

Lund 模型和极端相对论系统的量子能谱^{*}

朱栋培 王仁川 杨 理

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(1994年11月1日收到)

讨论极端相对论量子系统的能谱问题. 从给出一个典型的极端相对论系统(Lund 模型)的精确解及证明一个新的维里定理这两方面来演示了动能形式对能谱的影响.

PACC: 1235H; 0330; 0365

1 引 言

量子系统的能谱是一个最基本的量子物理问题. 一个量子体系的能量非常敏感地依赖于它的动能形式. 在一般的非相对论量子体系中, 动能算符简单地比例于动量的平方, 于是相应的本征值问题为二次微分方程. 在这方面已有了长期的富有成果的研究, 关于能谱也有一些有力的一般定理如维里定理等. 在考虑到一定的相对论修正后, 有人把动能项取为 $(p^2 + m^2)^{1/2} - m$, 这时情况就大为复杂^[1]. 本文讨论极端相对论的情形, 即忽略静止质量 m , 动能项简单地取为 $|p| = \sqrt{p^2}$. 这种情形在高能物理中经常遇到, 因为在那里总能量极高而静止能量部分通常被忽略. 探讨在这种特殊情况下系统的能谱, 可以了解动能形式的变化对能谱的影响. 在第二节里, 讨论一个典型的极端相对论系统——Lund 模型, 解出了精确的波函数和相应的能量方程, 并提供了基态和低激发态几个能级的数值结果和波函数图象. 这一精确解以前还没有人给出过. 从能量对量子数的依赖关系可以看出动能形式对能谱的影响. 在第三节里, 证明了一个极端相对论系统的维里定理, 它和非相对论的薛定谔系统的维里定理有所不同, 从而演示出动能形式的改变带来的后果.

2 Lund 模型的精确解

在描写多重粒子产生的强子模型中有一个比较简单而且思想清楚, 即 Lund 模型^[2], 此模型与 1+1 维零质量相对论弦有着紧密的联系^[3]. 在此模型中, 夸克对束缚态的哈氏量可取为

$$H = |p| + |x|. \quad (1)$$

这是一个典型的极端相对论系统, 它的量子行为尚未见有人讨论过. 这里动量绝对值算符

^{*} 中国科学院理论物理特别支持经费资助的课题.

$|p| = \sqrt{p^2}$ 的意义如下. 如果在动量表象中, 动量算符 p 取形式

$$p = \text{diag}(p_1, p_2, \dots), \quad (2)$$

则算符 $|p|$ 的形式为

$$|p| = \text{diag}(|p_1|, |p_2|, \dots), \quad (3)$$

因此它是一个半正定的算符.

这一系统的能量本征方程为

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

或

$$[p\epsilon(p) + x\epsilon(x)]\psi(x) = E\psi(x), \quad (4)$$

其中 $\epsilon(y)$ 为亥维赛符号函数. 由于此系统有空间反射不变性, 宇称是好量子数, 波函数是空间对称或空间反对称的, 因此可以先在 $x \geq 0$ 的半空间解此方程

$$(p\epsilon(p) + x)\psi(x) = E\psi(x), \quad x \geq 0. \quad (5)$$

转到动量空间, 方程变为

$$i \frac{d}{dp} \phi(p) = (E - p\epsilon(p))\phi(p), \quad (6)$$

其中

$$\phi(p) = (1/2\pi)^{1/2} \int dx \psi(x) \exp(ipx), \quad (7)$$

是动量空间的波函数.

方程(6)可以积出来

$$\phi(p) = A \exp[-i(Ep + p^2\epsilon(p)/2)]. \quad (8)$$

反过来可以得到坐标空间的波函数

$$\begin{aligned} \psi(x) &= B \int_0^\infty dp \cos[p^2/2 + p(x - E)] \\ &= B' \{ (1/2 - C[(x - E)/\sqrt{2}]) \cos[(x - E)^2/2] \\ &\quad + (1/2 - S[(x - E)/\sqrt{2}]) \sin[(x - E)^2/2] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

这里 B, B' 为常数, $C(y), S(y)$ 是 Fresnel 积分^[4]

$$C(y) = \sqrt{2/\pi} \int_0^y dt \cos t^2,$$

$$S(y) = \sqrt{2/\pi} \int_0^y dt \sin t^2.$$

波函数(9)式确实描写了束缚态, 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时它趋于零.

