,  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \nu)|$  越接近于 1 构造效果越好.

下面计算中心频率处的强度和半高宽. 当

$$\nu_0 T_3 = \frac{1}{2} \nu_0 T_2 = \frac{1}{4} \nu_0 T_1, \quad (25)$$

$$\Phi_n(\nu_0) = \Phi_n^{(1)}(\nu_0)(1 + \mu)^3. \quad (26)$$

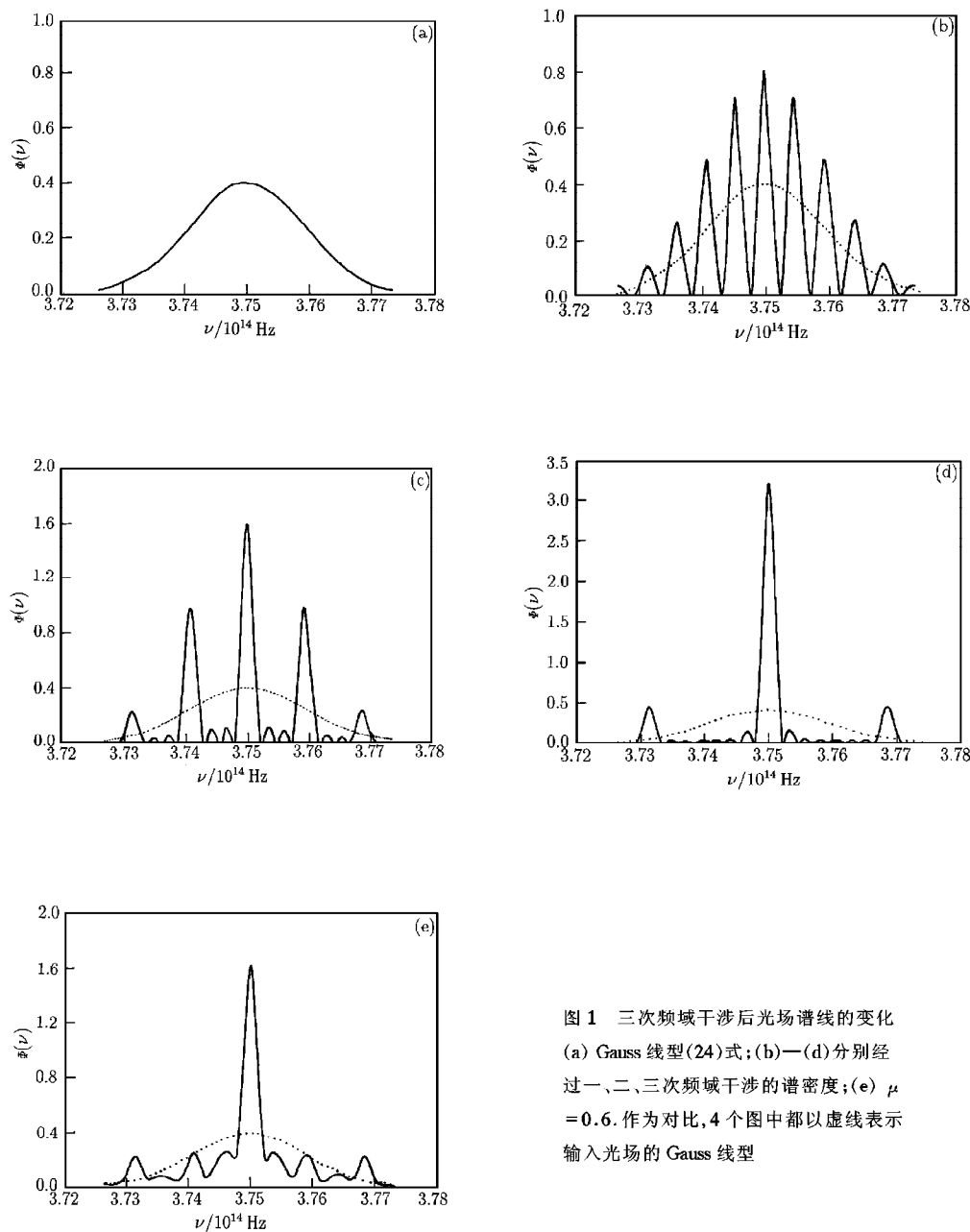


图 1 三次频域干涉后光场谱线的变化  
 (a) Gauss 线型(24)式;(b)一(d)分别经过一、二、三次频域干涉的谱密度;(e)  $\mu = 0.6$ . 作为对比,4 个图中都以虚线表示输入光场的 Gauss 线型

