

2N+1 阶 KdV 型方程的孤波解*

朱佐农

(扬州大学农学院基础部, 扬州 225009)

(1995 年 8 月 15 日收到)

获得了 2N+1 阶 KdV 型方程的显式精确孤波解. 作为特例, 讨论了高阶广义 KdV 型方程、高阶广义 MKdV 型方程和高阶广义 Schamel 的 MKdV 型方程. 还研究了 2N+1 阶 KP 型方程.

PACC: 0340K; 0290

1 引 言

众所周知, KdV 方程

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0 \quad (1)$$

和 MKdV 方程

$$u_t + au^2u_x + bu_{xxx} = 0 \quad (2)$$

分别存在孤波解^[1]

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \xi + B, \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0, \quad (3)$$

$$u(x, t) = A \operatorname{sech} \xi, \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0. \quad (4)$$

Schamel 的 MKdV 型方程

$$16u_t + 30u^{1/2}u_x + u_{xxx} = 0 \quad (5)$$

存在孤波解^[2-4]

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^4 \xi, \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0. \quad (6)$$

如 Schamel 所指出, 方程(5)比 KdV 方程(1)有更强的非线性性质, 因为方程(5)的单孤波解具有较小的宽度和较高的速度. 从 Painlevé 性质分析出发, 讨论了方程(5)的可积性^[5-7], 研究了五阶 KdV 型方程

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + cu_{5x} = 0, \quad u_{5x} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \quad (7)$$

文献[8,9]获得方程(7)的孤波解

$$u(x, t) = B + A_1 \operatorname{sech}^2 \xi + A_2 \operatorname{sech}^4 \xi, \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0, \quad (8)$$

其中 A_1, A_2, B 为常数. $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$. 如取 $A_1 = 0$, 则(8)式便成为文献[10]所获得的孤波解.

当系数 a, b, c, d 满足某些平衡条件时, 获得了七阶 KdV 型方程^[11]

* 江苏省教育委员会自然科学基金及扬州大学跨世纪学术带头人培养基金资助的课题.

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + cu_{5x} + du_{7x} = 0, \quad u_{jx} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \quad (9)$$

(其中 a, b, c, d 为常数)的孤波解^[12]

$$u(x, t) = B + A \operatorname{sech}^6 \xi, \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0. \quad (10)$$

文献[13]研究了五阶 KdV 型方程

$$u_t + \alpha u^p u_x + \beta u_{xxx} + \gamma u_{5x} = 0 \quad (11)$$

(其中 $p=1, 2, 3$)的传播孤波和非传播孤波. 方程(1), (2), (5), (7), (9)和(11)有着广泛的物理背景^[2, 14-19]. 一个自然的问题是: 更高阶 KdV 型方程将出现什么结果? 本文研究下述 $2N+1$ 阶 KdV 型方程

$$u_t + c_1 u^p u_x + \sum_{k=1}^N c_{2k+1} u_{2k+1, x} = 0, \quad u_{2k+1, x} = \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}, \quad (12)$$

其中 $p > 0$, c_i 为常数, N 为任意正整数. 方程(12)包含了 $2N+1$ 阶 KdV 型方程 ($p=1$), $2N+1$ 阶 MKdV 型方程 ($p=2$), $2N+1$ 阶 Schamel 的 MKdV 型方程 ($p=1/2$). 显然方程(1), (2), (5), (7), (9)和(11)都是方程(12)的特例. 如果系数 c_i ($i=1, 3, 5, \dots, 2N+1$)满足某些平衡条件, 可获得方程(12)的孤波解, 也可研究 $2N+1$ 阶 KP 型方程

$$u_t + c_1 u^p u_x + \sum_{k=1}^N c_{2k+1} u_{2k+1, x} + b D_x^{-1} u_{yy} = 0, \quad (13)$$

其中 b 为常数.

