

奇异拉氏量系统的整体量子正则对称性质^{*}

李子平[†]

(北京工业大学应用物理系, 北京 100022)

(1995 年 8 月 10 日收到)

从奇异拉氏量系统相空间路径积分的量子化形式出发, 导出了系统在增广相空间整体变换下的广义正则 Ward 恒等式和量子水平的守恒荷, 一般这些守恒荷有别于经典 Noether 荷. 给出了在杨-Mills 场论中的应用, 找到了新守恒荷.

PACC: 1110; 1130; 1115

1 引 言

对称性和守恒律的联系, 在经典理论中通常由 Noether 定理给出. Noether 定理及其推广传统的讨论是由位形空间中的变量来表述^[1]. 近来已建立了相空间中正则形式的 Noether 定理^[2,3]. Ward 恒等式及其推广在现代量子场论中占重要地位^[4-7]. 从路径(泛函)积分导出该恒等式, 通常也是用位形空间变量来表述^[8,9]. 它仅适用于相空间路径积分中关于正则动量的积分为 Gauss 型的情形. 相空间路径积分适用于普遍情形, 它比位形空间路径积分更基本^[10]. 在某些情形下即使相空间路径积分对正则动量的积分可作出, 所得到的位形空间中的有效拉氏量呈现出 δ -函数的奇异性^[11-13]. 用奇异拉氏量描述的系统在相空间中含固有约束, 为约束哈密顿系统^[1]. 当系统的约束结构比较复杂时, 要作出相空间路径积分中关于动量的积分是十分困难的, 甚至是不可能的. 因此从相空间路径积分的量子化方案出发来研究系统的量子正则对称性质, 就具有更基本的意义. 作者在以前的工作中, 已建立了系统在定域对称下的正则 Ward 恒等式^[14,15], 初步讨论了系统的整体量子正则对称性^[16]. 本文进一步研究奇异拉氏量系统的整体量子正则对称性.

2 广义正则 Ward 恒等式

设动力系由奇异拉氏量 $\mathcal{L}(\varphi^a, \varphi^a_\mu)$ 来描述, $\varphi^a_\mu = \partial_\mu \varphi^a(x)$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, $x = (x^0, x^i)$, $x^0 = t$, $i = 1, 2, 3$. 由于奇异拉氏量的 Hess 矩阵 $(H_{\varphi^a \varphi^b}) = (\partial^2 \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}^a \partial \dot{\varphi}^b)$ 退化, 该系统在相空间存在固有约束, 为约束哈密顿系统. 设 Λ_k ($k = 1, 2, \dots, K$) 为第一类约束, θ_i ($i = 1, 2, \dots, I$) 为第二类约束, 与第一类约束相联系的规范条件为 Ω_k ($k = 1, 2, \dots, K$). 此系统 Green 函数的相空间生成泛函为^[17]

^{*} 国家自然科学基金及北京市自然科学基金资助的课题.

[†] 中国高等科学技术中心(世界实验室)协联成员.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi^a \mathcal{D}\pi_a \prod_{i,k,l} \delta(\theta_i) \delta(\Lambda_k) \delta(\Omega_l) \det\{\Lambda_k, \Omega_l\} \\ \times [\det\{\theta_i, \theta_j\}]^{1/2} \exp\{i \int d^4x (\pi_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{H}_c + J_a \varphi^a)\}, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{H}_c$ 为系统的正则哈密顿量密度, $\mathcal{H}_c = \pi_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{L}$, π_a 为 φ^a 的正则动量, $\{\cdot, \cdot\}$ 代表场的 Poisson 括号. 这里仅对场量 φ^a 引入了外源, 对动量 π_a 未引入外源^[15]. 利用 δ -函数和 Grassmann 变量 $C_l(x)$, $\bar{C}_k(x)$ 的积分性质, 可将(1)式写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi^a \mathcal{D}\pi_a \mathcal{D}\lambda_m \mathcal{D}\bar{C}_k \mathcal{D}C_l \exp\{i [I_{\text{eff}}^p + \int d^4x J_a \varphi^a]\}, \quad (2)$$

其中 $\lambda_m = (\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)$, 且

$$I_{\text{eff}}^p = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}^p = \int d^4x \left\{ \pi_a \dot{\varphi}^a - \mathcal{H}_c + \lambda_i \theta_i + \lambda_k \Lambda_k + \lambda_l \Omega_l \right. \\ \left. + \int d^4y [\bar{C}_k(x) \{\Lambda_k(y), \Omega_l(y)\} C_l(y) + \frac{1}{2} \bar{C}_i(x) \{\theta_i(x), \theta_j(y)\} C_j(y)] \right\}. \quad (3)$$

