

负介电媒质观点下超导边值问题的变分解^{*}

周世平 徐克西

(上海科技大学物理系, 上海 201800)

(1995 年 3 月 30 日收到)

给出了对沉积于 $\text{LaAlO}_3(001)$ 上 c 轴取向的 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 薄膜介质谐振器的解析分析方法. 在两流模型框架下, 提出了负介电观点来表征超导材料电磁特征参量的概念. 这使得对超导边值问题的讨论等价于经典电磁场理论中对一般媒质的处理. 进一步构造的保角变换, 不仅使原问题宜于由变分法求解, 而且对诸如超导微带和共面波导结构传播特征的分析也是有益的.

PACC: 7430G; 7420

1 引 言

近年来, 高温超导体的发现极大地拓宽了超导电子器件的应用前景, 并在众多领域中引起了相当的关注^[1-3]. 从促进应用开发的角度看, 进行超导体电磁特征的研究将是很重要的, 因为无论是微波超导器件的设计, 或是深化对高温超导电性本质的认识, 一定程度上皆受益于对其电磁场中特征的深刻理解.

原则上, 超导体的某些主要参数可以由基于 BCS 微观理论^[4]的 Mattis-Bardeen(M-B) 公式^[5]导出. 这方面的工作体现于 1967 年 Tureneure^[6]对超导 Nb 及后来本文作者等^[7]对超导 Sn 和 Al 膜的研究中. 注意到 M-B 公式是针对 Pippard 极限而言(相干长度 ξ 远大于场穿透深度 λ), 而该极限对高温超导体并不合适. 因此, 对高温超导体, M-B 公式的适应性尚存在疑问. 另一方面, 由于目前对高温超导电性耦合机理尚缺乏全面的、系统的认识, 给建立相应电磁场边值问题的完备、解析的表述带来一定困难. 考虑到两流模型尚可对超导体的电磁特征提供较好的表述, 且对高温超导体, 计及层间耦合后基本模型还可进一步改进, 本文不准备过深涉及高温超导电性的起因, 而是着重于其宏观电磁行为. 在如下的讨论中将依据两流模型为出发点.

2 负介电媒质观点

由于高温超导体中 $\lambda \gg \xi$, 我们将在 London 局域理论框架下进行讨论. 假设电磁场量幅值相对较低, 因而无须虑及非线性效应, 否则必须考虑 Gingzburg - Landau 模型.

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

首先考虑存在超流时,经典电磁场方程应如何调整.两流模型中,认定一部分电子处于超导态,而其余的处于激发态或正常态,于是超导体内总电流密度 $\mathbf{J}$ 应为正常电流密度 $\mathbf{J}_n$ 和超流密度 $\mathbf{J}_s$ 之和.计正常电子密度为 n_n ,平均弛豫时间为 τ_n ,相应电导率为 σ_n ,则

$$\mathbf{J}_n = \sigma_n \mathbf{E} \quad (1)$$

或

$$\mathbf{J}_n = \frac{\tau_n e^2 n_n / m}{1 + j \omega \tau_n} \mathbf{E}, \quad (2)$$

其中 ω 为角频率, m , e 分别为单电子的质量、电荷, $\mathbf{E}$ 为电场强度.超流则应满足 London 方程

$$\partial \mathbf{J}_s / \partial t = \mathbf{E} / (\mu_0 \lambda_L^2), \quad (3)$$

其中 $\lambda_L = (m / \mu_0 n_s e^2)^{1/2}$ 为 London 穿透深度, n_s 为超导电子密度, μ_0 为真空磁导率, $\partial / \partial t$ 为时间的偏微运算.利用 Maxwell 旋度方程定义相对介电常数 ϵ_r 如下:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} + j \omega \epsilon_0 \mathbf{E} \equiv j \omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega, T) \mathbf{E}. \quad (4)$$

利用(2)和(3)式,以 $\mathbf{E}$ 表示 $\mathbf{J}$, 并进行代数运算,得

$$\epsilon_r(\omega, T) = \left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2} \right) - j \frac{\omega_n^2 \tau_n^2}{\omega(1 + \omega^2 \tau_n^2)}, \quad (5)$$

其中 ϵ_0 为真空介电常数, T 为温度, $\omega_s = (e^2 n_s / m \epsilon_0)^{1/2}$ 和 $\omega_n = (e^2 n_n / m \epsilon_0)^{1/2}$ 为超流粒子和正常粒子的等离子体频率,对绝大多数超导体,由此定义的 ω_s 常为 THz 的量级,则由(5)式,在微波波段 ($\omega \ll \omega_s$),超导体实际上应表现出负介电媒质的特征!下面将对此作进一步阐述.