2 $2N+1$ 阶 KdV 型方程(12)的孤波解

考虑方程(12)的行波解

$$u(x, t) = V(\xi), \quad \xi = kx - \omega t + \xi_0,$$

其中 k, ω, ξ_0 为待定常数, 从而方程(12)成为

$$-\omega V' + c_1 k V^p V' + \sum_{l=1}^N c_{2l+1} k^{2l+1} \frac{d^{2l+1} V}{d\xi^{2l+1}} = 0. \quad (14)$$

积分(14)式, 得

$$-\omega V + \frac{c_1 k}{p+1} V^{p+1} + \sum_{l=1}^N c_{2l+1} k^{2l+1} \frac{d^{2l} V}{d\xi^{2l}} = K, \quad (15)$$

其中 K 为积分常数. 注意到下列各式:

$$(\operatorname{sech}^l \xi)^{(2)} = -l(l+1) \operatorname{sech}^{l+2} \xi + l^2 \operatorname{sech}^l \xi \triangleq b_{2,1} \operatorname{sech}^{l+2} \xi + l^2 \operatorname{sech}^l \xi, \quad (16.1)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sech}^l \xi)^{(4)} &= l(l+1)(l+2)(l+3) \operatorname{sech}^{l+4} \xi - l(l+1)[(l+2)^2 + l^2] \operatorname{sech}^{l+2} \xi \\ &\quad + l^4 \operatorname{sech}^l \xi \triangleq b_{4,2} \operatorname{sech}^{l+4} \xi + b_{4,1} \operatorname{sech}^{l+2} \xi + l^4 \operatorname{sech}^l \xi, \end{aligned} \quad (16.2)$$

$$(\operatorname{sech}^l \xi)^{(6)} \triangleq b_{6,3} \operatorname{sech}^{l+6} \xi + b_{6,2} \operatorname{sech}^{l+4} \xi + b_{6,1} \operatorname{sech}^{l+2} \xi + l^6 \operatorname{sech}^l \xi, \quad (16.3)$$

.....

$$(\operatorname{sech}^l \xi)^{(2N-2)} \triangleq b_{2N-2, N-1} \operatorname{sech}^{l+2N-2} \xi + b_{2N-2, N-2} \operatorname{sech}^{l+2N-4} \xi + \dots + b_{2N-2, 1} \operatorname{sech}^{l+2} \xi$$

$$+ l^{2N-2} \operatorname{sech}^l \xi, \quad (16. N-1)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sech}^l \xi)^{(2N)} &\triangleq (-1)^N l(l+1)(l+2)\cdots(l+2N-1) \operatorname{sech}^{l+2N} \xi + b_{2N, N-1} \operatorname{sech}^{l+2N-2} \xi \\ &+ b_{2N, N-2} \operatorname{sech}^{l+2N-4} \xi + \cdots + b_{2N, 1} \operatorname{sech}^{l+2} \xi + l^{2N} \operatorname{sech}^l \xi. \end{aligned} \quad (16. N)$$

方程(16)中 $(\operatorname{sech}^l \xi)^{(j)} \triangleq \frac{d^j \operatorname{sech}^l \xi}{d\xi^j}$. 进一步设方程(12)的行波解为

$$V(\xi) = A \operatorname{sech}^{\frac{2N}{p}} \xi + B \delta_{p1}, \quad \delta_{p1} = \begin{cases} 1 & p=1, \\ 0 & p \neq 1, \end{cases} \quad (17)$$

将方程(17)和(16)代入方程(15), 并取适当的积分常数 K , 可获得下述方程:

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}^{\frac{2N}{p}} \xi: \quad \omega &= c_1 B k \cdot \delta_{p1} + \left(\frac{2N}{p}\right)^2 c_3 k^3 + \left(\frac{2N}{p}\right)^4 c_5 k^5 + \cdots \\ &+ \left(\frac{2N}{p}\right)^{2N} c_{2N+1} k^{2N+1}, \end{aligned} \quad (18.0)$$

$$\operatorname{sech}^{\frac{2N+2}{p}} \xi: \quad b_{2,1} c_3 + b_{4,1} c_5 k^2 + b_{6,1} c_7 k^4 + \cdots + b_{2N,1} c_{2N+1} k^{2N-2} = 0, \quad (18.1)$$

$$\operatorname{sech}^{\frac{2N+4}{p}} \xi: \quad b_{4,2} c_5 + b_{6,2} c_7 k^2 + \cdots + b_{2N,2} c_{2N+1} k^{2N-4} = 0, \quad (18.2)$$

.....