为了确定能谱, 利用在 $x=0$ 处的边界条件. 对于负宇称态, 有要求

$$\psi(0) = 0, \quad (10)$$

它导致能量 E 满足的一个约束方程

$$\tan(E^2/2) = -[1/2 + C(E/\sqrt{2})]/[1/2 + S(E/\sqrt{2})]. \quad (11)$$

由此可以解出能级 $E_1, E_3, \dots$. 对于具有正宇称的态, 要求边界条件

$$\psi'(0) = 0, \quad (12)$$

它导致另一个谱方程

$$[1/2 + C(E/\sqrt{2})]\sin(E^2/2) - [1/2 + S(E/\sqrt{2})]\cos(E^2/2) = 1/\sqrt{\pi E^2}. \quad (13)$$

解此方程,可以得到能量本征值 $E_0, E_2, \dots$.

把这些能量值代回波函数表达式(9),就有了正 x 区域的波函数 $\psi_E(x)$. 对于负 x 区的解则有 $\psi_E(x) = (-)^n \psi_E(-x)$, $x < 0$.

对于高激发态,由于 Fresnel 积分的渐近行为 $S(x), C(x) \rightarrow 1/2$ ($x \rightarrow \infty$), 方程(11)与(13)导致条件

$$\tan(E^2/2) = \pm 1, \quad (14)$$

于是能量的行为是

$$E_n = [(n + 1/2)\pi]^{1/2}, \quad n - \text{大整数}. \quad (15)$$

这与由 Born-Sommerfeld 量子化条件

$$\oint p dq = 2(n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

导出的半经典近似

$$E_n^{\text{sc}} = [(n + 1)\pi]^{1/2} \quad (17)$$

是相自洽的.

对于基态和低激发态,列出六个能级的数值结果

$$\begin{aligned} E_0 &= 1.3056, & E_1 &= 2.1574, & E_2 &= 2.8007 \\ E_3 &= 3.3190, & E_4 &= 3.7605, & E_5 &= 4.1555 \end{aligned}$$

相应的波函数图形见图 1.

在 Lund 模型中,原始的两体系统是由下面的哈密顿算符描写的

$$H = |p_1| + |p_2| + k|x_1 - x_2|, \quad k > 0. \quad (18)$$

经过适当的变换

$$\begin{aligned} X &= (x_1 + x_2)/2, & x &= x_1 - x_2, \\ P &= p_1 + p_2, & p &= (p_1 - p_2)/2, \end{aligned} \quad (19)$$

哈密顿算符(18)式变为

$$H = |P/2 + p| + |P/2 - p| + k|x|. \quad (20)$$

由于总动量 P 守恒,故可以在其本征态中考虑问题,于是在描述两夸克的相对运动的本征值方程

$$(|P/2 + p| + |P/2 - p| + k|x|)\psi(x) = E\psi(x) \quad (21)$$

中, P 是个数值. 同样转到动量空间,积出方程,再回到坐标空间,得到精确的波函数解

$$\begin{aligned} \psi_{E,P}(x) &= A \{ (1/2 - C[\sqrt{k}(x - (E - |P|)/k)/2]) \cos[k(x - E/k)^2/2] \\ &\quad + (1/2 - S[\sqrt{k}(x - (E - |P|)/k)/2]) \sin[k(x - E/k)^2/2] \}. \end{aligned} \quad (22)$$

相应的能谱方程如下. 对奇宇称态

$$\begin{aligned} [1/2 + C(E' - |P'|)] \cos E'^2 + [1/2 + S(E' - |P'|)] \sin E'^2 \\ = -\sin[2|P'|(E' - |P'|)]/\sqrt{2\pi}(E' - |P'|), \end{aligned} \quad (23)$$

