

光折变振荡器中的模式巡游现象

庄 军

(中国科学院上海光学精密机械研究所高功率激光物理国家实验室, 上海 201800)

谭维翰

(上海大学物理系, 上海 201800)

(1995 年 7 月 25 日收到; 1995 年 10 月 4 日收到修改稿)

在弱场条件下, 给出了单向环形光折变振荡器的多模振荡方程. 当模式处于非简并状态时, 该方程可进一步化为 Lotka-Volterra 方程, 从而反映出模式间的竞争现象; 而当这些模式处于简并或准简并状态时, 通过数值模拟发现由于模式间的相互作用加强, 一定条件下引起了时空不稳定行为, 例如横模间的周期巡游现象.

PACC: 4260; 4265

1 引 言

在对光学非线性系统的时空动力学行为研究中, 激光器作为一个典型的非线性系统以其丰富的时空行为越来越引起人们的注意, 并且已经在实验和理论的研究中取得了一些进展^[1-3]. 除激光系统外, 近年来人们不断地发现在以光折变材料为增益介质的参量振荡器中也同样存在着大量的时空现象, 如横模周期巡游、相位奇点的出现及时空混沌行为等等^[4,5], 而且表现明显、稳定, 从而为研究光学非线性系统的时空动力学行为提供了又一个良好的物理模型. 在理论方面, 虽然已给出了这种振荡器稳态输出的一些特性及其多模的竞争过程^[6,7], 但时空不稳定现象还未能得到全部的反映.

本文同样考虑多模振荡的情况, 并且着重讨论其在简并或准简并状态下的时空行为, 因此与以往的理论相比模式间的相互作用将变得更为复杂. 首先, 我们给出光折变振荡器的多模振荡方程, 为简化, 假设振荡器工作在弱场极限区, 从而可忽略抽运光的损耗. 与激光器相同, 在处理上直接采用模式分解的方法^[2]. 其次, 通过数值模拟对三模振荡作了初步的研究, 结果表明模式简并所引起的相互作用一定条件下导致了不稳定现象, 如参数选择合适, 三个模式还将表现出周期巡游行为, 与实验观察到的结果相符^[4].

2 光折变振荡器的多模振荡方程

当两束光通过光折变介质时, 一定条件下将会引起能量的转移, 从而使得其中的某一束光得到放大. 这种现象产生的原因在于两束光所形成的强度干涉花样与所感应出的折射率光栅之间存在着一一定的相位移动 ϕ , 并且当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 时最有利于能量的转移. ϕ 的值一

般不仅包括由于光场强度花样运动所产生的相位移动,而且还包括晶体的非局域响应所引起的相位移动 ϕ_0 . 其中 ϕ_0 的值一方面由晶体本身的性质决定,另一方面也可通过对晶体外加直流电场来改变,通常随着外加电场的不同, ϕ_0 的值可在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 范围内变化^[8,9].

基于光折变介质这种两波相互作用的放大原理,可构成如图 1 所示的单向环形光折变振荡器,它由三块反射镜 M_1, M_2, M_3 组成,其中 M_1, M_2 为全反射镜, M_3 的反射率为 R , 腔长为 L , 晶体的长度为 l_A . 为讨论简单,我们认为这两束光的偏振方向相同,并把抽运光 $E_p(t, r)$ 取成平面波

$$E_p(t, r) = A_p e^{[i(k_p \cdot r - \omega_p t)]}, \quad (1)$$

其中 A_p 作为常数是因为我们仅讨论信号光远小于抽运光强度的弱场情况,因此可近似忽略抽运光的损耗. 而对于信号光 $E_s(t, r)$ 则应是多个模式的叠加

$$E_s(t, r) = \sum_j A_j(t, r) e^{[i(k_j \cdot r - \omega_j t)]},$$

j 指示不同的振荡模式,如果提取快变因子 $e^{[i(k_c \cdot r - \omega_c t)]}$, 则上式可进一步写成

$$E_s(t, r) = A_s(t, r) e^{[i(k_c \cdot r - \omega_c t)]}, \quad (2)$$

其中

$$A_s(t, r) = \sum_j A_j(t, r) e^{[i(k_j - k_c) \cdot r - (\omega_j - \omega_c) t]},$$

ω_c 为参考频率,在所考虑的模式中,它可任意选其中某一模式的空腔谐振频率. 在一定条件下,由(1), (2)式给出的抽运光和信号光将在光折变介质中形成一个随时间而发生迅速变化的强度干涉花样,但另一方面介质的响应却需要一定的时间,因此在这种情况下强度干涉花样所感应出的折射率光栅 $\Delta n(t, r)$ 在弱调制近似下应写成^[8]

$$\Delta n(t, r) = \Delta n_s e^{i\phi_0} \frac{1}{\tau_0} \int_0^t \tilde{F}(t', r) e^{-\frac{t-t'}{\tau_0}} dt' + \text{c.c.},$$

$$\tilde{F}(t', r) = \frac{A_p A_s^*(t', r)}{I_0(t', r)} e^{i[(k_p - k_c) \cdot r - \delta_{pc} t']}, \quad (3)$$

其中 Δn_s 为光折变饱和常数, ϕ_0 就是前面所提及的非局域相位移动, τ_0 是晶体的响应时间, $\delta_{pc} = \omega_p - \omega_c$, $I_0(t', r) = I_p + I_s$, 而 $I_p = |A_p|^2$, $I_s = \sum_j |A_j(t', r)|^2$. 所以此时光折变介质的折射率 $n(t, r)$ 应写为 $n = n_0 + \Delta n(t, r)$, n_0 表示两光束不发生能量转移时的折射率. 在上式中考虑到信号光较弱,因此已忽略了模与模之间的强度干涉花样所感应出的折射率光栅^[6], 并且响应时间也近似作为常数. 把(1), (2), (3)式代入 Maxwell 方程,并利用缓变近似可得关于信号光所满足的方程