中心频率  $\nu_0$  处的谱密度增大了  $(1 + \mu)^3$  倍.  $\Phi_n(\nu)$  中心频率峰值两边第一个零点为

$$\nu_{\pm 1} = \nu_0 \pm \frac{1}{2T_1}. \tag{27}$$

对(23)式作积分  $\int_{\nu_{-1}}^{\nu_{+1}} \Phi_n(\nu) d\nu$ , 按上面的典型值算出数值积分为

$$\int_{\nu-1}^{\nu+1} \Phi_n(\nu) d\nu = 0.722, \quad (28)$$

它表示输出谱线中央极大峰下的光通量与输入光场总光通量的比例. 同样地, 采用数值求得输出线宽为

$$\Delta\nu' \approx 2.08 \times 10^{11} \text{ Hz}.$$

可见  $\Delta\nu'$  与  $1/T_1$  相差不多, 事实上  $\Delta\nu'$  主要依赖于  $T_1$  的选择, 同时也与叠加次数、 $\Delta\nu$  和线型  $\Phi_n^{(1)}(\nu)$  以及  $|\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)|$  有关.

如果使用滤波片来得到准单色光, 只有频率在  $\left[\nu_0 - \frac{1}{2T_1}, \nu_0 + \frac{1}{2T_1}\right]$  区间内的光能通过, 其余的光均被挡住, 这时可利用的光占总光通量的比例为

$$\int_0^{\infty} \Phi_n^{(1)}(\nu) d\nu = 0.197, \quad (29)$$

而利用频域干涉使光谱发生变化则使可利用的光通量比例增大到 0.722, 并且可以利用选择  $T_1$  来选择中心频率和半高宽. 一般来说, 若光程差  $cT_1$  比原来光束的相干长度大得不多, 则可利用光的比例较大而单色性改善不多; 若光程差  $cT_1$  比原来光束的相干长度大得多, 则单色性改善较多、可利用光的比例较小, 但也比滤色片效果要好.

## 4 结 论

频谱宽度为  $\Delta\nu$  的光场, 其相干长度为  $\frac{c}{\Delta\nu}$ , 当 Michelson 干涉仪的光程差大于相干长度时, 时域的干涉现象消失但频域的干涉则依然存在. 这种频域的干涉现象虽然早已为人们所观察到, 但尚未深入地研究过. 本文证明, 利用频域的干涉可以将宽带光场变成窄带光场, 这种方法较之常用的滤波片有明显的优点, 即可利用的光能量的比例显著增大. 理论上讲这个方法可用来构造我们所需要的任意类型的光谱线型.

- [1] W. P. Alford and A. Gold, *Am. J. Phys.*, **26**(1958), 481.
- [2] E. Wolf and W. H. Carter, *Opt. Commun.*, **13**(1975), 205.
- [3] W. H. Carter and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.*, **65**(1975), 1067.
- [4] E. Wolf and W. H. Carter, *Opt. Commun.*, **16**(1976), 297.
- [5] L. Mandel and E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.*, **66**(1976), 529.
- [6] F. Heiniger, A. Herden and T. Tschudi, *Opt. Commun.*, **48**(1983), 23.
- [7] X. Y. Zou, J. P. Grayson and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 3041.
- [8] L. Mandel, *J. Opt. Soc. Am.*, **51**(1961)1342; F. Gori and R. Grella, *Opt. Commun.*, **49**(1984), 173; E. Wolf, *Opt. Commun.*, **62**(1987), 12.
- [9] J. W. Goodman, 秦克诚等译, 统计光学(科学出版社, 北京, 1992), 第 177 页.
- [10] X. Y. Zou, L. J. Wang and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(1991), 318.

## SPECTRAL COHERENCE AND THE POSSIBILITY TO MODULATE A SPECTRUM

XU BIN GUO GUANG-CAN

(*Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(Received 12 July 1995; revised manuscript received 25 September 1995)

### ABSTRACT

By making a study of spectral coherence and spectrum modification induced by spectral correlation of optical field, we try to find whether it is possible to modulate a spectrum. This article gives an example of reducing spectrum width and performs a numerical calculation. We find that the spectral coherence method can exploit much more light energy while spectrum width becomes narrow, the rate of exploiting light energy being much larger than that of a filter.

PACC: 4210