

高阶相对论谐波辐射的理论研究^{*}

曾贵华 余 玮 沈百飞 徐至展

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

(1995 年 6 月 28 日收到; 1995 年 8 月 29 日收到修改稿)

对短脉冲强激光在非稠密均匀等离子体中传播时产生的相对论相干谐波辐射进行了一般性研究. 在准稳态近似(quasistatic approximation)下得出 n 阶谐波包络的演化方程, 并用此方程研究了 n 阶谐波的增长与饱和及转化效率等问题.

PACC: 5240D; 4265K; 5260

1 引 言

高阶谐波以其短波长特性及其与基波相同的相干性, 被认为是实现相干短波长辐射源的一条重要途径^[1]. 强激光与物质相互作用可通过不同机制诱发谐波辐射: 1) 激光与原子相互作用因原子效应产生谐波^[2]; 2) 激光强度在电离阈值附近因电离效应而诱发谐波^[3]; 3) 激光与等离子体相互作用激发相干谐波辐射^[4-10].

相对论相干谐波辐射是超强激光等离子体相互作用中最近发现的一种谐波辐射机制^[1, 6-10]. 强激光在非稠密等离子体中传播时, 如果激光强度很强, 如 10^{18}W/cm^2 (实验上已实现), 等离子体中的电子运动速度接近光速, 其相对论效应必须考虑. 另外, 由光场包络造成的有质动力亦不可忽略. 相对论和有质动力效应, 造成电子运动的强非线性, 这种非线性效应及等离子体的集体相干运动激发强激光等离子体相互作用中的相对论相干谐波辐射.

在强激光等离子体相互作用的描述中, 通常作代数变换^[1]

$$\xi = z - V_t t, \quad \tau = t, \quad (1)$$

在准稳态近似下进行分析, 其中 V_t 在不同问题中分别取为入射激光的群速 V_g , 相速 V_{ph} 及光速 c . 本文取变换速度 $V_t = c$, 在准稳态近似下, 对短脉冲强激光在非稠密均匀等离子体中传播时诱发的相对论相干谐波辐射进行了一般性研究, 获得了在小信号近似下任意阶谐波辐射的演化规律, 并研究了其增长与饱和特性及谐波的转化率等问题.

2 n 阶谐波包络的演化方程

激光等离子体相互作用可用矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 Φ 所满足的 Maxwell 方程

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi + \frac{4\pi e}{c} \mathbf{N} \mathbf{V}, \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi e (N - N_0), \quad (3)$$

以及等离子体中电子流体所满足的动力学方程和连续性方程(冷等离子体)

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + m_0 c^2 \nabla \sqrt{1 + \left(\frac{\mathbf{P}}{m_0 c^2}\right)^2} = e \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{A} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{N} \mathbf{V}) = 0 \quad (5)$$

来描述,式中 N 为等离子体密度, N_0 为等离子体初始密度, e, m 分别为电子电量和电子质量, $\mathbf{P}, \mathbf{V}$ 分别为电子流体动量和速度,(1—4)式中采用了库仑规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

引进归一化量 $a = \frac{eA}{m_0 c^2}$, $\phi = \frac{e\Phi}{m_0 c^2}$, $\rho = \frac{P}{m_0 c}$, 并将标势 ϕ 分为慢变部分 ϕ_s 和快变部分 ϕ_f . 当 $k_p \ll k$ 时,快变部分远小于慢变部分^[1],即 $\phi_f \ll \phi_s$. 利用变换(1)式,并取变换速度 V_t 为光速,于是在准稳态近似下,对线偏振长脉冲入射激光 $a = \frac{1}{2} A_L e^{ikz} + \text{c. c.}$, ($L \gg \lambda_p$, L 为入射激光脉冲宽度, λ_p 为等离子体波的波长),非稠密均匀等离子体中光场的演化方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) a = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} a + \frac{k_p^2}{(1 + \phi_s)} a \sum_{m=1} \left(\frac{\phi_f}{1 + \phi_s} \right)^m, \quad (6)$$

式中 $\phi_f = S(a_1^2 e^{2ikz} + \text{c. c.})$, $S = \frac{k_p^2}{32k^2(1 + \phi_s)^2}$, $\phi_s = \sqrt{1 + \frac{1}{2} A_L^2} - 1$, A_L 为入射激光的幅值, a_1 为基频波的包络.