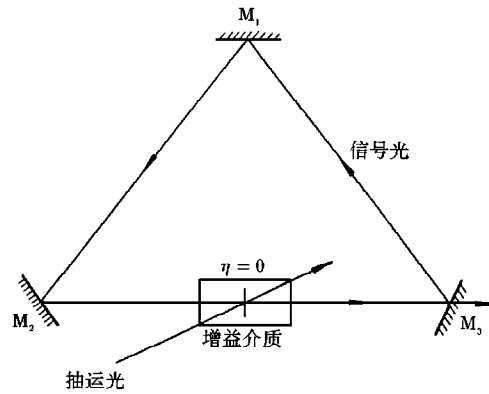


图 1

$$\begin{aligned}
& -i \frac{c^2}{2 n_0^2 \omega_c} \nabla_{\perp}^2 A_s + \frac{\partial A_s}{\partial t} + \left(\frac{c}{n_0} \right) \frac{\partial A_s}{\partial z} \\
& = i \frac{2 \Delta n_s \pi}{\lambda} \left(\frac{c}{n_0} \right) I_p \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}}}{\tau_0} e^{-i(\phi_0 + \delta_{pc} t)} \left[\int_0^t \frac{A_s}{I_0} e^{i \delta_{pc} t'} e^{\frac{t'}{\tau_0}} dt' \right], \quad (4)
\end{aligned}$$

其中 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$. 为简化, 引入

$$\begin{aligned}
E &= A_s e^{i \Delta_1 t}, \\
P &= - \left[\frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}}}{\tau_0} \int_0^t \frac{A_s}{I_0} e^{i \delta_{pc} t'} e^{\frac{t'}{\tau_0}} dt' \right] e^{-i \Delta_2 t},
\end{aligned}$$

其中 $\Delta_1 = \omega_s - \omega_c$, $\Delta_2 = \omega_p - \omega_s$, ω_s 表示空腔谐振频率为 ω_c 的模式在实际振荡时的频率,

再对变量作如下变换, $\tau = \frac{1}{\tau_0} t$, $\eta = \frac{z}{L}$, $\rho = r \left(\frac{\pi n_0}{L \lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$, 则(4)式变成

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{4} \nabla_{\perp}^2 E + \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial E}{\partial \tau} = i \frac{\delta'_1}{\nu} E - \alpha L P, \\
& \frac{\partial P}{\partial \tau} = - \left[\frac{E}{I_p + I_s} + (1 + i \Delta'_2) P \right], \quad (5)
\end{aligned}$$

其中 $\delta'_1 = \frac{\Delta_1}{\gamma_{\perp}}$, $\Delta'_2 = \frac{\Delta_2}{\gamma_{\perp}}$, $\gamma_{\perp} = \frac{1}{\tau_0}$, $\nu = \frac{c}{n_0 \gamma_{\perp} L}$, $\alpha = i \frac{2 \Delta n_s I_p \pi}{\lambda} e^{-i \phi_0}$. 可见(5)式与激光器的 M-B 方程有一定的相似性.

与激光器一样, 为处理(5)式中的衍射因子 $\nabla_{\perp}^2 E$, 我们用空腔本征模对 E 进行分解^[2], 即令

$$\begin{aligned}
E(\rho, \phi, \eta, \tau) &= \sum_m f_m(\eta, \tau) A_m(\rho, \phi, \eta), \\
P(\rho, \phi, \eta, \tau) &= \sum_m q_m(\eta, \tau) A_m(\rho, \phi, \eta), \quad (6)
\end{aligned}$$

式中 $A_m(\rho, \phi, \eta)$ 为腔模函数, m 表示不同的横模指标, 包括角向指标 (l) 和径向指标 (p), 为方便, 没有标出模式的纵向指标 n . 把(6)式代入(5)式, 并利用 $A_m(\rho, \phi, \eta)$ 的正交归一化关系 $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \rho d\rho A_{m_1} A_{m_2}^* = \delta_{m_1 m_2}$ 可得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_m}{\partial \eta} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial f_m}{\partial \tau} = i \frac{\delta'_1}{\nu} f_m - \alpha L q_m, \\
& \frac{\partial q_m}{\partial \tau} = - \left[(1 + i \Delta'_2) q_m + \frac{f_m}{I_p} - \frac{1}{I_p^2} \sum_{m_1 m_2} f_{m_1} |f_{m_2}|^2 \Gamma_{m_1 m_2 m} \right], \quad (7)
\end{aligned}$$

考虑到 $I_s \ll I_p$, 对(5)式中的 $\frac{E}{I_p + I_s}$ 已作了近似, 即 $\frac{E}{I_p + I_s} \approx \frac{E}{I_p} - \frac{E}{I_p^2} I_s$. (7)式中的 $\Gamma_{m_1 m_2 m}$ 为横模耦合系数

$$\Gamma_{m_1 m_2 m} = \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi A_{m_1} A_{m_2} A_m^* A_m^*(\rho, \phi, \eta).$$