为了简单, 记 $\varphi = (\varphi^a, \lambda_m, \bar{C}_k, C_l)$, $J = (J_a)$, $\pi = (\pi_a)$, 于是(3)式可写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \exp\{i [I_{\text{eff}}^p + \int d^4x J\varphi]\}. \quad (4)$$

考虑增广相空间中的无穷小整体变换

$$x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \epsilon_\sigma \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi), \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \epsilon_\sigma \xi^\sigma(x, \varphi, \pi), \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \epsilon_\sigma \eta^\sigma(x, \varphi, \pi), \quad (5)$$

其中 ϵ_σ ($\sigma=1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意参数, $\tau^{\mu\sigma}$, ξ^σ 和 η^σ 分别为 x , φ 和 π 的函数. 在(5)式的变换下, 设有效正则作用量 I_{eff}^p 的变分为

$$\Delta I_{\text{eff}}^p = \epsilon_\sigma \int d^4x F^\sigma(\varphi, \pi), \quad (6)$$

并设变换(5)式的 Jacobi 行列式为 1, 由于生成泛函(4)式在积分变量变换下的不变性, 于是有

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \left\{ 1 + i\epsilon_\sigma \int d^4x [F^\sigma + J(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma}) + \partial_\mu (J\varphi \tau^{\mu\sigma})] \right\} \\ \times \exp\{i [I_{\text{eff}}^p + \int d^4x J\varphi]\} \\ = \left\{ 1 + i\epsilon_\sigma \int d^4x [F^\sigma + J(\xi^\sigma - \tau^{\mu\sigma} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J}) + \partial_\mu (\tau^{\mu\sigma} J \frac{\delta}{\delta J})] \right\} \bigg|_{\substack{\pi \rightarrow \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi} \\ \varphi \rightarrow \frac{1}{i} \delta / \delta J}} \\ \times Z[J] = 0. \quad (7)$$

从而得到: 如果有效正则作用量(3)式在(5)式变换下的变分适合(6)式, 且变换(5)式的 Jacobi 行列式为 1, 那么生成泛函(4)式满足下列关系式:

$$\int d^4x \left[F^\sigma + J \left(\xi^\sigma - \tau^{\mu\sigma} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J} \right) + \partial_\mu \left(\tau^{\mu\sigma} J \frac{\delta}{\delta J} \right) \right] \bigg|_{\substack{\pi \rightarrow \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi} \\ \varphi \rightarrow \frac{1}{i} \delta / \delta J}} Z[J] = 0. \quad (8)$$

我们称(8)式为广义正则 Ward 恒等式. 当有效正则作用量 I_{eff}^p 在(5)式变换下不变时, (8)式化为

$$\int d^4x \left[J \left(\xi^\sigma - \tau^{\mu\sigma} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta J} \right) + \partial_\mu \left(\tau^{\mu\sigma} J \frac{\delta}{\delta J} \right) \right]_{\pi \rightarrow \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\varphi}, \varphi \rightarrow \frac{1}{i} \delta / \delta J} Z[J] = 0. \quad (9)$$

将(8)或(9)式关于外源 $J(x)$ 求多次泛函微商, 然后让外源 J 为零, 即可得到诸 Green 函数间的关系.

3 量子守恒荷

考虑与(5)式相应的定域变换

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \Delta x^\mu = x^\mu + \epsilon_\sigma(x) \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi), \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) + \Delta \varphi(x) = \varphi(x) + \epsilon_\sigma(x) \xi^\sigma(x, \varphi, \pi), \\ \pi'(x') &= \pi(x) + \Delta \pi(x) = \pi(x) + \epsilon_\sigma(x) \eta^\sigma(x, \varphi, \pi), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\epsilon_\sigma(x)$ ($\sigma=1, 2, \dots, r$) 为无穷小任意函数, 它们的值及其微商在时空区域的边界上为零. 在(10)式变换下, 有效正则作用量的变分为^[1]

$$\begin{aligned} \Delta I_{\text{eff}}^p &= \int d^4x \epsilon_\sigma(x) \left\{ \frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \varphi} (\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \pi} (\eta^\sigma - \pi_\mu \tau^{\mu\sigma}) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu [(\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma})] \right\} \\ &\quad + \int d^4x [(\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \tau^{\mu\sigma} \partial_\mu \epsilon_\sigma(x) + \pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma}) D\epsilon_\sigma(x)], \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $D = d/dt$, 且

$$\frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \dot{\varphi}} = \pi, \quad \frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \varphi} = -\dot{\pi}, \quad \frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \pi} = \dot{\varphi}, \quad \frac{\delta I_{\text{eff}}^p}{\delta \pi} = -\dot{\varphi}. \quad (12)$$