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}^{\frac{2N+2N-4}{p}} \xi: \quad &b_{2N-4, N-2} c_{2N-3} k^{2N-3} + b_{2N-2, N-2} c_{2N-1} k^{2N-1} \\ &+ b_{2N, N-2} c_{2N+1} k^{2N+1} = 0, \end{aligned} \quad (18. N-2)$$

$$\operatorname{sech}^{\frac{2N+2N-2}{p}} \xi: \quad b_{2N-2, N-1} c_{2N-1} k^{2N-1} + b_{2N, N-1} c_{2N+1} k^{2N+1} = 0, \quad (18. N-1)$$

$$\operatorname{sech}^{\frac{2N+2N}{p}} \xi: \quad A^p = (-1)^{N+1} \frac{p+1}{c_1} \left(\frac{2N}{p}\right) \left(\frac{2N}{p}+1\right) \cdots \left(\frac{2N}{p}+2N-1\right) c_{2N+1} k^{2N}, \quad (18. N)$$

其中 b_{ij} 由方程(16.1)–(16. N)中的 b_{ij} (将 l 用 $2N/p$ 替代) 表示. 据方程(18. N-1), 设 $c_{2N-1} c_{2N+1} < 0$, 注意到 $b_{2N-2, N-1} b_{2N, N-1} > 0$, 得

$$k^2 = - \frac{b_{2N-2, N-1} c_{2N-1}}{b_{2N, N-1} c_{2N+1}} > 0. \quad (19)$$

解方程(18. N-2)–(18.1), 得

$$\begin{aligned} c_{2N-3} &= d_{2N-3} \frac{(c_{2N-1})^2}{c_{2N+1}}, \quad c_{2N-5} = d_{2N-5} \frac{(c_{2N-1})^3}{(c_{2N+1})^2}, \\ &\cdots \cdots \cdots \quad (20) \\ c_5 &= d_5 \frac{(c_{2N-1})^{N-2}}{(c_{2N+1})^{N-3}}, \quad c_3 = d_3 \frac{(c_{2N-1})^{N-1}}{(c_{2N+1})^{N-2}}, \end{aligned}$$

其中 d_i 依赖于 $l=2N/p$. 因此, 当 $2N+1$ 阶 KdV 型方程(12)中的系数满足方程(20)及 $c_{2N-1} c_{2N+1} < 0$ 时, 方程(12)有孤波解

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^{\frac{2N}{p}} \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) + \xi_0 \right] + B \delta_{p1}, \quad (21)$$

其中 k, A, ω 分别由方程(19), (18. N)和(18.0)表示, B 为任意常数.

3 讨论与例子

从解(21)式发现, 如果 $M = \frac{p_2}{p_1} N$, 方程

$$u_t + c_1 u^{p_1} u_x + \sum_{k=1}^N c_{2k+1} u_{2k+1, x} = 0 \quad (22)$$

和

$$u_t + c_1 u^{p_2} u_x + \sum_{k=1}^M c_{2k+1} u_{2k+1, x} = 0 \quad (23)$$

具有相同类型的解

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^{\frac{2N}{p_1}}(kx - \omega t + \xi_0). \quad (24)$$

如果发展方程

$$u_t - K(x, t, u, u_x, \dots) = 0 \quad (25)$$

有行波解 $u(x, t) = f(\xi) = f(kx - \omega t)$, 那么它的二维一般化方程

$$u_t - K(x, t, u, u_x, \dots) + b D_x^{-1} u_{yy} = 0 \quad (26)$$

(b 为常数) 具有行波解 $u(x, y, t) = f(\eta) = f[kx + my - (\omega + \frac{bm^2}{k})t]$, 其中 m 为任意常数. 因此对于 $2N+1$ 阶 KP 型方程(13), 当系数满足方程(20)及 $c_{2N-1} c_{2N+1} < 0$, 则存在孤波解

$$u(x, y, t) = A \operatorname{sech}^{\frac{2N}{p}} \left[kx + my - \left(\omega + \frac{bm^2}{k} \right) t \right] + B \delta_{p1}, \quad (27)$$

其中 k, A, ω 分别由方程(19), (18. N), (18.0)表示, b, m, B 为任意常数.