另一方面对于光场的边界条件, 如果图 1 中的坐标原点取在晶体中心, 那么具体可写为^[2]

$$f_m\left(-\frac{1}{2}\frac{l_A}{L}, \tau\right) = \sqrt{R}\exp(-i\delta_m)\exp(i\delta'_1\gamma_\perp\frac{L-l_A}{c})f_m\left(\frac{1}{2}\frac{l_A}{L}, \tau-\gamma_\perp\frac{L-l_A}{c}\right), \quad (8)$$

其中 $\delta_m = \frac{\omega_m - \omega_c}{(c/L)}$, ω_m 为模式的空腔谐振频率, 同样没有标出纵向指标 n . 为使上式变成标准的周期形式, 作如下变换:

$$\eta' = \frac{L}{l_A}\eta,$$

$$\tau' = \tau + \gamma_\perp\frac{L-l_A}{c}\left(\frac{L}{l_A}\eta + \frac{1}{2}\right).$$

并令

$$f_m(\eta', \tau') = \tilde{f}_m(\eta', \tau')L_m(\eta'),$$

$$q_m(\eta', \tau') = \tilde{q}_m(\eta', \tau')L_m(\eta'),$$

其中

$$L_m(\eta') = \exp\left[-\left(\ln\sqrt{R} - i\delta_m + i\delta'_1\gamma_\perp\frac{L-l_A}{c}\right)\left(\eta' + \frac{1}{2}\right)\right], \quad (9)$$

则边界条件(8)式成为

$$\tilde{f}_m\left(-\frac{1}{2}, \tau'\right) = \tilde{f}_m\left(\frac{1}{2}, \tau'\right), \quad (10)$$

而运动方程(7)式经变换后成为

$$\frac{\partial \tilde{f}_m}{\partial \eta'} + \frac{L\gamma_\perp}{c}\frac{\partial \tilde{f}_m}{\partial \tau'} = \left(\ln\sqrt{R} - i\delta_m + i\delta'_1\gamma_\perp\frac{L}{c}\right)\tilde{f}_m - \alpha l_A \tilde{q}_m,$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_m}{\partial \tau'} = -\left[(1 + i\Delta'_2)\tilde{q}_m + \frac{\tilde{f}_m}{I_p} - \frac{1}{I_p^2}\sum_{m_1 m_2 m}\Gamma_{m_1 m_2 m}\left(\frac{L_{m_1}L_{m_2}L_{m_2}^*}{L_m}\right)\tilde{f}_{m_1}|\tilde{f}_{m_2}|^2\right]. \quad (11)$$

推导过程中近似认为 $L + (n_0 - 1)l_A \approx L$, 而 $\left(\frac{L_{m_1}L_{m_2}L_{m_2}^*}{L_m}\right)$, 利用(9)式可具体写为

$$\left(\frac{L_{m_1}L_{m_2}L_{m_2}^*}{L_m}\right) = \exp\left[i\frac{L}{c}(\omega_{m_1} - \omega_m)\left(\eta' + \frac{1}{2}\right)\right]\exp\left[-\ln R\left(\eta' + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (12)$$

再利用边界条件(10), 在(11)式两边对空间变量 η' 进行积分, 并定义

$$\bar{f}_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\eta' \tilde{f}_m(\eta', \tau'),$$

$$\bar{q}_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\eta' \tilde{q}_m(\eta', \tau').$$

从而可得

$$\frac{\partial \bar{f}_m}{\partial \tau'} = -K'(1 + i\alpha'_m - i\Delta'_1)\bar{f}_m - \tilde{R}I_p K' \bar{q}_m,$$

$$\frac{\partial \bar{q}_m}{\partial \tau'} = -\left[(1 + i\Delta'_2)\bar{q}_m + \frac{\bar{f}_m}{I_p} - \frac{1}{I_p^2}\sum_{m_1 m_2 m}\Gamma_{m_1 m_2 m}C_{m_1 m}\bar{f}_{m_1}|\bar{f}_{m_2}|^2\right], \quad (13)$$

其中

$$C_{m_1 m} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\eta' \exp \left[i \frac{L}{c} (\omega_{m_1} - \omega_m) \left(\eta' + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (14)$$

另外, (13) 式中 $K = \frac{cT}{2L}$, $K' = \frac{K}{\gamma_{\perp}}$, $a'_m = \frac{\delta_m}{T/2} = \frac{\omega_m - \omega_c}{K}$, $\Delta'_1 = \frac{\Delta_1}{K} = \frac{\omega_s - \omega_c}{K}$, 抽运参量 $\bar{R} = \frac{\alpha l_A}{(T/2) I_p} = i b e^{-i\phi_0}$, $b = \frac{2\pi c}{\lambda K} \left(\frac{l_A}{L} \Delta n_s \right)$, $T = 1 - R$ 为腔镜的透射率. 在推导(13)式的过程中我们还作了以下几点近似: 首先假设透射率, 增益满足 $T, |\alpha l_A| \ll 1$, 即均匀场极限. 从而对(11)式中最后一项的积分保留到 T 和 $|\alpha l_A|$ 的一级小量后有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{I_p^2} \sum_{m_1 m_2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\eta' \Gamma_{m_1 m_2 m} \left(\frac{L_{m_1} L_{m_2} L_{m_2}^*}{L_m} \right) \bar{f}_{m_1} |\bar{f}_{m_2}|^2 \\ & \approx \frac{1}{I_p^2} \sum_{m_1 m_2} \bar{f}_m |\bar{f}_{m_2}|^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\eta' \Gamma_{m_1 m_2 m} \exp \left[i \frac{L}{c} (\omega_{m_1} - \omega_m) \left(\eta' + \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