事实上,就导电行为而言,一种材料不外乎取介质(含绝缘体)、半导体、导体(含超导体)三者之一.借助于(1)和(3)式重写(4)式为 $\nabla \times \mathbf{H} = (j \omega \epsilon + \sigma) \mathbf{E}$,即得知极限理想条件下 ($\epsilon \rightarrow \pm \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$) 严格区分介质材料与导体的界限将是困难的,甚至一定意义上是没有必要的,因为两者皆可演化出表面处切向电场 $\mathbf{E}_t$ 为零的必要条件.进而对处于超导态下的超导体,既可认为是具虚电导率的媒质,也可理解为一种具实负介电常数的媒质.考虑到直流时材料物性参量为虚量的提法将失去其物理意义,于是视超导体为负介电媒质着实有其合理性.

继续深入讨论之前,必须作几点说明.

1) 从动态观点, $|\epsilon_r| \rightarrow \infty$, 也可引出 Meissener 效应的结论.事实上,对处于理想超导态 ($|\epsilon_r| \rightarrow \infty$) 的材料.其表面层处电场的切向分量必须渐变为零.它要求磁场强度的法向分量也为零.为满足场连续条件,磁导率必须趋于零,即 $\mu \rightarrow 0$.当 $\mu \rightarrow 0$ 时,体内 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}$ 定为零.此即磁极化率 $\chi = -1$ 的论点,常用以描述 Meissener 效应实验.

2) 对任意介电媒质,其介电常数的实部 $\epsilon'(\omega)$ 与虚部 $\epsilon''(\omega)$ 间应满足 Kramers-Kronig 积分方程

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (6)$$

$$\epsilon''(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega)}{\xi - \omega} d\xi, \quad (7)$$

其中 Ω 为积分主值. 然而由(5)式表示的 $\epsilon_r(\omega)$ 并不服从(6), (7)式; 这是假定了超流对 $\epsilon_r(\omega)$ 的虚部无任何贡献所致. 对非 **Meissener** 态, 补救的办法为视超导态情形对应于有耗介质的 $\tau_s \rightarrow \infty$ 时的极限过程:

$$\epsilon_r(\omega, T) = \lim_{\tau_s \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\omega_s^2 \tau_s^2}{1 + \omega^2 \tau_s^2} - \frac{\omega_n^2 \tau_n^2}{1 + \omega^2 \tau_n^2} \right) - i \left(\frac{\omega_s^2 \tau_s}{\omega(1 + \omega^2 \tau_s^2)} + \frac{\omega_n^2 \tau_n}{\omega(1 + \omega^2 \tau_n^2)} \right) \right]. \quad (8)$$

这种处理方法类似于经典电动力学中对其他许多边值问题的处理. 此刻媒质必须认定为有耗的, 以便确定(6)和(7)式的被积函数的极点所在.

3) 高温氧化物超导体通常表现出强的各向异性特征(这主要由于其晶格元胞中存在低维结构, 如面层和链层所致). 一般而言, 相应的介电常数势必为张量形式的. 因此, 须认真论证后, 方可将(8)式用于高温超导体. 这正是下一节所讨论的主要内容.

3 YBa₂Cu₃O_{7- δ} 超导体的介电常数

3.1 各向异性介质中的横电磁波

各向异性介质特征可由其张量介电常数来表述. 然而, 在适当选择坐标系后, 张量介电常数可望对角化. 记介质沿其主轴方向上的介电常数为 ϵ_{r1} , ϵ_{r2} 和 ϵ_{r3} , 且取主轴分别与直角坐标系中 x , y , z 轴同向, 考虑电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} \quad (9)$$

的平面波在介质中的传播特性, 其中 $\mathbf{E}_0$ 为常矢, 单位矢 $\mathbf{n} = n_x \mathbf{a}_x + n_y \mathbf{a}_y + n_z \mathbf{a}_z$ 为波动方向, $\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z$ 为位置矢, β 为待定的传播常数, 利用 **Maxwell** 旋度方程

$$-j\omega\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E} = -j\beta \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (10)$$

$$j\omega \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{j\beta^2}{\omega\mu_0} [\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})]. \quad (11)$$

(11)式表明, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 共线的充要条件为 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$. 对一般情形, 即 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, 将(11)式等号右端第一项中 $\mathbf{E}$ 用其分量 $E_i = D_i / \epsilon_0 \epsilon_{ri}$ ($i = x, y, z$) 代入, 并进而解 $\mathbf{D}$, 得

$$\mathbf{D} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \left(\frac{n_x k_x^2}{\beta^2 - k_x^2} \mathbf{a}_x + \frac{n_y k_y^2}{\beta^2 - k_y^2} \mathbf{a}_y + \frac{n_z k_z^2}{\beta^2 - k_z^2} \mathbf{a}_z \right), \quad (12)$$

其中,

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0, \quad k_i^2 = \epsilon_{ri} k_0^2, \quad i = x, y, z, \quad (13)$$

于是, 利用(11)式, 可得关于 β 的特征方程为

$$\sum_{i=x,y,z} n_i^2 k_i^2 / (\beta^2 - k_i^2) = 0. \quad (14)$$

这是关于 β 的四次方程. 由它可解得 β^2 的两个根, 并能够进一步推断出相应横电磁波的

传播特性.