现在考虑几个特例. 在方程(12)中, 令 $p=1, N=3$, 得孤波解

$$u(x, t) = -\frac{519750 c_3^2}{769^2 c_1 c_5} \operatorname{sech}^6 \left\{ \sqrt{\frac{-25 c_3}{1538 c_5}} \left[x - \left(c_1 B - \frac{180000 c_3^2}{769^2 c_5} \right) t + \xi_0 \right] \right\} + B, \quad (28)$$

如果系数满足条件

$$c_7 = \frac{769(c_5)^2}{2500 c_3}, \quad c_3 c_5 < 0. \quad (29)$$

从解(28)式可以看到, 文献[12]中得到的方程(9)的孤波解的表达式存在某些错误. 在方程(12)中, 令 $p=1, N=4$, 则得孤波解

$$u(x, t) = -\frac{3575 c_7^2}{63504 c_1 c_9^3} \operatorname{sech}^8 \left\{ \sqrt{-\frac{c_7}{504 c_9}} \left[x - \left(c_1 B + \frac{175 c_7^4}{2 \times 63^3 c_9^3} \right) t + \xi_0 \right] \right\} + B, \quad (30)$$

如果系数满足条件

$$c_5 = \frac{269(c_7)^2}{756 c_9}, \quad c_3 = \frac{26581(c_7)^3}{500094(c_9)^2}, \quad c_7 c_9 < 0. \quad (31)$$

在方程(12)中, 令 $p=1/2, N=2$, 则可得五阶 Schamel 的 MKdV 型方程的孤波解

$$u(x, t) = \frac{2205225 c_3^4}{11303044 c_1^2 c_5^2} \operatorname{sech}^8 \left\{ \sqrt{-\frac{c_3}{164 c_5}} \left(x + \frac{400 c_3^2}{1681 c_5} \right) t + \xi_0 \right\}, \quad (32)$$

如果 $c_3 c_5 < 0$. 在方程(12)中, 令 $p=2$, $N=2$, 则五阶 MKdV 型方程存在孤波解

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{9c_3^2}{10c_1c_5}} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{-\frac{c_3}{20c_5}} \left[x + \frac{4c_3^2}{25c_5} t \right] + \xi_0 \right\}, \quad (33)$$

如果 $c_1 c_5 < 0$, $c_3 c_5 < 0$.

$2N+1$ 阶 KdV 型方程(12)是否存在其他类型的孤波解, 是否存在周期解, 这些问题值得进一步研究.

- [1] M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, PA, 1981).
- [2] H. Schamel, *Plasma Phys.*, **14**(1972), 905; *Plasma Phys.*, **9**(1973), 377; *Phys. Scr.*, **20**(1979), 306.
- [3] S.G. Tagare and A. Chakrabarti, *Phys. Fluids*, **17**(1974), 1331.
- [4] M.I. Weinstein, *Lect. Appl. Math.*, AMS, **23**(1986), 23.
- [5] Y. Xiao, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**(1991), L1.
- [6] W.M. Coffey, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**(1991), L1345.
- [7] A. Ramani and B. Grammaticos, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24**(1991), 1969.
- [8] 朱佐农, *物理学报*, **41**(1992), 1057.
- [9] 马文秀等, *物理学报*, **42**(1993), 1731.
- [10] G. Huang, S. Lou and X. Dai, *Phys. Lett.*, **A139**(1989), 373.
- [11] Y. Pomeau, A. Ramani and B. Grammaticos, *Physica*, **D31**(1988), 127.
- [12] W. Ma, *Phys. Lett.*, **A180**(1993), 221.
- [13] V.I. Karpman, *Phys. Lett.*, **186**(1994), 300; 303.
- [14] K. Kakutani and H. Ono, *J. Phys. Soc. Jap.*, **26**(1969), 1305.
- [15] T. Kawahara, *J. Phys. Soc. Jap.*, **33**(1972), 260.
- [16] K. Yoshimura and S. Watanabe, *J. Phys. Soc. Jap.*, **51**(1982), 3025.
- [17] H. Schamel and P.K. Shukla, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 968.
- [18] A. Jeffrey and T. Kakutani, *SIAM Rev.*, **14**(1972), 582.
- [19] N.J. Zabusky, *Comput. Phys. Commun.*, **5**(1973), 1.

SOLITARY WAVE SOLUTIONS TO THE $2N+1$ ORDER KdV-TYPE EQUATIONS

ZHU ZUO-NONG

(Department of Basic Science, Agricultural College, Yangzhou University, Yangzhou 225009)

(Received 15 August 1995)

ABSTRACT

In this paper, explicit and exact solitary wave solutions to the $2N+1$ order KdV-type equations are given. The higher order generalized KdV equation (GKdVE), the higher order generalized MKdV equation (GMKdVE), and the higher order generalized Schamel's MKdV equation (GSMKdVE) are covered by these equations. Moreover, $2N+1$ order KP-type equation is discussed.

PACC: 0340K; 0290