其次认为晶体长度远远小于增益介质范围内腔场的瑞利长度^[2], 从而 $A_m(\rho, \phi, \eta') \approx A_m(\rho, \phi, 0) = A_m(\rho, \phi)$, 因此(13)式中的横模耦合系数变成

$$\Gamma_{m_1 m_2 m} = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi A_{m_1} A_{m_2} A_m(\rho, \phi),$$

其中对于横向模式 $A_m(\rho, \phi)$, 本文取高斯拉盖尔形式

$$\begin{aligned} A_m(\rho, \phi) &= A_{p,l}^{(i)}(\rho, \phi) = \frac{2}{\sqrt{\eta_l}} \left[2 \frac{\rho^2}{\eta_l} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p!}{(p+l)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times L_p^l \left(\frac{2\rho^2}{\eta_l} \right) e^{-\frac{\rho^2}{\eta_l}} B_l^{(i)}(\phi), \\ B_l^{(i)}(\phi) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & l=0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos l\phi & l>0; i=1, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin l\phi & l>0; i=2, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $p=0, 1, 2, \dots$ 是径向指标, $l=0, 1, 2, \dots$ 为角向指标, η_l 是与束腰有关的参数, $L_p^l \left(\frac{2\rho^2}{\eta_l} \right)$ 为拉盖尔多项式, 为计算耦合系数方便, 作变换 $\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{\eta_l}}$, 从而(15)式成为

$$\begin{aligned} A_{p,l}^{(i)}(\rho', \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\eta_l}} \bar{A}_{p,l}^{(i)}(\rho', \phi), \\ \bar{A}_{p,l}^{(i)}(\rho', \phi) &= 2 [2\rho'^2]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{p!}{(p+l)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times L_p^l(2\rho'^2) e^{-\rho'^2} B_l^{(i)}(\phi). \end{aligned} \quad (16)$$

此时横模耦合系数

$$\Gamma_{m_1 m_2 m} = \frac{1}{\eta_l} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m},$$

$$\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} = \int_0^\infty \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi \bar{A}_{m_1} \bar{A}_{m_2} \bar{A}_{m_2} \bar{A}_m(\rho', \phi). \quad (17)$$

代入(13)式并令 $E_m = \frac{\bar{f}_m}{\sqrt{\eta_l} \sqrt{I_p}}$, $P_m = \frac{\bar{q}_m}{\sqrt{\eta_l}} \sqrt{I_p}$, $\tau' = \gamma_\perp t$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} &= -K[(g_m + i a'_m - i \Delta'_1) E_m - \tilde{R} P_m], \\ \frac{\partial P_m}{\partial t} &= -\gamma_\perp [(1 + i \Delta'_2) P_m - E_m + \sum_{m_1 m_2} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} C_{m_1 m} E_{m_1} |E_{m_2}|^2]. \end{aligned} \quad (18)$$

可见方程中不再含有参数 η_l . (18)式即是描写光折变振荡器中多模振荡的方程, 值得注意的是这些模式的纵向指标 n (推导过程中没有写出) 可以相同也可以不同. 为方便重新

列出其中的有关参数: $K = \frac{cT}{2L}$ 和 $\gamma_\perp = \frac{1}{\tau_0}$ 分别为腔和光折变介质的弛豫速率, $g_m = 1 +$

d_m , 其中 d_m 是唯象引入的衍射损耗, 对于不同的横模 d_m 可取不同的值, $a'_m = \frac{\omega_m - \omega_c}{K}$,

$\Delta'_1 = \frac{\Delta_1}{K} = \frac{\omega_s - \omega_c}{K}$, $\Delta'_2 = \frac{\Delta_2}{\gamma_\perp} = \frac{\omega_p - \omega_s}{\gamma_\perp}$, 抽运参量 $\tilde{R} = i b e^{-i\phi_0}$ ($b = \frac{2\pi c l_A}{\lambda K L} \Delta n_s$) 一般情况下

($E_0 \neq 0$, $\phi_0 \neq \frac{\pi}{2}$) 是复数, 模式间的耦合系数 $\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m}$ 由(17)式给出, 而系数 $C_{m_1 m}$ 的值由(14)式可知与模式的频率间隔密切相关, 如果 $(\omega_{m_1} - \omega_m) \gg K$, 则 $C_{m_1 m} = 0$, 由(18)式可知, 这时不同模式间的相互作用仅由 $\sum_{m_2} \tilde{\Gamma}_{m m_2 m_2 m} E_m |E_{m_2}|^2$ 来体现, 这些作用项即描写模式间的竞争. 但当所考虑的模处于简并或准简并状态时, $(\omega_{m_1} - \omega_m) \sim K$, 则有 $C_{m_1 m} \approx 1$, 这意味着不同的模式之间在 $\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} \neq 0$ 时将存在由 $\sum_{m_1 m_2} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} C_{m_1 m} E_{m_1} |E_{m_2}|^2$ ($m_1 \neq m$) 所引起的相互作用, 下面讨论的正是这些作用项在一定条件下引起了时空不稳定现象.