H_{eff} 为与 $L_{\text{eff}}^p = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}^p$ 相应的哈密顿量. 在(5)式的整体变换下, 有效正则作用量的变分适合(6)式, 即(11)式的第一个积分等于(6)式等号右端. 由 $\epsilon_\sigma(x)$ 的边界条件, 可将(11)式写为

$$\delta I_{\text{eff}}^p = \int d^4x \epsilon_\sigma(x) \{ F^\sigma - \partial_\mu [(\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \tau^{\mu\sigma}] - D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma})] \}. \quad (13)$$

将变换(10)式的 Jacobi 行列式记为 $J[\varphi, \pi, \epsilon]$. 相空间生成泛函(4)式在(10)式的变换下不变, 表明 $\delta Z / \delta \epsilon_\sigma(x) = 0$. 将(10)和(13)式代入(4)式后, 并对 $\epsilon_\sigma(x)$ 求泛函微商, 得

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \{ \partial_\mu [(\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}}) \tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma})] - F^\sigma - J_0^\sigma - M^\sigma \} \\ &\quad \times \exp \left\{ i \left[I_{\text{eff}}^p + \int d^4x J\varphi \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$J_0^\sigma = -i^{\delta J[\varphi, \pi, \epsilon]} / \delta \epsilon_\sigma(x) \big|_{\epsilon_\sigma(x)=0}, \quad (15)$$

$$M^\sigma = J(\xi^\sigma - \varphi_\mu \tau^{\mu\sigma}). \quad (16)$$

将(14)式关于外源 $J(x)$ 求 n 次泛函微商, 得

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \left\{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu\tau^{\mu\sigma})] - F^\sigma - J_0^\sigma - M^\sigma \right\} \\ & \times \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) - i \sum_j \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n) \\ & \times N^\sigma \delta(x - x_j) \Big\} \exp \left\{ i \left[I_{\text{eff}}^b + \int d^4x J\varphi \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$N^\sigma = \xi^\sigma - \varphi_\mu\tau^{\mu\sigma}. \quad (18)$$

在(17)式中, 令 $J=0$, 得

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T^* \{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu\tau^{\mu\sigma})] - F^\sigma - J_0^\sigma \} \\ & \times \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) | 0 \rangle \\ & = i \sum_j \langle 0 | T^* [\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)N^\sigma] | 0 \rangle \delta(x - x_j), \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $|0\rangle$ 代表场的基态, T^* 为一种特定的编时算符^[8]. 固定 t , 让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \rightarrow +\infty, \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \rightarrow -\infty,$$

利用约化公式, 可将(19)式写为

$$\langle \text{out}, m | \{ \partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu\tau^{\mu\sigma})] - F^\sigma - J_0^\sigma \} | n - m, \text{in} \rangle = 0. \quad (20)$$

由于 m 和 n 任意, 从而有算符等式

$$\partial_\mu [(\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}_{\text{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi(\xi^\sigma - \varphi_\mu\tau^{\mu\sigma})] - F^\sigma - J_0^\sigma = 0. \quad (21)$$

假使在无穷远处场为零, 将(21)式在三维空间区域上积分, 利用 Gauss 定理, 得

$$D \int_V d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_k\tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}] = \int_V d^3x (F^\sigma + J_0^\sigma), \quad (22)$$

其中指标 k 求和由 1 至 3. 这样, 我们得到: 如果系统的有效正则作用量 I_{eff}^b 在(5)式的整体变换下不变, 且对应的定域变换(10)式的 Jacobi 行列式与 $\epsilon_\sigma(x)$ 无关, 那么, 该系统存在如下守恒荷:

$$Q^\sigma = \int_V d^3x [\pi(\xi^\sigma - \varphi_k\tau^{k\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}}\tau^{0\sigma}]. \quad (23)$$