于是,对于各向异性介质内部的平面波传播的分析还是相对简便的,但实际所对应的各向同性空间与各向异性媒质界面处波的透入与反射这类边值问题的考虑则要复杂得多,因为此时无论是 $\mathbf{n}$, 抑或是 $\mathbf{D}$ 的方向及 β 皆为未知的. 若某两主轴方向上介电常数相等时,类似的界面问题则得以简化,经适当处理可望给出其完备解. 注意到这恰好对应 c 轴取向的 Y 系氧化物超导体/空气界面问题(或简称 SBVP),若略去前者元胞参量沿 a, b 轴的差别.

3.2 寻常波与非寻常波的去耦合考虑

如上所述,当 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 0$ 时, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 为共线的,且由(11)式 $\beta^2 = k_0^2 \epsilon_{rz}$, 此时 $\mathbf{E}$ 必须位于 $\mathbf{H}-\mathbf{D}$ 平面上,体系并不表现出各向异性效应. 于是,称该解为寻常波解. 而当 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \neq 0$ 时,由(14)式记 $\epsilon_{ry} = \epsilon_{rz}$, 得

$$\beta^2 = k_x^2 k_z^2 / [n_x^2 k_x^2 + (1 - n_x^2) k_z^2]. \quad (15)$$

定义 $\mathbf{D}_2, \mathbf{H}_2$ 为对应于(15)式确定的 β 的相应解,并称作非寻常波解. 设寻常波解场为 $\mathbf{D}_1, \mathbf{H}_1$, 则借助于(11), (12)及(14)式,可以证明 $\mathbf{D}_2$ 和 $\mathbf{D}_1$ 相互垂直.

考虑到 $\mathbf{D}_1 \perp \mathbf{H}_1 \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{D}_2 \perp \mathbf{D}_1 \perp \mathbf{n}$, 则 $\mathbf{D}_2$ 须与 $\mathbf{H}_1$ 共线. 类似地, $\mathbf{H}_2$ 应与 $\mathbf{D}_1$ 共线. 因此, $\mathbf{D}_1, \mathbf{H}_2$ 必须位于以 $\mathbf{n}$ 为面矢的面内,即不存在 $\mathbf{D}_{1n}$ 和 $\mathbf{H}_{2n}$ 分量,如图 1 所示. 场量的这些特性,使得我们可以用仅有 $\mathbf{n}$ 向分量的磁电 Hertzian 位函数 Π_h, Π_e 来推得两种波的场量,即

$$\mathbf{E}_1 = -j\omega\mu_0 \nabla \times \Pi_h, \quad \mathbf{H}_1 = \nabla \times \nabla \times \Pi_h, \quad (16a)$$

而 $\Pi_h = \Pi_h a_n$, Π_h 满足方程

$$\nabla^2 \Pi_h + k_z^2 \Pi_h = 0, \quad (16b)$$

$$\mathbf{E}_2 = k_0^2 \Pi_e + \nabla \nabla \cdot \Pi_e / \epsilon_{rz}, \quad \mathbf{H}_2 = j\omega\epsilon_0 \nabla \times \Pi_e, \quad (16c)$$

而 $\Pi_e = \Pi_e a_n$, Π_e 为下述方程的解:

$$\nabla^2 \Pi_e + k_x^2 \Pi_e + \frac{\epsilon_{rx} - \epsilon_{rz}}{\epsilon_{rz}} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial x^2} = 0. \quad (16d)$$

考虑平面波沿波矢方向 $\mathbf{N}$ 入射于 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, 见图 2. 在界面 $x=0$ 处,对所有 y 和 z 值,电、磁场的切向分量必须连续,这要求界面两侧波数须满足

$$k_0 N_y = k_z n_{1y} = \beta n_{2y}, \quad (17)$$

$$k_0 N_z = k_z n_{1z} = \beta n_{2z}. \quad (18)$$

将(17), (18)式代入(15)式,得

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 [\epsilon_{rz} + (N_y^2 + N_z^2)(1 - \epsilon_{rz}/\epsilon_{rx})], \quad (19)$$

于是,对已知的 $\mathbf{N} = N_x \mathbf{a}_x + N_y \mathbf{a}_y + N_z \mathbf{a}_z$, 便可推得 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 和 β , 若材料的介电参量亦给定时. 进而,场量可由(16)式给出.

设 $x < 0$ 域内,入射波和反射波 Hertzian 位为

$$\Pi_h = a_x (A_0 e^{-jk_0 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}} + A_1 e^{-jk_0 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}), \quad (20a)$$