3 多模振荡的不稳定现象

为研究多模方便, 先给出单模定态输出的结果. 对于单模振荡的情况, 参考频率 ω_c 可取该模的空腔谐振频率 ω_m , 那么有 $a'_m = 0$, $\Delta'_1 = \frac{\omega_s - \omega_m}{K}$. 从而方程(18)式简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} &= -K[(g_m - i \Delta'_1) E_m - \tilde{R} P_m], \\ \frac{\partial P_m}{\partial t} &= -\gamma_\perp [(1 + i \Delta'_2) P_m - E_m + \tilde{\Gamma}_{m m m m} E_m I_m], \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $I_m = E_m E_m^*$, 令等式左端为零, 直接可得定态输出光强和频率关系

$$\begin{aligned} I_m^{\text{st}} &= \frac{1}{\tilde{\Gamma}_{m m m m}} \left(1 - \frac{g_m^2 + \Delta_1'^2}{\tilde{R}_r g_m - \tilde{R}_i \Delta_1'} \right), \\ \Delta_2' &= \frac{\tilde{R}_i g_m + \tilde{R}_r \Delta_1'}{\tilde{R}_r g_m - \tilde{R}_i \Delta_1'}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\tilde{R}_r$ 和 $\tilde{R}_i$ 分别为抽运参量 $\tilde{R}$ 的实部和虚部, $\tilde{R}_r = b \sin \phi_0$; $\tilde{R}_i = b \cos \phi_0$. 如果引入抽运光频率与该模空腔谐振频率的差 $\delta = \omega_p - \omega_m$, 并注意到 $\delta = \Delta_1 + \Delta_2$, 则由(20)式可得频率牵引关系:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\gamma_{\perp}}{g_m K + \gamma_{\perp}} \delta \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}, \\ \Delta_2 &= \frac{-l_2 + \sqrt{l_2^2 - 4l_1 l_3}}{2l_1} \quad \phi_0 \neq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} l_1 &= \tilde{R}_i, \\ l_2 &= \tilde{R}_r K g_m + \tilde{R}_r \gamma_{\perp} - \tilde{R}_i \delta, \\ l_3 &= -(\tilde{R}_i K \gamma_{\perp} g_m + \tilde{R}_r \gamma_{\perp} \delta). \end{aligned}$$

当 $g_m = 1$, $\tilde{\Gamma}_{mmmm} = 1$ 时, (20), (21)式即与不考虑光场横向效应的结果^[10]一致, 并且也可

给出最大输出光强所对应的失谐量 δ , 即令 $\frac{dI_2^{\text{st}}}{d\Delta_1} = 0$, 并利用关系 $\delta = \Delta_1 + \Delta_2$, 可得

$$\delta = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2} \right) (\gamma_{\perp} - K g_m). \quad (22)$$

对于多模振荡的情况, 本文通过数值模拟进行研究. 考虑到光折变振荡器中有

$K \gg \gamma_{\perp}$, 故可对(18)式中光场作绝热近似, 即 $\frac{\partial E_m}{\partial t} \approx 0$, 从而

$$E_m (A_m + i B_m) P_m.$$

其中

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\tilde{R}_r g_m - \tilde{R}_i \Delta'_m}{g_m^2 + \Delta_m'^2}, \\ B_m &= \frac{\tilde{R}_i g_m + \tilde{R}_r \Delta'_m}{g_m^2 + \Delta_m'^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

$\Delta'_m = \Delta'_1 - a'_m = \frac{\omega_s - \omega_m}{K}$. 把上式代入(18)式中关于 P_m 的方程后, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial t} &= -\gamma_{\perp} [(1 + i \Delta'_2) P_m - (A_m + i B_m) P_m \\ &\quad + \sum_{m_1 m_2} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} C_{m_1 m} (A_{m_1} + i B_{m_1}) D_{m_2} \tilde{I}_{m_2} P_{m_1}], \\ D_m &= A_m^2 + B_m^2; \quad \tilde{I}_m = P_m P_m^*. \end{aligned} \quad (24)$$

如果所研究的模式都是非简并的, 那么不同模式间的 $C_{m_1 m} = 0$, 从而(24)式还可进一步写成

$$\frac{\partial \tilde{I}_m}{\partial t'} = \alpha_m \tilde{I}_m - \sum_m Q_{mm'} \tilde{I}_m \tilde{I}_m,$$

$$\alpha_m = A_m - 1; \quad Q_{mm'} = \tilde{\Gamma}_{mm'm'm} D_m A_m; \quad t' = 2 \gamma_{\perp} t,$$

即 Lotka-Volterra 方程, 此式反映了模式之间的竞争现象^[6]. 本文则考虑模式简并或准简并的情况, 即 $C_{m_1 m} \approx 1$, 为此引入 $P_m = X_m + i Y_m$, 对(24)式作进一步的展开

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_m}{\partial \tau} &= [(A_m - 1) X_m + (\Delta'_2 - B_m) Y_m \\
&\quad - \sum_{m_1 m_2} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} D_{m_2} \tilde{I}_{m_2} (A_{m_1} X_{m_1} - B_{m_1} Y_{m_1})], \\
\frac{\partial Y_m}{\partial \tau} &= [(B_m - \Delta'_2) X_m + (A_m - 1) Y_m \\
&\quad - \sum_{m_1 m_2} \tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} D_{m_2} \tilde{I}_{m_2} (B_{m_1} X_{m_1} + A_{m_1} Y_{m_1})], \\
\tilde{I}_m &= X_m^2 + Y_m^2; \quad \tau = \gamma_{\perp} t.
\end{aligned} \tag{25}$$

(25)式即为我们作数值模拟的基本方程. 为简单, 下面考虑三个模式的振荡规律, 它们是

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{00}(\rho', \phi) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho'^2}, \\
\bar{A}_{01}(\rho', \phi) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\rho'^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\rho'^2} \cos \phi, \\
\bar{A}_{02}(\rho', \phi) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2\rho'^2) \left(\frac{1}{2!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\rho'^2} \cos 2\phi.
\end{aligned} \tag{26}$$

