

非简谐振子的奇偶广义相干态^{*}

徐子骏

(北京机械工业学院基础部, 北京 100085)

(1996 年 2 月 6 日收到)

把奇偶相干态推广到了非简谐振子的势场中, 发现随着平均能量的增加, 奇偶广义相干态交替出现压缩现象. 在随时间的演化过程中, 自然坐标与自然动量的量子起伏产生周期为 $\pi/2$ 的压缩.

PACC: 4250

1 引 言

自 1963 年 Glauber 的开创性工作^[1]之后, 相干态以其独特的最小测不准性和超完备性等性质引起了人们的广泛兴趣, 并产生了多方面的应用. 在此基础上提出了奇偶相干态的概念^[2]. 奇偶相干态是相干态的反对称(对称)组合, 奇相干态具有反聚束性质, 偶相干态具有压缩性质^[3,4]. 它们的这些非经典行为得到了人们的高度重视. 本文把奇偶相干态推广到非简谐振子的势场中, 引入了自然坐标算符和自然动量算符, 给出了广义相干态和奇偶广义相干态的一些重要性质. 在此基础上得到了奇偶广义相干态中出现压缩的条件及压缩现象的规律.

2 非简谐振子的广义相干态

非简谐振子的哈密顿算符为^[5]

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{A}{x^2} \quad A > 0, \quad (1)$$

式中已取 $m = \hbar = \omega = 1$. 按文献[6], 与(1)式相应的自然坐标算符和自然动量算符分别为

$$\begin{aligned} Q &= x^2 - H \\ P &= \frac{1}{2i} \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right). \end{aligned} \quad (2)$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned} [H, Q] &= -2iP, \\ [H, P] &= 2iQ, \end{aligned}$$

^{*} 北京机械工业学院科学研究基金资助的课题.

$$[Q, P] = 2iH. \quad (3)$$

引入阶梯算符

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(Q \mp iP), \quad (4)$$

容易验证

$$\begin{aligned} [H, b_{\pm}] &= \pm 2b_{\pm}, \\ [b_-, b_+] &= H. \end{aligned} \quad (5)$$

设 $|n\rangle$ 为第 n 个能量本征态, 不难推出

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= (2n + 2k)|n\rangle, \\ b_-|n\rangle &= \sqrt{n(n + 2k - 1)}|n - 1\rangle, \\ b_+|n\rangle &= \sqrt{(n + 1)(n + 2k)}|n + 1\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$k = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2mA/\hbar^2 + \frac{1}{4}} \right).$$

由(6)式可把本征态 $|n\rangle$ 表示为

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!(2k)_n}} b_+^n |0\rangle, \quad (7)$$

式中 $(2k)_n = \underbrace{(2k) \cdot (2k+1) \cdots (2k+n-1)}_{\text{共 } n \text{ 项连乘}},$ 下同.

广义相干态可定义为湮没算符 b_- 的本征态

$$b_-|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle. \quad (8)$$

由(6)和(7)式不难解出广义相干态 $|\beta\rangle$ 为

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!(2k)_n}} \beta^n |n\rangle \\ &= C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2k)_n} (\beta b_+)^n |0\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

定义函数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2k)_n}, \quad (10)$$

则(8)式又可表示为

$$|\beta\rangle = C_0 F(\beta b_+) |0\rangle. \quad (11)$$

由归一化条件可求出系数 C_0 为

$$C_0 = [F(|\beta|^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

由(4)式可以把自然算符写成正规积形式:

$$\begin{aligned} Q &= b_+ + b_-, \quad Q^2 = : (b_+ + b_-)^2 : + H, \\ P &= i(b_+ - b_-), \quad P^2 = - : (b_+ - b_-)^2 : + H. \end{aligned} \quad (13)$$

由(13)式容易求出在广义相干态 $|\beta\rangle$ 中自然变量 Q, P 的量子起伏为

$$(\Delta Q)^2 = (\Delta P)^2 = \bar{H}, \quad (14)$$

恰好满足广义的极小测不准关系

$$\Delta Q \cdot \Delta P = \frac{1}{2} |\overline{[Q, P]}| = \overline{H}, \quad (15)$$

式中能量平均值 $\overline{H}$ 为

$$\overline{H} = \langle \beta | H | \beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(n+k)}{n!(2k)_n} |\beta|^{2n}. \quad (16)$$

它是参数 $|\beta|$ 的单调增函数.