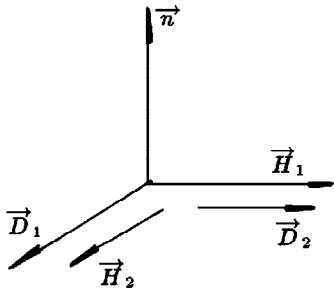


图1 各向异性媒质中平面电磁波的寻常解和非寻常解场量示意图

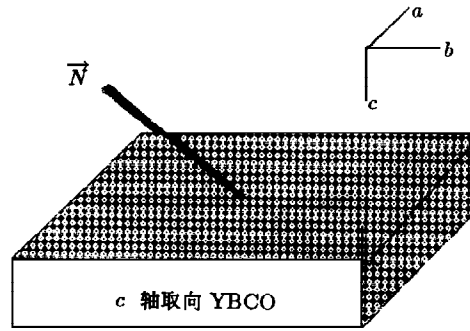


图2 平面波沿波矢方向 N 入射到 c 轴取向 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 超导体(一种负介电媒质)

$$\Pi_e = a_x (B_0 e^{-jk_0 N \cdot r} + B_1 e^{-jk_0 N' \cdot r}), \quad (20b)$$

则 $x > 0$ 域内, 位函数的相应形式为

$$\Pi_h = a_x (C_1 e^{-jk_z n_1 \cdot r} + C_0 e^{-jk_z n_1' \cdot r}), \quad (21)$$

$$\Pi_e = a_x (D_1 e^{-j\beta n_2 \cdot r} + D_0 e^{-j\beta n_2' \cdot r}), \quad (22)$$

其中单位矢 n_1' , n_2' 与 n_1 , n_2 的关系同 N' 与 N 的关系, 即 $N' = N|_{a_x = -a_x}$. 匹配界面处的切向场量, 得到下述方程:

$$H_x = k_0^2 (1 - N_z^2) (A_0 + A_1) = k_z^2 (1 - n_{1z}^2) (C_1 + C_0), \quad (23a)$$

$$H_y = k_0^2 N_z N_y (A_0 + A_1) + k_0^2 (1 - N_z^2) Y_{1e} (B_0 - B_1) \\ = -k_z^2 n_{1z} n_{1y} (C_1 + C_0) + k_0^2 (1 - \beta^2 n_{2z}^2 / k_z^2) Y_{2e} (D_1 - D_0), \quad (23b)$$

$$E_z = k_0^2 (1 - N_z^2) (B_0 + B_1) = k_0^2 (1 - n_{2z}^2 \beta^2 / k_z^2) (D_1 + D_0), \quad (23c)$$

$$E_y = k_0^2 (1 - N_z^2) Z_{1m} (A_1 - A_0) - k_0^2 N_z N_y (B_0 + B_1) \\ = k_z^2 (1 - n_{1z}^2) Z_{2m} (C_0 - C_1) - k_0^2 \beta^2 / k_z^2 n_{2z} n_{2y} (D_1 + D_0), \quad (23d)$$

其中 $Y_{1m} = 1/Z_{1m} = (1 - N_z^2) Y_0 / N_z$, $Y_{1e} = N_z Y_0 / (1 - N_z^2)$ 为 $x < 0$ 域内 Π_h 模、 Π_e 模的波纳抗, 而 $Y_{2m} = 1/Z_{2m} = (1 - n_{1z}^2) Y_0 k_z / (k_0 n_{1z})$, $Y_{2e} = Y_0 \beta n_{2z} / (k_0 (1 - \beta^2 n_{2z}^2 / k_z^2))$ 为 $x > 0$ 域内的 Π_h 、 Π_e 模波纳抗, $Y_0 = (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2}$. (23) 式提示我们注意, 当 N_z 或 N_y 为零时, Π_h 模式与 Π_e 模式间的耦合将不复存在. 其意义在于, 揭示了通过选择合适的入射波矢(或称能量耦合方式), 可以实现对两种模式的单独处理, 即允许如同对待各向同性介质那样来考虑问题. 于是原始 SBVP 的求解得以简化, 而深一层次的 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 媒质的介电特性的讨论对处理原始问题的益处亦更加明确.

必须指出, 在以上推导中, 曾认定场幅值为恒量. 遗憾的是该假设对超导媒质并不合适. 但是这种缺陷可由引入等效穿透深度 d' 来弥补. 定义

$$E_0 d' \equiv \int_0^d E_0 e^{-x/\lambda_L} dx$$

$$= E_0 \lambda_L (1 - e^{-d/\lambda_L}), \quad (24)$$

当超导体几何厚度 $d \gg \lambda_L$ 时

$$d' \simeq \lambda_L. \quad (25)$$

图 3 为负介电媒质表述下, 等效的超导介质谐振器(SDR)的示意图(类似于多层结构).

3.3 c 轴取向 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 的介电常数

前节已阐明, 经选入射波矢, 可望排除各向异性效应, 它促成人们将(8)式直接用于 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 的讨论而无需任何修正. 该设想是合理的, 仅当所关心媒质的电磁行为至少在其完整的单个元胞中呈各向同性时. 显然它要求单元胞中无任何子结构. 考虑到由于 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 该必要条件未能满足, 还注意到高温超导电性与 $\text{Cu}-\text{O}_2$ 面层间耦合有较强的联系(这将无以避免地涉及到 $\text{Cu}-\text{O}$ 链的行为), 对(8)式的适用性须重新审慎考虑.