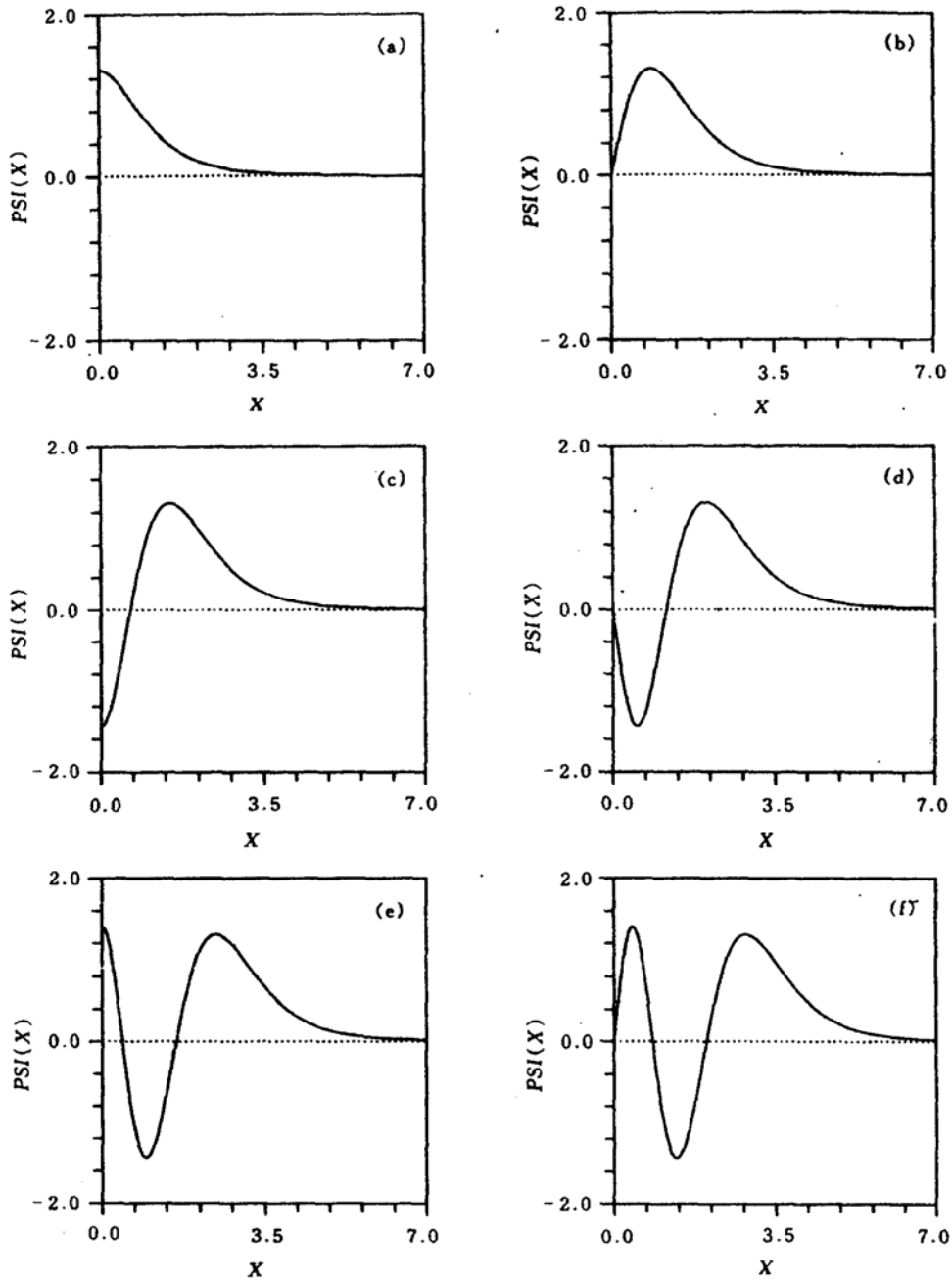


图1 波函数图形

关于偶宇称态的能级有

$$\begin{aligned}
 & [1/2 + C(E' - |P'|)] \sin E'^2 - [1/2 + S(E' - |P'|)] \cos E'^2 \\
 & = 1/E' \sqrt{2\pi} + 4 \sqrt{2/\pi} \sin [2 |P'| (E' - |P'|)] / E' (E' - |P'|)^2 \\
 & \quad - 2 \sqrt{2/\pi} |P'| \cos [2 |P'| (E' - |P'|)] / E' (E' - |P'|), \quad (24)
 \end{aligned}$$

这里 $E' = E/2\sqrt{k}$, $P' = P/2\sqrt{k}$. 从这些表达式可以看出, 在动量中心系 ($P = p_1 + p_2 = 0$) 中, 这些方程就给出前面得到的结果.

从高激发态的能谱(15)式可见, 能量本征值比例于量子数的平方根 $E_n \sim n^{1/2}$, 这反映了动能形式改变带来的影响. 因为对于非相对论系统, 线性势体系

$$H = p^2/2 + |x| \quad (25)$$

的高激发态行为可由 WKB 近似求得^[5], 能量与量子数 n 的关系为

$$E_n \sim n^{2/3}, \quad (26)$$

这种差别并不难理解. 在经典水平上, 极端相对论系统(1)式在相空间中的形状是菱形, 而非相对论系统(25)式在相空间是由两条抛物线包成的橄榄形. 相空间的形状不同, 在量子化后就显出差别来.

3 维里定理

对于由哈密顿量算符

$$H = T(p) + V(x), \quad (27)$$

描写的系统, 由本征方程

$$H| \rangle = E| \rangle, \quad (28)$$

定出的束缚态能量 E 中的动能部分 $\langle T \rangle$ 与位能部分 $\langle V \rangle$ 之间有一定的关系. 在非相对论情形, 动能算符 T 取下面的形式:

$$T = p^2/2, \quad (29)$$

则有下面的维里定理

$$2\langle T \rangle = \langle x \frac{d}{dx} V \rangle. \quad (30)$$

现在对于极端相对论系统, 动能算符为

$$T = \tilde{T} = |P|. \quad (31)$$

此时有否类似的维里定理呢? 有的, 其形式为

$$\langle \tilde{T} \rangle = \langle x dV/dx \rangle. \quad (32)$$

即与非相对论情形差一个因子 2. 这显然是因为此时动能对动量的依赖关系由二次幂变为一次幂.