此结果对理论无反常时成立. 量子守恒荷(23)式相应于经典正则形式 Noether 定理中的守恒律^[2,3]. 对于奇异拉氏量系统, 由于系统在相空间中存在约束, 量子化后系统的 $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ 一般不同于经典的正则哈密顿量 $\mathcal{H}$, 这体现了约束带来的量子效应. 因此, 一般而言量子守恒荷与经典守恒律不同. 此外, 存在守恒荷(23)式的条件是: 除整体变换保持有效正则作用量 I_{eff}^b (而不是正则作用量 I^b) 不变以外, 其相应的定域变换的 Jacobi 行列式还应与 $\epsilon_\sigma(x)$ 无关. 由此可见: 经典理论中对称性和守恒律的联系, 在量子理论中一般不再保持.

上述导出量子水平下守恒荷的方法, 其显著优点在于毋需作出相空间中生成泛函对正则动量的路径积分. 一般而言作出该积分是较复杂的, 甚至是不可能的. 因此, 上述理论形式具有更普遍的意义.

4 杨-Mills 场

纯杨-Mills 场的拉氏量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (24)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad (25)$$

其中 f_{bc}^a 为非 Abel 规范群的结构常数. 拉氏量(24)式是奇异的. 系统的相空间约束为

$$\Lambda_1^a = \pi_0^a \approx 0, \quad (26)$$

$$\Lambda_2^a = \partial^i \pi_i^a - gf_{bc}^a A_i^b \pi_c^i \approx 0, \quad (27)$$

其中 π_μ^a 为 A_μ^a 的共轭动量. 记号 $\approx$ 代表“弱等”, 它表示等式在约束所确定的超曲面上成立.

采用路径积分量子化, 规范条件取为

$$\Omega_1^a = \partial^i \pi_i^a + \nabla^2 A_0^a - gf_{bc}^a A_i^b \partial^i A_0^c \approx 0, \quad (28)$$

$$\Omega_2^a = \partial^i A_i^a \approx 0. \quad (29)$$

系统 Green 函数的相空间生成泛函为^[1]

$$\begin{aligned} Z[J] = & \int \mathcal{D} A_\mu^a \mathcal{D} \pi_\mu^a \delta(\Lambda_1^a) \delta(\Lambda_2^a) \delta(\Omega_1^a) \delta(\Omega_2^a) \det\{\Lambda_k, \Omega_l\} \\ & \times \exp\left\{i \int d^4 x [\pi_\mu^a \dot{A}_\mu^a - \mathcal{H}_c + J_\mu^a A_\mu^a]\right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

因子 $\delta(\partial^i A_i^a) \det\{\Lambda_k, \Omega_l\}$ 可用 $\delta(\partial^\mu A_\mu^a) \det M_L$ 来代替^[18],

$$M_L = (\delta_b^a \partial^\mu \partial_\mu + gf_{bc}^a A_\mu^c \partial^\mu) \delta^4(x-y). \quad (31)$$

理论规范无关^[18], (30)式中的 Ω_l^a 可换为 $\Omega_l^a = \Omega_l^a - p_l^a(x)$ ($p_l^a(x)$ 是与规范无关的函数). 将

(30)式乘以 $[-\frac{1}{2\alpha_1} \int d^4 x (p_l^a)^2]$ 后, 对 $\mathcal{D} p_l^a(x)$ 作路径积分 (α_l 为参数), 略去无关紧要的因子, 得

$$\begin{aligned} Z[J, \xi, \bar{\zeta}, \zeta] = & \int \mathcal{D} A_\mu^a \mathcal{D} \pi_\mu^a \mathcal{D} \bar{C}^a \mathcal{D} C^a \mathcal{D} \lambda_k^a \exp\left\{i \int d^4 x [\mathcal{L}_{\text{eff}}^b + J_\mu^a A_\mu^a \right. \\ & \left. + \bar{\zeta}^a C^a + \bar{C}^a \zeta^a + \xi_k^a \lambda_k^a]\right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\bar{\zeta}^a(x)$, $\zeta^a(x)$ 和 $\xi_k^a(x)$ 分别为鬼场 $C^a(x)$ $\bar{C}^a(x)$ 和乘子场 $\lambda_k^a(x)$ 的外源,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^b = \mathcal{L}^b + \mathcal{L}_{gh} + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}'_m, \quad (33)$$