$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 的元胞中, 沿 c 轴层序为

$$-\text{Y}_2[\]_2 - \text{Cu}_2\text{O}_4 - \text{Ba}_2\text{O}_2 - \text{Cu}_2\text{O}_2[\]_2 - \text{Ba}_2\text{O}_2 - \text{Cu}_2\text{O}_4 - \dots,$$

这里 $[\]$ 表示氧空位. 从静电屏蔽的观点看, 各层的电荷应是

$$-\text{Y}_2^{3+}[\]_2 - [\text{CuO}_2]_2^{-1.5} - [\text{Ba}^{2+}\text{O}_2]_2 - \text{Cu}_2^{2+}\text{O}_2^{-}[\]_2 - [\text{Ba}^{2+}\text{O}_2]_2 - [\text{CuO}_2]_2^{-1.5} - \dots,$$

于是一维链上的 Cu 离子是 2 价的, 而 CuO_2 平面上的 Cu 离子是 2.5 价的. 此外, 关于能带的计算显示^[8], $\text{CuO}[\]$ 层中的一维链是一个半满能带. 所以无论从佩尔斯不稳定性角度, 还是从 Mott-Hubbard 的角度来看, 链层应是一层半导体. 于是 $\text{CuO}_2\text{-CuO}[\]\text{-CuO}_2$ 便类似于 Allender 等^[9] 建议的: 金属-半导体-金属模型.

考虑到上述因素, 我们在文献[10]中从唯象角度提出了将 Cu-O 链的作用等价于在 BCS-like 电导率的表达式中引进能反映“半导体”导电特征的设想¹⁾(记号与参量取值参见文献[10]):

$$\tilde{\sigma}_n = \ln(\Delta/\hbar\omega) [C_1 e^{-\Delta/k_B T} + (1 - C_1) k_B T/\Delta], \quad (26)$$

并阐明了两流模型近似的有效性. 这样, 于本例可认为(8)式在形式上仍可延续. 将相应参量代入, 即可望得到 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 超导媒质的 $\epsilon_r(\omega; T)$, 其实部和虚部分别示于图 4(a) 和 (b). 至此, 已完成了将原始 SBVP 转化为等价的分层介质谐振器问题. 后继处理将围绕等价问题的求解进行.

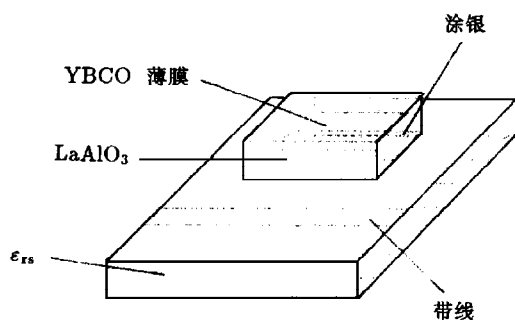


图 3 沉积于 $\text{LaAlO}_3(001)$ 的 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 薄膜超导介质谐振器结构(等价于分层介质谐振器)

1) 这里, 并非意味着 Cu-O 链层总是扮演半导体层的角色. 事实上, 当温度远低于 T_c 时, 它将转变为超导层. 可是这并不影响(26)式的有效性, 由于随着 T 的下降, $\Delta(T)$ 将增加, 使得括号中项变得足够小, 以致于可略去.

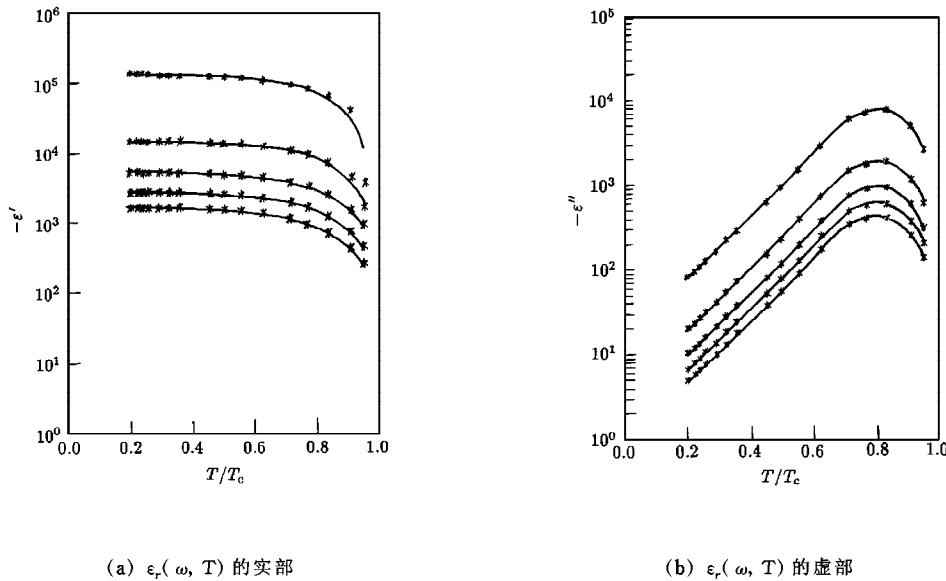


图 4 不同频率下, c 轴取向 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ 的复介电常数 $\epsilon_r(\omega, T)$ 随简约温度变化曲线 最低位曲线对应的频率为 10 GHz; 相邻两曲线对应频率间隔为 20 GHz