由此利用(17)式可具体算得系数 $\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m}$:

$$\begin{array}{cccccc}
\tilde{\Gamma}_{0000} & \tilde{\Gamma}_{1001} & \tilde{\Gamma}_{2002} & \tilde{\Gamma}_{1111} & \tilde{\Gamma}_{2112} & \tilde{\Gamma}_{2222} & \tilde{\Gamma}_{0112} \\
0.3183 & 0.1592 & 0.0796 & 0.2387 & 0.1194 & 0.1790 & 0.0796
\end{array}$$

为方便, 以上对于 $\tilde{\Gamma}$ 的角标 m 略写了相同的径向指标 ($p=0$), 再注意到角标交换的不变性, 可得 $\tilde{\Gamma}_{0110}$, $\tilde{\Gamma}_{0220}$, $\tilde{\Gamma}_{1221}$ 和 $\tilde{\Gamma}_{2110}$ 的值, 其余的都为零. 这样对(26)式所给出的三个模式, 方程(25)可具体写成

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_0}{\partial \tau} &= [(A_0 - 1) X_0 + (\Delta'_2 - B_0) Y_0 - (\tilde{\Gamma}_{0000} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{0110} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{0220} D_2 \tilde{I}_2) \\
&\quad \times (A_0 X_0 - B_0 Y_0) - \tilde{\Gamma}_{2110} D_1 \tilde{I}_1 (A_2 X_2 - B_2 Y_2)], \\
\frac{\partial Y_0}{\partial \tau} &= [(B_0 - \Delta'_2) X_0 + (A_0 - 1) Y_0 - (\tilde{\Gamma}_{0000} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{0110} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{0220} D_2 \tilde{I}_2) \\
&\quad \times (B_0 X_0 + A_0 Y_0) - \tilde{\Gamma}_{2110} D_1 \tilde{I}_1 (B_2 X_2 + A_2 Y_2)], \\
\frac{\partial X_1}{\partial \tau} &= [(A_1 - 1) X_1 + (\Delta'_2 - B_1) Y_1 - (\tilde{\Gamma}_{1001} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{1111} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{1221} D_2 \tilde{I}_2) \\
&\quad \times (A_1 X_1 - B_1 Y_1)], \\
\frac{\partial Y_1}{\partial \tau} &= [(B_1 - \Delta'_2) X_1 + (A_1 - 1) Y_1 - (\tilde{\Gamma}_{1001} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{1111} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{1221} D_2 \tilde{I}_2) \\
&\quad \times (B_1 X_1 + A_1 Y_1)], \\
\frac{\partial X_2}{\partial \tau} &= [(A_2 - 1) X_2 + (\Delta'_2 - B_2) Y_2 - (\tilde{\Gamma}_{2002} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{2112} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{2222} D_2 \tilde{I}_2) \\
&\quad \times (A_2 X_2 - B_2 Y_2) - \tilde{\Gamma}_{0112} D_1 \tilde{I}_1 (A_0 X_0 - B_0 Y_0)], \\
\frac{\partial Y_2}{\partial \tau} &= [(B_2 - \Delta'_2) X_2 + (A_2 - 1) Y_2 - (\tilde{\Gamma}_{2002} D_0 \tilde{I}_0 + \tilde{\Gamma}_{2112} D_1 \tilde{I}_1 + \tilde{\Gamma}_{2222} D_2 \tilde{I}_2)
\end{aligned}$$

$$\times (B_2 X_2 + A_2 Y_2) - \tilde{\Gamma}_{0112} D_1 \tilde{I}_1 (B_0 X_0 + A_0 Y_0)] . \quad (27)$$

上式中 $\tilde{\Gamma}_{2110} D_1 \tilde{I}_1 (A_2 X_2 - B_2 Y_2)$, $\tilde{\Gamma}_{2110} D_1 \tilde{I}_1 (B_2 X_2 + A_2 Y_2)$ 及 $\tilde{\Gamma}_{0112} D_1 \tilde{I}_1 (A_0 X_0 - B_0 Y_0)$, $\tilde{\Gamma}_{0112} D_1 \tilde{I}_1 (B_0 X_0 + A_0 Y_0)$ 即是由于模式的简并而带来的相互作用项. 我们对于 (27) 式采用 Runge-Kutta 方法进行数值积分. 其中参数 Δ'_2 及 Δ'_m (即 Δ'_{00} , Δ'_{01} , Δ'_{02}) 仅为方便按如下的考虑取值: 即参考频率 ω_c 取 $\bar{A}_{00}(\rho', \phi)$ 模的空腔谐振频率, 因此 $\Delta'_{00} = \Delta'_1 - \alpha'_{00} = \Delta'_1$, 而 Δ'_1 , Δ'_2 的值我们由 $\bar{A}_{00}(\rho', \phi)$ 模单独振荡时的频率关系定出, 并且假设其处在最佳的振荡状态, 即失谐量 δ 满足 (22) 式, 注意到关系 $\delta = \Delta_1 + \Delta_2$ 及 (20) 式, 可得

$$\begin{aligned} \Delta'_2 &= \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2} \right), \\ \Delta'_1 &= \Delta'_{00} = \left[\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2} \right) \right] g_{00}. \end{aligned} \quad (28)$$

另外, 由前面 Δ'_m 的定义可知, Δ'_{00} , Δ'_{01} , Δ'_{02} 间的差值描写模式的频率间隔, 因此为满足简并或准简并条件, Δ'_{01} , Δ'_{02} 应在 Δ'_{00} 附近取值, 即它们之间的差值应小于 1 以满足频率间隔小于 k 的简并要求.