为研究谐波辐射,设 $a = \frac{1}{2} \sum_l a_l e^{ilkz}$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$, $a_{-l} = a_l^*$, a_l 为第 l 阶谐波的包络,代入(6)式得到第 n 阶谐波包络的演化方程:

$$\frac{2in k}{c} \frac{\partial a_n}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left\{ a_n + \sum_p \sum_{l, l \neq n} \frac{\left(\frac{n-l+4p}{2}\right)!}{p! \left(\frac{n-l+2p}{2}\right)!} \left(\frac{S}{1 + \phi_s}\right)^{\frac{n-l+4p}{2}} a_l (a_1)^{n-l+2p} (a_1^*)^{2p} \right\}, \quad (7a)$$

$n = 1, 3, 5, 7, \dots$, 式中 l 的取值须使 $\frac{n-l}{2} + p$ 为正整数,在小信号近似下可略去谐波间的耦合效应,上式简化为

$$\frac{2in k}{c} \frac{\partial a_n}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} a_n + \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left[\left(\frac{S}{1 + \phi_s}\right)^{\frac{n+1}{2}} a_1^{n+1} a_1^* + (1 - \delta_{n,1}) \left(\frac{S}{1 + \phi_s}\right)^{\frac{n-1}{2}} a_1^n \right], \quad (7b)$$

式中 $\delta_{n,1}$ 为克朗内克符号, $n > 1$ 时,方括号内第一项远小于第二项.

3 n 阶谐波的增长与饱和

设 $a_n = A_n e^{i\theta_n(\tau)}$, $A_n, \theta_n(\tau)$ 分别为第 n 阶谐波包络的振幅和位相,它们的演化规律如下:

$$\frac{2nk}{c} \frac{\partial A_n}{\partial \tau} = - \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} A_1^n \sin(\Delta \theta_n), \quad (8)$$

$$- \frac{2nk}{c} A_n \frac{\partial \theta_n}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} A_n + \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} A_1^n \cos(\Delta \theta_n). \quad (9)$$

推导中略去了(7b)式中方括号内第一项, 式中 $\Delta \theta_n = \theta_n - n\theta_1$. 为构成闭合方程, 需要 $\Delta \theta_n$ 的方程, 为此写出基波振幅和相位的演化方程, 小信号近似下,

$$\frac{2k}{c} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} \simeq 0, \quad (10)$$

$$- \frac{2k}{c} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{k_p^2}{1 + \phi_s}, \quad (11)$$

于是 $\Delta \theta_n$ 的演化方程为

$$\frac{\partial \Delta \theta_n}{\partial \tau} = \frac{n^2 - 1}{2n} \frac{ck_p^2}{k(1 + \phi_s)} - \frac{c}{2nk} \frac{k_p^2}{1 + \phi_s} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{A_L^n}{A_n} \cos(\Delta \theta_n). \quad (12)$$

由上述方程容易得到

$$A_n = \frac{2}{n^2 - 1} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} A_L^n \cos \Delta \theta_n(\tau), \quad (13)$$

$$\Delta \theta_n(\tau) = \frac{\pi}{2} + \frac{n^2 - 1}{4n} \frac{k_p^2}{k(1 + \phi_s)} c\tau. \quad (14)$$

在 $c\tau$ 很小时,

$$A_n = \frac{k_p^2}{2nk} \frac{A_L^n}{1 + \phi_s} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} c\tau. \quad (15)$$

第 n 阶谐波的振幅按 τ 成线性增长, 但线性增长关系仅限在 $c\tau$ 很小的区间. 随 τ 的增加, 第 n 阶谐波的振幅随时间按正弦关系变化, 经 $1/4$ 个周期达到饱和, 然后减少. (13) 式表明, 这种饱和是一种振荡饱和, 这是由相位失配造成的, 失相长度为

$$L_d = \frac{n}{n^2 - 1} \frac{\lambda_p^2}{\lambda} (1 + \phi_s). \quad (16)$$

进一步可获得第 n 阶谐波的饱和值 A_{ns} , 当 $\Delta \theta = \pi$ 时由(13)式可得

$$A_{ns} = \frac{2}{n^2 - 1} \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{\frac{n-1}{2}} A_L^n. \quad (17)$$