4 SDR 的变分解

鉴于结构相应横剖面线度远小于设想的谐振波长, 开端处场辐射现象可略去(见图 3). 该边值问题可视为二维 Laplace 问题, 其边界条件为 $\mathbf{E}_t|_{y=l, x=h, (2H+2d'+h)} = 0$. 因此, 讨论沿波矢方向(z 轴)单位长度的电容, 可演化出结构本征参量(几何的, 介电的)与谐振参量的关系. 然而, 即使对问题已进行了二维化假设, 用经典数值法来处理也并非是一件易事, 因为这些处理方法通常局限于封闭边界问题. 尽管除去在距实际边界一定远处硬性地引入闭边界那种较粗糙的近似外, 人们还发展了其他一些方法, 如 Green 函数法、混合求积求微法, 但这些方法显得很繁杂, 且计算耗时量大. 因此, 从更有效求解考虑, 下面将构造一个保角变换, 它在将原始边值问题解析映照为相应的闭问题同时, 也把 SDR 体外漏场对其特征的影响计入.

4.1 适于本例的保角变换

为了方便起见, 将待讨论的谐振结构剖面图重示于图 5(a), 同时给出选定的复坐标系. 因复 z 平面中问题的非闭性给分析带来诸多麻烦. 为“封闭”之, 考虑形如下式的变换:

$$w = u + iv = \mathcal{L}(z) \equiv \frac{\xi - i}{\xi + i}, \quad \xi = \exp\left(\frac{\pi/2}{h + b + d'} z\right), \quad (27)$$

能够证明, 映照算子 $\mathcal{L}$ 具有保圆性, 它将复 z 平面上圆, $\text{Im}(z) = 0$, 映射为 w 平面上的 $|w| = 1$, 而将前者的上半平面映为域 $|w| < 1$. w 平面中, 映射结构的剖面图如图 5(b)

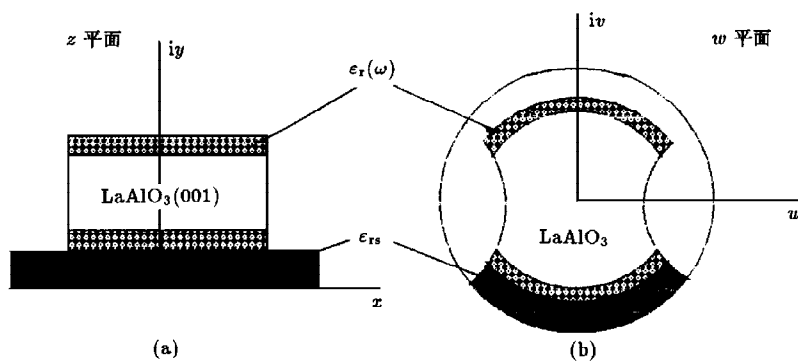


图5 复平面 $z = x + iy$ 与 $w = u + iv$ 上 SDR 的剖面图 (a) 为 z 平面上的结构; (b) 为变换面, w 平面上的结构

所示. 至于 $\xi = \exp\left(\frac{\pi/2}{h + b + d} z\right)$ 是从对称性考虑而选取的. 这将使后继分析相对简明些.

4.2 变分解表述

借助于变换的保角性, 能够证明两种不同媒质界面处场连续条件,

$$\begin{aligned} \epsilon_i \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_i &= \epsilon_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_j \text{ 仍然成立, 因此问题可表示为} \\ \nabla^2 \Phi &= 0, \\ \Phi|_{|w|=1} &= 0, \quad \Phi|_{\mathcal{A}(\theta_2)} = \text{const} \triangleq V_0, \\ \Phi|_{\mathcal{A}(\theta_1)} &= \frac{\epsilon_{rs} h}{\epsilon_{rs} h + \epsilon_r(\omega, T) 2d' + \epsilon_r 2b} V_0. \end{aligned} \quad (28)$$

利用变分原理, 待求标势函数 Φ 可由对泛函 $J(\Phi)$ 的取极小而得

$$\min_{\Phi} J(\Phi) = \min_{\Phi} \int_D \epsilon_r(u, v) |\nabla \Phi|^2 du dv, \quad (29)$$

其中积分域 D 为 $|w| \leq 1$, $h, 2b$ 分别为微带线、 LaAlO_3 衬底厚度, 而 $\epsilon_{rs}, \epsilon_r$ 则为各自相应的介电常数, $\nabla \Phi$ 表示为 Φ 的梯度操作, θ_1, θ_2 分别对应 z 平面中的 $\text{Im}(z) = h, (h + 2d' + 2b)$.

注意到对所构造的泛函 $J(\Phi)$, 齐次 Neumann 边界条件 $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\mathcal{A}(\theta_1), \mathcal{A}(\theta_2)} = 0$ 及界面条件

件 $\epsilon_i \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_i = \epsilon_j \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_j$ 都类属自然边界条件, 因此, 选试错函数时仅需照顾到 Dirichlet 条件.