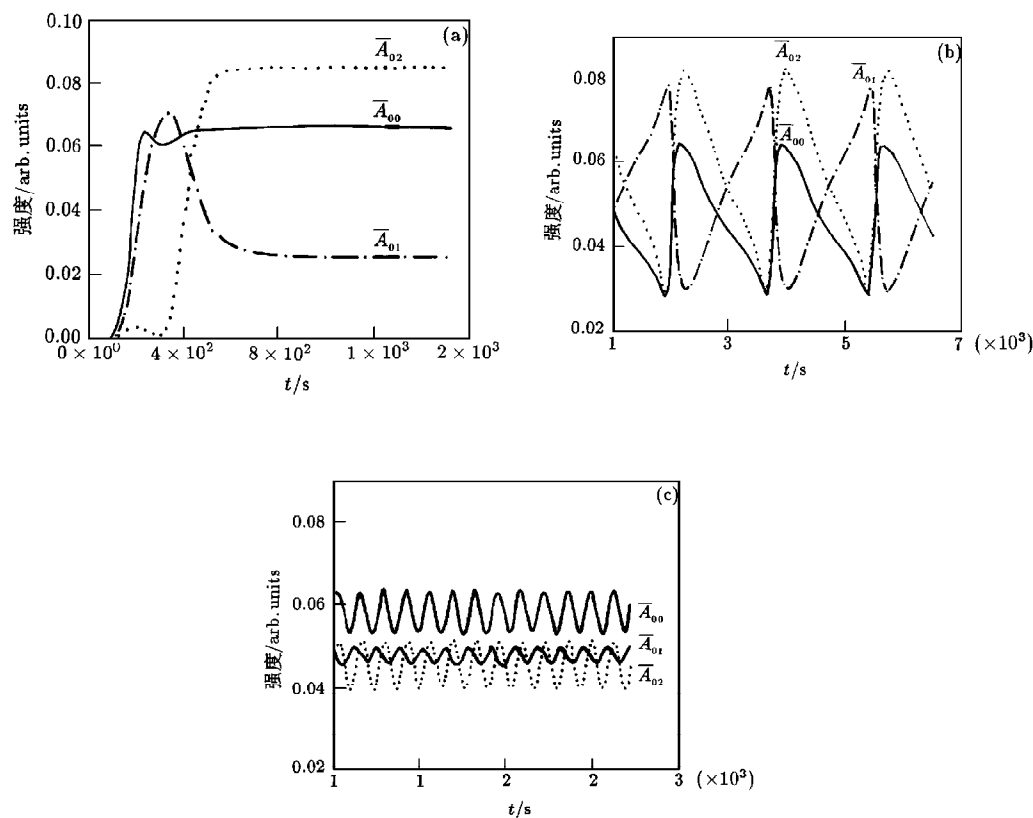


图 2

首先,模拟光折变介质上无外加直流电场的情况,即 $\phi_0 \approx \frac{\pi}{2}$,从而由(28)式可得 $\Delta'_2 = \Delta'_{00} = 0$,其他相应的参数分别为:反射率 $R = 0.8$,腔长 $L = 2$ m,光折变介质的长度 $l_A = 0.02$ m,响应时间 $\tau_0 = 1$ s,光折变饱和值取 $\Delta n_s = 0.82 \times 10^{-6}$,波长 $\lambda = 1.0 \times 10^{-6}$ nm,衍射损耗 $d_{00} = 0.0$, $d_{01} = 2.8 \times 10^{-3}$, $d_{02} = 8.0 \times 10^{-3}$. 计算结果发现随着 Δ'_m 取值的不同系统表现出不同的行为,例如当 $\Delta'_{01} = \Delta'_{02} = 0$ 时,图 2(a)中分别给出了 $\bar{A}_{00}$, $\bar{A}_{01}$, $\bar{A}_{02}$ 模式的光强随时间变化的曲线,经竞争后最终各自进入稳态;而当 $\Delta'_{01} = 4.0 \times 10^{-3}$, $\Delta'_{02} = 8.0 \times 10^{-3}$ 时,三个模式却表现出较大的周期起伏(图 2(b)所示),而且 $\bar{A}_{00}$ 与 $\bar{A}_{02}$ 模的强度变化几乎是同相位的,并与 $\bar{A}_{01}$ 模交替出现. 继续增加模式的频率间隔, $\Delta'_{01} = 3.0 \times 10^{-2}$, $\Delta'_{02} = 6.0 \times 10^{-2}$, 这时三个模式的相互作用似乎没有图 2(b)中所示的那么强烈,而表现为模式各自在小范围内的周期振荡,如图 2(c). 其次,我们进一步对外加直流电场不为零的情况作数值计算,而且近似认为 $\phi_0 = 0$, 这时由(28)式可得 $\Delta'_2 = 1$, $\Delta'_{00} = g_{00}$, 光折变饱和值及衍射参量改为 $\Delta n_s = 1.64 \times 10^{-6}$, $d_{00} = 0.0$, $d_{01} = 3.0 \times 10^{-3}$, $d_{02} = 7.3 \times 10^{-3}$, 其他参数与前面相同. 同样通过改变参量 Δ'_m 的值,不仅观察到了模式的稳定振荡(例如当 $\Delta'_{01} = \Delta'_{02} = 1.0$ 时),而且也观察到了类似于图 2(b)中的模式交替现象,所不同的是 $\bar{A}_{00}$ 与 $\bar{A}_{02}$ 模的强度起伏不再同步,从而三个模式表现出周期性的轮换行为. 如图 3(a)所示,其中参数 Δ'_m 为 $\Delta'_{01} = 1.011$, $\Delta'_{02} = 1.022$, 从图中可以看到模式巡游的次序为 $\bar{A}_{00} \rightarrow \bar{A}_{01} \rightarrow \bar{A}_{02} \rightarrow \bar{A}_{00}$. 而且模拟过程中还发现这种模式巡游的次序是可变的,例如当 $d_{00} = 0.0$, $d_{01} = 4.8 \times 10^{-3}$, $d_{02} = 10.0 \times 10^{-3}$, $\Delta'_{01} = 0.9984$, $\Delta'_{02} = 0.9968$ 时,图 3(b)中的模式巡游次序变成 $\bar{A}_{00} \rightarrow \bar{A}_{02} \rightarrow \bar{A}_{01} \rightarrow \bar{A}_{00}$, 与图 3(a)的巡游次序相反,另外图中的时间单位是 s, 从而说明了这种不稳定现象的缓变特性.