$$\mathcal{L}^b = \pi_\mu^a \dot{A}_\mu^a - \mathcal{H}_c, \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{gh} = -\partial^\mu \bar{C}^a D_{b\mu}^a C^b, \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2\alpha_2} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \quad (36)$$

$$\mathcal{L}'_m = \lambda_k^a \Lambda_k^a - \frac{1}{2\alpha_1} (\Omega_1^a)^2, \quad (37)$$

$$D_{b\mu}^a = \delta_b^a \partial_\mu + g f_{bc}^a A_\mu^c. \quad (38)$$

在下列整体变换

$$C^a(x) = C^a(x) + i g \epsilon^v (T_\sigma)_b^a C^b(x) A_\nu^\sigma(x), \quad (39a)$$

$$\bar{C}^a(x) = \bar{C}^a(x) - i g \epsilon^v \bar{C}^b(x) (T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma(x) + \frac{i g}{\square} \epsilon^v \partial_\mu [\bar{C}^b(x) (T_\sigma)_b^a \partial^\mu A_\nu^\sigma(x)], \quad (39b)$$

$$A_\mu^a(x) = A_\mu^a(x) + \epsilon^v D_{\sigma\mu}^a A_\nu^\sigma(x), \quad \pi_a^{\prime\prime}(x) = \pi_a^{\prime\prime}(x) + g \epsilon^v f_{ac}^b \pi_c^{\prime\prime}(x) A_\nu^b(x) \quad (39c)$$

下, $\mathcal{L}^b + \mathcal{L}_{gh}$ 不变^[15], 其中 ϵ^v 为参数, T_σ 为规范群生成元的表示矩阵. (39c) 式又可写为

$$\bar{C}^a(x) = \bar{C}^a(x) - i g \epsilon^v \bar{C}^b(x) (T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma(x) + g \epsilon^v \int d^4 y \Delta_0(x, y) \partial_\mu [\bar{C}^b(y) (T_\sigma)_b^a \partial^\mu A_\nu^\sigma(y)], \quad (39'c)$$

其中

$$\square \Delta_0(x, y) = i \delta^4(x - y). \quad (40)$$

设 $\mathcal{L}_f + \mathcal{L}'_m$ 在 (39) 式变换下的变更记为 $\delta(\mathcal{L}_f + \mathcal{L}'_m) = \epsilon^v F_v(A, \pi)$. 变换 (39) 式的 Jacobi 行列式为 1^[15, 19]. 由广义正则 Ward 恒等式 (8), 有

$$\int d^4 x \left\{ F_v - \partial_\mu J_\sigma^\mu \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} - i g f_{ac}^b \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\mu} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} + g \bar{\zeta}_a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} - i g \zeta_a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta}{\delta \zeta_b} \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} + \frac{g}{\square} \partial_\mu \left[\frac{\delta}{\delta \zeta_b} (T_\sigma)_b^a \zeta_a \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_\sigma^\nu} \right] \right\} Z[J_a^\mu, \xi_k^a, \bar{\zeta}^a, \zeta^a] = 0. \quad (41)$$

令 $Z[J_a^\mu, \xi_k^a, \bar{\zeta}^a, \zeta^a] = \exp\{i W[J_a^\mu, \xi_k^a, \bar{\zeta}^a, \zeta^a]\}$, 按寻常方法通过泛函 Legendre 变换, 将 $W[J_a^\mu, \xi_k^a, \bar{\zeta}^a, \zeta^a]$ 换为正规顶角的生成泛函 $\Gamma[A_\mu^a, \lambda_k^a, C^a, \bar{C}^a]$, 这样 (41) 式可写为

$$\int d^4 x \left\{ F_v - A_\nu^\sigma \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^\sigma} - i g f_{ac}^b A_\nu^\sigma A_\mu^c \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} + g A_\nu^\sigma C^a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta \Gamma}{\delta C^b} - g A_\nu^\sigma \bar{C}^a (T_\sigma)_b^a \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^b} + g A_\nu^\sigma \partial^\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{C}^a} \frac{1}{\square} \right) (T_\sigma)_b^a \bar{C}^b \right] \right\} = 0. \quad (42)$$