而这又可通过选 Lagrange 多项式基函数来实现. 此时, 节点上 Φ 值作为变分参数. 实际操作中, 对原积分域用许多子三角形域去替代, 而子域边界上的节点 Φ 值则赋于前步

迭代结果. 为避免以协调原界面曲率而致子三角形数目过多, 技术上采用了于界面邻域的积分沿原始轮廓上进行的做法^[11].

针对图 5(b), 拐点处的奇异性问题尚待处理. 鉴于多项式基函数难以很好近似, 在邻近这些拐角处, 所选试错函数 Φ 形如

$$\Phi_n^s = r^{2n/3} \sin\left(\frac{2n}{3}\theta\right), \quad (30)$$

其中 r, θ 为原点“设定”在拐点的局域极坐标值, n 为整数. 由求得的标量函数中, 可以得到结构的线电容(分段表示)为

$$C_{ij} = \frac{1}{V_i - V_j} \int_c \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl, \quad (31)$$

其中积分分别沿 $|\boldsymbol{w}| = 1, \mathcal{L}(\theta_1)$ 和 $\mathcal{L}(\theta_2)$ 进行. 表 1 列出一些数值结果. 总线电容应为

$$C_0 \equiv C_{12} \pm C_{13} C_{23} / (C_{13} \pm C_{23}). \quad (32)$$

将此式与截面为 $2a \times 2b$ 的平行板电容公式进行类比, 可写出 SDR 的等效介电常数为

$$\epsilon_{re} \epsilon_0 a/b \equiv C_0. \quad (33)$$

而有关 SDR 谐振特征一些演化将受益于对 ϵ_{re} 的了解.

表 1 不同宽高比值 (a/b) 下 SDR 的分段线电容¹⁾

a/b	$C_{12}/\epsilon_0 \epsilon_r$	$C_{23}/\epsilon_0 \epsilon_{rs}$	C_{13}/ϵ_0	C_{13}/ϵ_0	$C_{23}/\epsilon_0 \epsilon_{rs}$	$C_{12}/\epsilon_0 \epsilon_r$	a/b
0.2	0.231830	0.783479	0.136127	1.149711	4.534978	1.390989	1.2
0.4	0.463622	1.533805	0.338844	1.352737	5.285346	1.622817	1.4
0.6	0.695493	2.284131	0.541561	1.451265	6.035762	1.854448	1.6
0.8	0.927324	3.304457	0.744277	1.648903	6.476632	2.086231	1.8
1.0	0.946994	3.784783	1.159155	1.846542	6.913102	2.318015	2.0

1) 取 $2b/h = 5$, $\epsilon_{rs} = 2.03$, LaAlO_3 的介电常数为 9.80, $\epsilon_r = (\epsilon_r(\omega, T) d' + 9.80 b) / (d' + b)$

5 YBa₂Cu₃O_{7- δ} SDR 的谐振特性

当 $\text{Re}(\epsilon_{re}) \gg \text{Im}(\epsilon_{re})$ 时(一般地, 环境温度低于超导媒质临界温度 T_c , 且 $\hbar\omega \ll k_B T$ 时, 该条件成立, 这里 $\hbar = h/2\pi$, h 为 Planck 常数, k_B 为 Boltzmann 常数), 介质谐振器谐振频率 F_0 或谐振波长 λ_0 可由 $\text{Re}(\epsilon_{re})$ 表示. 考虑 $\lambda_0/4$ 型结构, 所需相应长度 L 为

$$\lambda_0 \equiv 4L / \sqrt{\epsilon_{re}} \approx 4L / \sqrt{\text{Re}(\epsilon_{re})}. \quad (34)$$

于是, 对设定的谐振波长, 可望得出结构的尺寸.

谐振器的品质因素满足 $Q = \omega_0/2\delta\omega$, 其中 ω_0 为谐振角频率, $\delta\omega$ 为通带宽度, 它取决于组成谐振器材料的阻抗 $\tilde{Z}$ 及本征波阻抗 Z_n (前者取决于材料的介电参量, 后者正比于 C_0^{-1}):

$$W_n(\omega_0 + \delta\omega) - \text{Re}(\tilde{Z}) = \text{Im}(\tilde{Z}), \quad (35)$$

在 $\omega = \omega_0$ 处, 将 Z_n 展为 Taylor 级数, 并利用谐振条件 $Z_n(\omega_0) = \text{Re}(\tilde{Z})$, 参见(35)式, 取一级近似

$$\delta\omega = \text{Im}(\tilde{Z}) / \left(\frac{dZ_n}{d\omega} \right) \bigg|_{\omega=\omega_0}, \quad (36)$$