定理(32)式的证明如下. 考虑一哈氏量族

$$H(\lambda) = \tilde{T}(x) + V(\lambda x), \lambda > 0. \quad (33)$$

为简单起见, 不妨设位势 V 与普朗克常数 $\hbar$ 无关, 那么由表示 $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ 知, 算符 $\tilde{T}$ 正比于 $\hbar$, 于是由 Feynman-Hellmann 定理

$$\hbar \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \hbar} = \langle \hbar \frac{\partial H}{\partial \hbar} \rangle = \langle \tilde{T} \rangle. \quad (34)$$

但是从 $H(\lambda)$ 的本征方程

$$H(\lambda)| \rangle = (T(x) + V(\lambda x))| \rangle = \tilde{E}| \rangle \quad (35)$$

知

$$\tilde{E} = \tilde{E}(\hbar, \lambda). \quad (36)$$

今作变换 $y = \lambda x$, $\tilde{T}(x) = \tilde{T}(y/\lambda) = \lambda \tilde{T}(y)$, 于是方程(35)变为

$$(\lambda \tilde{T}(y) + V(y))|\rangle = \tilde{E}|\rangle. \quad (37)$$

由上式得到

$$\tilde{E} = \tilde{E}(\hbar, \lambda) = \tilde{E}(\lambda \hbar, 1) = f(\hbar \lambda), \quad (38)$$

f 为 $\hbar \lambda$ 的某个函数. 于是由 F-H 定理

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T} \rangle &= \hbar \partial \tilde{E} / \partial \hbar = \lambda \partial \tilde{E} / \partial \lambda = \langle \lambda \partial H / \partial \lambda \rangle \\ &= \langle \lambda \frac{\partial V(\lambda x)}{\partial \lambda} \rangle = \langle x \frac{\partial V(\lambda x)}{\partial x} \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

在(39)式中取 $\lambda = 1$, 即得(32)式, 它的三维推广为

$$\langle \tilde{T} \rangle = \langle \mathbf{x} \cdot \nabla V \rangle. \quad (40)$$

对于幂律势中的极端相对论系统

$$H = \tilde{T} + V = \tilde{T} + \alpha |\mathbf{x}|^\nu, \quad (41)$$

由(40)式得

$$E = \langle \tilde{T} \rangle + \langle V \rangle = (\nu + 1) \langle V \rangle = (1 + 1/\nu) \langle \tilde{T} \rangle$$

或从总能量里把动能与位能分析出来

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= E/(\nu + 1), \\ \langle \tilde{T} \rangle &= \nu E/(\nu + 1). \end{aligned} \quad (42)$$

显然, 当 $\nu < -1$ 时不可能存在束缚态. 对于临界的库仑势($\nu = -1$), 则需要仔细的讨论.

4 小 结

从第二节的具体例子和第三节的普遍定理看到, 动能形式的变化对于能谱是有极大的影响的, 由此会影响到其它许多方面诸如束缚态存在的条件, 简并度, 动力学对称等, 这些都值得进一步研究.

第二节中给出了 Lund 模型的精确波函数. 在过去关于这一模型的应用中, 一般只进行半经典的计算. 现在有了精确的量子波函数, 就可以讨论此模型的量子行为, 做更为精确的计算, 如求各种期望值, 概率分布等, 也可进一步作为微扰论等近似计算的基础.

感谢张杰在计算机方面的帮助.

- [1] B. Durand and L. Durand, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 396; G. Hardekopf and J. Sucher, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 2020.
- [2] B. Anderssen *et al.*, *Phys. Rep.*, **97**(1983), 31.
- [3] X. Artru, *Phys. Rep.*, **97**(1983), 146.
- [4] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*(Academic Press, New York, 1980).
- [5] C. Quigg and J. L. Rosner, *Phys. Rep.*, **56**(1979), 167.

LUND MODEL AND THE SPECTRA OF THE ULTRA-RELATIVISTIC QUANTUM SYSTEM

ZHU DONG-PEI WANG REN-CHUAN YANG LI

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(Received 1 November 1994)

ABSTRACT

The energy spectral problem of the ultrarelativistic quantum systems is investigated. A typical ultrarelativistic system (the Lund model) is solved exactly and a new virial theorem is proved, these are to show the influence of the form of kinetic energy to the energy spectra.

PACC: 1235H; 0330; 0365