3 奇偶广义相干态

按文献[7], 奇偶广义相干态可定义为

$$|\beta\rangle_{o,e} \sim |\beta\rangle \mp |-\beta\rangle. \quad (17)$$

由(9)式即可得

$$\begin{aligned} |\beta\rangle_o &= C_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!(2k)_{2n+1}}} |2n+1\rangle = C_o \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta b_+)^{2n+1}}{(2n+1)!(2k)_{2n+1}} |0\rangle, \\ |\beta\rangle_e &= C_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{(2n)!(2k)_{2n}}} |2n\rangle = C_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta b_+)^{2n}}{(2n)!(2k)_{2n}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 C_o, C_e 为归一化常数.

定义奇偶 F 函数如下:

$$F_{o,e}(x) = \frac{1}{2} [F(x) \mp F(-x)], \quad (19)$$

则奇偶广义相干态又可表示为

$$|\beta\rangle_{o,e} = C_{o,e} \cdot F_{o,e}(\beta b_+) |0\rangle, \quad (20)$$

系数为

$$C_{o,e} = [F_{o,e}(|\beta|^2)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

由此可得如下内积公式:

$$\begin{aligned} {}_o\langle\alpha|\beta\rangle_o &= F_o(\bar{\alpha}\beta) \cdot [F_o(|\alpha|^2) \cdot F_o(|\beta|^2)]^{-\frac{1}{2}}, \\ {}_e\langle\alpha|\beta\rangle_e &= F_e(\bar{\alpha}\beta) \cdot [F_e(|\alpha|^2) \cdot F_e(|\beta|^2)]^{-\frac{1}{2}}, \\ {}_e\langle\alpha|\beta\rangle_o &= {}_o\langle\alpha|\beta\rangle_e = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

利用上述结果不难推出

$$\begin{aligned} b_- |\beta\rangle_o &= \beta [F_e(|\beta|^2)/F_o(|\beta|^2)]^{\frac{1}{2}} |\beta\rangle_e, \\ b_- |\beta\rangle_e &= \beta [F_o(|\beta|^2)/F_e(|\beta|^2)]^{\frac{1}{2}} |\beta\rangle_o. \end{aligned} \quad (23)$$

这说明奇偶广义相干态 $|\beta\rangle_{o,e}$ 均不是湮没算符 b_- 的本征态, 但它们却都是 b_-^2 的本征态, 对应同一个本征值 β^2 .

奇偶广义相干态随时间的变化由演化算符 $\exp(-iHt)$ 决定, 可以求出

$$|\beta, t\rangle_{o,e} = e^{-iHt} |\beta\rangle_{o,e} = e^{-2ikt} |\beta e^{-2it}\rangle_{o,e}. \quad (24)$$

可见, 随时间的演化, 奇偶广义相干态能保持其奇偶相干性. 过程中参数 β 的模保持不变, 而其幅角以不变的速度减小. 这与能量守恒定律的要求是一致的.

4 奇偶广义相干态的压缩性

在谐振子势中, 如正则变量 x 或 p 在某状态 $|\psi\rangle$ 中的量子起伏小于其在最小测不准状态时的值, 我们称 $|\psi\rangle$ 态具有压缩性. 为了研究奇偶广义相干态 $|\beta\rangle_{o,e}$ 的压缩性, 我们考虑自然算符 Q 和 P 的量子起伏. 利用 (13), (22) 和 (23) 等式不难算出

$$\begin{aligned} (\Delta Q)_o^2 &= 2r^2(\cos 2\varphi + F_e/F_o) + \bar{H}_o, \\ (\Delta P)_o^2 &= 2r^2(-\cos 2\varphi + F_e/F_o) + \bar{H}_o, \\ (\Delta Q)_e^2 &= 2r^2(\cos 2\varphi + F_o/F_e) + \bar{H}_e, \\ (\Delta P)_e^2 &= 2r^2(-\cos 2\varphi + F_o/F_e) + \bar{H}_e, \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $r = |\beta|$, $\varphi = \arg \beta$, $F_{o,e} = F_{o,e}(r^2)$, $\bar{H}_{o,e} = {}_{o,e}\langle \beta | H | \beta \rangle_{o,e}$. 将此式与最小测不准状态——广义相干态的结果 (14) 式相比较, 容易看出当 $F_o < F_e$ 时, 偶广义相干态 $|\beta\rangle_e$ 会出现压缩现象; 当 $F_o > F_e$ 时, 奇广义相干态 $|\beta\rangle_o$ 会出现压缩现象. 不难验证