将 (42) 式关于 $A_\lambda(x_1)$, $C^c(x_2)$ 和 $\bar{C}^f(x_3)$ 求泛函微商, 然后让所有场为零, 得

$$\begin{aligned} & (T_\sigma)_b^e \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^f(x_3) \delta C^b(x_1)} - (T_\sigma)_b^f \delta(x_1 - x_3) \frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^b(x_1) \delta C^c(x_2)} \\ & + \partial_{x_1}^\mu \frac{\delta^3 \Gamma[0]}{\delta C^f(x_3) \delta C^c(x_2) \delta A_\sigma^\mu(x_1)} \\ & + \partial_{x_1}^\mu \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta^2 \Gamma[0]}{\delta \bar{C}^a(x_1) \delta C^c(x_2)} \frac{1}{\square} \right) (T_\sigma)_f^a \delta(x_1 - x_3) \right] = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

这个规范场-鬼场固有(正规)顶角的 Ward 恒等式, 曾用另外方法得到^[15], 它有别于 BRS 不变的寻常 Ward 恒等式.

其次, 变换 (39c) 式是第一类约束作为规范生成元所产生的变换, 在此规范变换下, 第一类约束 (26), (27) 式不会离开约束超曲面^[15]. 因此在 (39) 式变换下, $\delta \mathcal{L}'_m \approx 0$, $\delta \mathcal{L}_f \approx 0$. 就是说, 沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上, 有效正则作用量不变, 按 (23) 式得系统的量子守恒荷为

$$\begin{aligned}
Q_v = & \int d^3 x \left\{ \pi_\mu^a D_{b\mu}^a A_\nu^b + \pi_a \dot{g} (T_\sigma)_b^a C^b A_\nu^\sigma + \bar{\pi}_a [-i g \bar{C}^b (T_\sigma)_b^a A_\nu^\sigma \right. \\
& \left. + g \int d^4 y \Delta_0(x, y) \partial_\mu (\bar{C}^b(y) (T_\sigma)_b^a \partial^\mu A_\nu^\sigma(y)) \right\}, \quad (44)
\end{aligned}$$

其中 π_μ^a , π_a 和 $\bar{\pi}_a$ 分别为 A_μ^a , C^a 和 $\bar{C}^a$ 的正则共轭动量,

$$\pi_\mu^a = -F_a^{0\mu}, \quad \pi_a = -\dot{\bar{C}}^a, \quad \bar{\pi}_a = D_{t0}^a C^a. \quad (45)$$

- [1] 李子平, 经典和量子约束系统及其对称性质(北京工业大学出版社, 北京, 1993).
- [2] 李子平, 物理学报, **41**(1992), 710.
- [3] Li Zi-ping, *Intern. J. Theor. Phys.*, **32**(1993), 201.
- [4] J. C. Ward, *Phys. Rev.*, **77**(1950), 2931.
- [5] Y. Takahashi, *Nuovo Cimento*, **6**(1957), 371.
- [6] A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.*, **10**(1972), 99.
- [7] J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B33**(1971), 436.
- [8] H. Suura and B. L. Young, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 4353; B. L. Young, *Introduction to Quantum Field Theories* (Science Press, Beijing, 1987).
- [9] T. Lhallabi, *Intern. J. Theor. Phys.*, **28**(1989), 875.
- [10] M. M. Mizrahi, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 298.
- [11] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 885.
- [12] I. S. Gerstein, R. Jackiw, B. W. Lee and S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D3**(1971), 2468.
- [13] T. S. Du, H. C. Yin and T. N. Ruan, *Nucl. Phys.*, **B164**(1980), 103.
- [14] Li Zi-ping, *Europhys. Lett.*, **27**(1994), 563.
- [15] Li Zi-ping, *Intern. J. Theor. Phys.*, **34**(1995), 523.
- [16] 李子平, 高能物理与核物理, **19**(1995), 1012.
- [17] P. Senjanovic, *Ann. Phys. (NY)*, **100**(1976), 227.
- [18] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1982), p. 169.
- [19] 邝宇平、易余萍, 高能物理与核物理, **4**(1980), 286.

GLOBAL QUANTAL CANONICAL SYMMETRY PROPERTIES FOR A SYSTEM WITH A SINGULAR LAGRANGIAN

LI ZI-PING

(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022*)

(Received 10 August 1995)

ABSTRACT

Starting from the quantization formalism of the phase-space path integral for a system with a singular Lagrangian, the generalized canonical Ward identities and conserved charges at quantum level are deduced under the global transformation in extended phase space. In general, the quantal conserved charges are different from classical ones. We give a preliminary application to Yang-Mills theory, the new quantal conserved charges are found.

PACC: 1110; 1130; 1115