4 n 阶谐波的转化率

第 n 阶谐波的转化效率为

$$\eta = \frac{P_N}{P_0} = ML_i^2 \sin^2 \left(\frac{\pi L_i}{2L_d} \right), \quad (18)$$

$$M = \frac{k_p^4}{(2nk)^2} \left(\frac{A_L^{n-1}}{1 + \phi_s} \right)^2 \left(\frac{S}{1 + \phi_s} \right)^{n-1},$$

式中 L_i 为强激光等离子体相互作用的长度. 由(18)式可知, 在 $0-\pi/2$ 的过程中是锁相的, 在此过程第 n 阶谐波的转化效率增加, 达到饱和 ($c\tau/L_i = \pi/2$) 后开始失相, 然后周期性地出现锁相和失相过程. 相位失配通过相位同步因子 $\text{sinc}\left(\frac{\pi L_i}{2 L_d}\right)$ 影响非线性能量转化过程, 当 $L_i \gg L_d$ 时, 能量在基频波与谐波间发生周期性转换, 且在 L_d 的奇数倍处出现转化效率的峰值, 这类似于晶体中相位失配下的二次谐波辐射过程. 值得注意的是激光在等离子体中的传播受到衍射的影响, 当等离子体波的调制及相对论效应产生的自聚焦效应与衍射效应平衡, 即形成等离子体波导时^[11,12], $L_i \ll L_d$ 的条件能满足.

5 结论与讨论

1) $n=3$ 时, 由(15)式得到

$$A_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{k_p}{4k} \right)^3 \frac{A_L^3}{(1 + \phi_s)^4} k_p c \tau,$$

这正是 Sprangle 的结论^[6]; 由(16)式得到

$$L_d = \frac{3}{8} \frac{\lambda_p^2}{\lambda} (1 + \phi_s).$$

结果与 Lagrangian 方法所得结论一致^[8].

2) 超短脉冲强激光在等离子体中传播时, 因电子运动的强非线性而产生相对论相干谐波辐射. 本文取光速为变换速度, 在准稳态近似下对 n 阶谐波的演化、增长与饱和及转化效率等问题进行了一般性研究. 所得结果说明以光速作变换(1)式中的变换速度, 同样能描述谐波的饱和效应, 从而证明了认为光速作变化速度不能描述谐波饱和效应的说法欠妥^[9].

3) 目前对相对论相干谐波辐射的研究都是在小信号近似下进行的, 这在谐波信号很弱时是可行的, 谐波对电子运动的影响可略; 当谐波间的耦合很强时, 须考虑谐波对电子运动的反作用, 有待进一步研究.

- [1] P. Sprangle, E. Esarey and A. Ting, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 2011.
- [2] A. McPherson *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B14**(1987), 595.
- [3] F. Brunel, *J. Opt. Soc. Am.*, **B17**(1990), 521.
- [4] T. Engers *et al.*, *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 4564.
- [5] N. H. Burnett *et al.*, *Applied Phys. Lett.*, **31**(1977), 172.
- [6] P. Sprangle *et al.*, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 4463.
- [7] W. B. Mori, C. D. Decker and W. P. Leemans, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **21**(1993), 110.
- [8] J. M. Rax and N. J. Fisch, *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 772; J. M. Rax and N. J. Fisch, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **21**(1993), 105.
- [9] E. Esarey *et al.*, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **21**(1993), 95.
- [10] S. C. Wilks, W. L. Kruer and W. B. Mori, *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **21**(1993), 120.
- [11] T. M. Antonsen Jr. and P. Mora *Phys. Rev. Lett.*, **69**(1992), 2204.
- [12] C. Durfee and H. Milchberg, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 2409.

HIGH-ORDER RELATIVISTIC HARMONIC GENERATION BY INTENSE LASER PULSE

ZENG GUI-HUA YU WEI SHEN BAI-FEI XU ZHI-ZHAN

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800*)

(Received 28 June 1995; revised manuscript received 29 August 1995)

ABSTRACT

The characteristics of high-order relativistic harmonic generation excited by intense laser pulse in underdense plasmas is investigated. With quasistatic approximation, the growth and saturation of N^{th} -order relativistic harmonics are analyzed, and the ratio of high-order power to fundamental wave power is described and calculated.

PACC: 5240D; 4265K; 5260