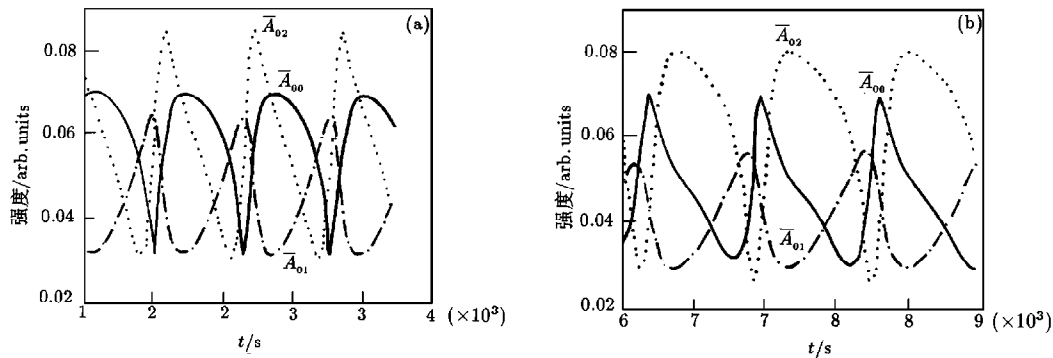


图 3

由方程(27)可知,参数 A_m , B_m 和 Δ'_2 的值将直接影响光场的振荡规律. 在模拟过程中,为简便我们主要是通过参数 Δ'_m 的大小来改变 A_m 和 B_m 的值,从而反映出系统的不稳定性. 而由(23)式可知 A_m 和 B_m 值不仅仅依赖于 Δ'_m , 如果固定 Δ'_m 而改变 g_m 的值也同样可观察到不稳定现象. 也就是说系统最终是否稳定不完全取决于 Δ'_m 的值,还直接受到 A_m , B_m 和 Δ'_2 值的影响,定量的结论还需对方程(27)作进一步的研究.

4 结 论

在弱场条件下,给出了光折变振荡器多模运转的动力学方程,着重讨论了模式在简并或准简并条件下的振荡行为,发现模式的简并使得它们之间的相互作用加强,一定条件下引起了模式强度的周期起伏,如果参数合适,这种周期起伏则体现为模式振荡的巡游现象.初步看到了外加电场对这种不稳定现象的影响.

在多模的讨论中,为了简便我们仅研究了三个模式的振荡行为,可以看到,模式之间是否存在类似于(27)式中的相互作用项,不仅取决于系数 $C_{m_1 m}$ 还决定于 $\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m}$. 如果改变或增加所讨论的模式,则都有可能增加 $\tilde{\Gamma}_{m_1 m_2 m_2 m} \neq 0$ 的数目(当 $m_1 \neq m$ 时),从而使得模式间的相互作用复杂化.由此可以想象光折变振荡器中丰富的时空行为.

感谢朱健强博士在计算方面给予的帮助.

- [1] W. Klische, C. O. Weiss, B. Wellegehausen, *Phys. Rev.*, **A39**(2)(1989), 919.
- [2] L. A. Lugiato, G. L. Oppo, J. R. Tredicce *et al.*, *J. Opt. Soc. Am.*, **B7**(6)(1990), 1019.
- [3] M. Brambilla, F. Battipede, L. A. Lugiato *et al.*, *Phys. Rev.*, **A43**(9)(1991), 5090.
- [4] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(20)(1990), 2531.
- [5] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **67**(27)(1991), 3794.
- [6] Dana Z. Anderson, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(2)(1987), 164.
- [7] Laurent Dambly, Hassina Zeghlache, *Phys. Rev.*, **A49**(5)(1994), 4043.
- [8] J. P. Huignard, A. Marraekchi, *Opt. Comm.*, **38**(4)(1981), 249.
- [9] A. Marraekchi, J. P. Huignard, *Appl. Phys.*, **24**(1981), 131.
- [10] 庄 军、谭维翰, 中国激光, **22**(1995), 930.

MODE ITINERANCY IN A PHOTOREFRACTIVE RING OSCILLATOR

ZHUANG JUN

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

TAN WEI-HAN

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 201800)

(Received 25 July 1995; revised manuscript received 4 October 1995)

ABSTRACT

A theory of multimode oscillation in an optical unidirectional ring resonator with photorefractive gain was given in the weak-field limit. In nondegenerate state, the system is stable and can be described by Lotka-Voterra equation. While the system will becomes unstable in certain circumstance owing to the mode-mode interaction in the degenerate or quasi-degenerate condition, such as the periodic alternation behavior.

PACC: 4260; 4265