$$F_e - F_o = F(-r^2) = \Gamma(2k) r^{1-2k} J_{2k-1}(2r), \quad (26)$$

式中 J_{2k-1} 为 $2k-1$ 阶贝塞尔函数, 它有无穷多个零点. 设 μ_n 为 $J_{2k-1}(x)$ 的第 n 个正零点, 则有如下结果: 当 $\mu_{2n} < 2r < \mu_{2n+1}$ 时, $J_{2k-1}(2r) > 0$, $|\beta\rangle_e$ 出现压缩; 当 $\mu_{2n+1} < 2r < \mu_{2n+2}$ 时, $J_{2k-1}(2r) < 0$, $|\beta\rangle_o$ 出现压缩. 由此可见随着参数 r 的增加, 偶、奇广义相干态依次交替地出现压缩现象. 考虑到平均能量 $\bar{H}$ 是 r 的单调增函数, 亦可说偶、奇广义相干态随着平均能量的增加交替地出现压缩性.

下面考虑时间演化的情况.

由 (23) 式可知 $|re^{i\varphi}, t\rangle_{o,e} = e^{-2ikt} |re^{i(\varphi-2t)}\rangle_{o,e}$ 代入 (25) 式, 即得

$$\begin{aligned} [\Delta Q(t)]_{o,e}^2 &= 2r^2 \left[\cos(2\varphi - 4t) + \left(\frac{F_e}{F_o} \right)^{\pm 1} \right] + \bar{H}_{o,e}, \\ [\Delta P(t)]_{o,e}^2 &= 2r^2 \left[-\cos(2\varphi - 4t) + \left(\frac{F_e}{F_o} \right)^{\pm 1} \right] + \bar{H}_{o,e}. \end{aligned} \quad (27)$$

上式表明如果平均能量 $\bar{H}$ 满足出现压缩现象的条件时, 在奇或偶的广义相干态中自然坐标与自然动量的量子起伏将交替地出现周期性的压缩, 其周期 $T = \pi/2$.

由 (27) 式还可看出量子起伏 $(\Delta Q)^2$ 和 $(\Delta P)^2$ 被压缩的最大深度相同, 在奇偶广义相干态中分别为

$$d_{o,e} = 2r^2 [1 - (F_e/F_o)^{\pm 1}]. \quad (28)$$

在一个周期中, $(\Delta Q)^2$ 和 $(\Delta P)^2$ 处于压缩情况的时间相同, 在奇偶广义相干态中分别为

$$T_{o,e} = \frac{1}{2} \arccos[(F_e/F_o)^{\pm 1}]. \quad (29)$$

容易看出 $d_{o,e}$ 与 $T_{o,e}$ 均由参数 r 决定,或者说由平均能量 $\bar{H}$ 决定.

5 结 论

本文以自然的方式把奇偶相干态推广到非简谐振子势场中,与正则坐标 x 和正则动量 p 对应的是自然坐标 Q 和自然动量 P . 经分析,得出如下结论:

1. 无论奇的或偶的广义相干态都可能出现压缩行为,其条件由平均能量 $\bar{H}$ 决定. 随着 $\bar{H}$ 的增加,偶奇广义相干态依次交替地出现压缩.

2. 在随时间的演化过程中,自然坐标与自然动量的量子起伏交替地出现周期性的压缩. 其最大压缩深度及一个周期内的压缩时间均由平均能量 $\bar{H}$ 决定.

显然,非简谐振子的奇偶广义相干态和谐振子的奇偶相干态相比较,前者的压缩行为具有显著的不同. 这些新特点的应用有待于进一步加以研究.

- [1] R. J. Glauber, *Phys. Rev.*, **130**(1963), 2529.
- [2] J. Perina, *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* (Reidel, Dordrecht., 1984), p. 78.
- [3] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 3796.
- [4] Yunlie Xia and Guangcan Guo, *Phys. Lett.*, **A136**(1989), 281.
- [5] Dongpei Zhu, *J. Phys.*, **A20**(1987), 4331.
- [6] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr., *Phys. Rev.*, **D20**(1979), 1321.
- [7] J. Janszky *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990)2771.

EVEN AND ODD GENERALIZED COHERENT STATES IN THE NON HARMONIC OSCILLATOR POTENTIAL

XU ZI-WEN

(Department of Basic Sciences, Beijing Institute of Machinery Industry, Beijing 100085)

(Received 6 February 1996)

ABSTRACT

In this paper, the conception of even and odd coherent states is generalized to the non-harmonic oscillator potential. It is found that squeezing exists alternatively in the even and odd coherent states with the increase of the mean energy, and the squeezing of the quantum fluctuation of the natural coordinate in the time evolution has a period of $\pi/2$.

PACC: 4250