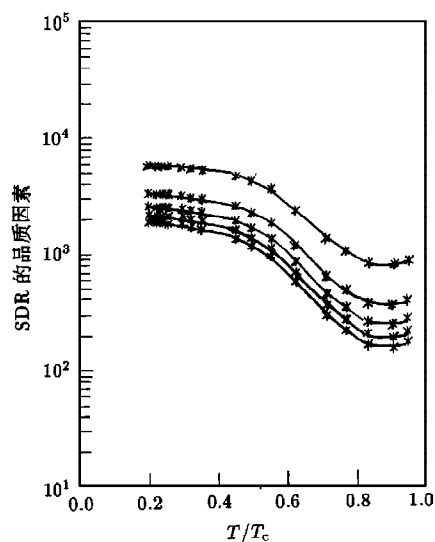


图6 $\lambda/4$ 谐振模式不同波型下,SDR 的品质因素随温度变化曲线.基波频率为 10 GHz;相邻波型频率间隔为 20 GHz;取 LaAlO_3 的损耗正切 $\tan \delta = 10^{-4}$

于是

$$Q = \omega_0 \left(\frac{dZ_n}{d\omega} \right) \bigg|_{\omega=\omega_0} / (2\text{Im}(\tilde{Z})). \quad (37)$$

依据这些表达式进行的计算曲线示于图 6.

作为对分析的实验检验,我们设计了 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}/\text{LaAlO}_3$ SDR. 取微带线厚度 $h = 0.25 \text{ cm}$, $2b/h = 3$, $a/b = 2$, SDR 的长度为 2.5 cm , 77 K 下相应基波型的频率、品质因素的计算及测试值分别为 10 和 10.09 GHz, 4960 和 4880. 表明计算与实验结果的一致程度是较好的,反映了本文提出的方法对分析横电磁波模式超导介质谐振器特征的有效性.不仅如此,我们还相信它也可以很好地用于其他一些两维 SBVP 问题,如超导微带及共面波导的传输特性的分析.因为从本质上看,对这些结构的等效介电参量的了解,等价于原问题的解决.

6 结 论

本文给出了对超导电性在电磁学绘景下的一种理解.提出了“负介电”一词作为对超导媒质的两个内禀特征:直流下的零电阻性及完全抗磁性的等价表述.该论点辅助于所构造的保角变换,使得原始超导边值问题可方便地由变分法求解.文中还给出了适宜于超导介质谐振器的几何、物理参数大范围变动时的设计图表.尽管对超导电性的物理本质的理解通常是在量子理论范畴上开展的.但由此所得到有关材料的宏观电磁行为必须与经典电磁理论的结论相符合.我们相信,此文的讨论将有助于解 SBVP 问题及超导体在微波频段中的应用研究,以致对超导参数的确定亦可能有帮助.

感谢与上海科技大学鲍家善教授、英国 Liverpool 大学 G.R.Court 教授和 C.E.Johnson 教授的讨论.对本校毫米波、亚毫米波实验室、中国科学院物理研究所、上海冶金研究所和上海硅酸盐研究所的有关人员的支持表示谢意.

- [1] T. Van. Duzer, Prospects for Applications of High Temperature Superconductors, Presented at 2nd Workshop on High Temperature Superconducting Electronic Devices, R & D Association for Future Electron Devices, Japan, June 1990.
- [2] J.C.Ribber *et al.*, IEEE Trans. Magn., **27**(1991), 2533.
- [3] B.G.Klopman *et al.*, IEEE Trans. MTT, **41**(1993), 781.
- [4] D.C.Mattis and J.Bardeen, Phys. Rev., **111**(1958), 412.
- [5] J.Bardeen, L.N.Cooper and J.R.Shrieffer, Phys. Rev., **108**(1957), 1175.
- [6] J.P.Tureneure, Ph.D. Thesis, Stanford University(1967).

- [7] S. P. Zhou *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **71**(1993), 2789.
- [8] M. Schluter and M. S. Hybertsen, *Physica*, **C162 - 164**(1989), 583.
- [9] D. Allender, J. Bray and J. Bardeen, *Phys. Rev.*, **B7**(1973), 1020.
- [10] 鲍家善、周世平、金汴骏, 低温物理学报, **14**(1992), 383,
- [11] S. H. Gould, Variational Method for Eigenvalue Problem (Toronto, University of Toronto Press, 1986).

THE VARIATIONAL SOLUTION TO SUPERCONDUCTIVE BOUNDARY VALUE PROBLEMS BASED ON THE NEGATIVE DIELECTRIC VERSION

ZHOU SHI-PING XU KE-XI

(Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

(Received 30 March 1995)

ABSTRACT

An analytical method is presented for investigating the resonant behaviors of composed resonator formed by depositing the c axis oriented $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ ($\delta \approx 0$) thin film on $\text{LaAlO}_3(001)$. The concept of the negative dielectric medium for a superconductor is introduced within the framework of the two-fluid model, which permits us to treat a superconductor as any other penetrable materials so as only its electromagnetic property is concerned. A conformal transformation is further suggested to map the original open boundary value problem to a closed one. This not only makes the original problem readily solved by using the variational technique, but also is powerful for the analyzing a kind of problems such as the propagation characteristics of the superconducting microstripe and coplanar waveguiding structures.

PACC: 7430G; 7420