

自由电子激光辐射场的经典理论分析

赵东焕 雷仕湛

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

(1994年8月30日收到)

以经典电动力学分析自由电子激光辐射场, 讨论辐射场的一般特性, 并利用麦克斯韦方程组、波动方程、电子连续性方程以及相对论电子运动的洛伦兹力方程和能量方程一起系统地建立了自由电子激光辐射场的自洽解方法.

PACC: 4255T

1 引言

自从斯坦福大学的第一台自由电子激光器^[1]运行以来, 自由电子激光这门新兴学科无论是理论还是实验都取得了很大发展.

早期的自由电子激光理论大都是量子理论^[2-4]. 用量子理论描述的自由电子激光虽有较高的精确度, 但用量子理论分析较为复杂, 因而较难获得分析结果. 目前发展较快的是自由电子激光经典理论^[5-10]. 用经典理论不仅可取得较多的分析结果, 而且与实验结果也较接近.

虽然已有的自由电子激光理论分析中对辐射场的讨论也不少, 但大都缺乏系统性和普遍性, 因而所讨论问题的适用性较窄. 文献[11]对自由电子激光空间电荷波理论分析有很好的系统性和普遍性, 然而对辐射场方面的分析还缺乏全面性. 本文用经典电动力学分析自由电子激光辐射场, 讨论了其一般特性, 并系统地建立了自由电子激光辐射场方程自洽解方法.

2 场方程分析

自由电子激光辐射场, 其场方程满足有源波动方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \\ -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为辐射场电场和磁场, c 为真空中光速, ρ_e 和 $\mathbf{J}$ 分别为电子束电荷和电流密度, ρ_e 和 $\mathbf{J}$ 满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2)$$

假定辐射场传播方向为 z 轴方向, 则场有如下形式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0(x, y) \\ \mathbf{B}_0(x, y) \end{pmatrix} \exp[i(k_g z - \omega_0 t + \psi)]. \quad (3)$$

代入(1)式得

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_r^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_c + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \\ -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} \end{pmatrix} \exp[-i(k_g z - \omega_0 t + \psi)], \quad (4)$$

式中 $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, k_r 为辐射场相速度波矢, k_r 和 k_g 的关系为

$$\begin{aligned} k_r^2 &= k_0^2 - k_g^2, & k_0 &= \frac{\omega_0}{c}, \\ k_g &= k_{//} - k_w, & k_{//} &= k_e + k_p, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $k_{//}$ 为辐射场纵向波矢, k_w 为 wiggler 磁场波矢, k_p 为等离子体波波矢, $k_p = \frac{\omega_p}{v_{\phi}}$, ω_p 为等离子体角频率, 它满足 $\omega_p^2 = \frac{|e| \rho_e}{m_0 \epsilon_0 \gamma^3}$. 对于 Compton 型自由电子激光器, 由于 ρ_e 很小, ω_p 可完全忽略不计, 此时有 $k_{//} = k_e$, 辐射场除了满足有源波动方程外, 它还必须满足有源麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_e, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. 由(6)式的第二式可得场的分量方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_{0z} - i k_g E_{0y} &= i k_0 c B_{0x}, \\ i k_g E_{0x} - \frac{\partial}{\partial x} E_{0z} &= i k_0 c B_{0y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} E_{0y} - \frac{\partial}{\partial y} E_{0x} &= i k_0 c B_{0z}. \end{aligned} \quad (7)$$

由(6)式的第四式可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} - i k_g B_{0y} &= -\frac{i k_0}{c} E_{0x} + \mu_0 J_{0x}, \\ i k_g B_{0x} - \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} &= -\frac{i k_0}{c} E_{0y} + \mu_0 J_{0y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} B_{0y} - \frac{\partial}{\partial y} B_{0x} &= -\frac{i k_0}{c} E_{0z} + \mu_0 J_{0z}. \end{aligned} \quad (8)$$

由(7)和(8)式可得(设 $\mathcal{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$)

$$\begin{aligned} E_{0x} &= \frac{i}{k_r^2} (ck_0 \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} + k_g \frac{\partial}{\partial x} E_{0z} - k_0 \mathcal{H}_0 J_{0x}), \\ E_{0y} &= -\frac{i}{k_r^2} (ck_0 \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} - k_g \frac{\partial}{\partial y} E_{0z} + k_0 \mathcal{H}_0 J_{0y}). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{0x} &= -\frac{i}{k_r^2} (\frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial y} E_{0z} - k_g \frac{\partial}{\partial x} B_{0z} - \mu_0 k_g J_{0y}), \\ B_{0y} &= \frac{i}{k_r^2} (\frac{k_0}{c} \frac{\partial}{\partial x} E_{0z} + k_g \frac{\partial}{\partial y} B_{0z} - \mu_0 k_g J_{0x}). \end{aligned} \quad (10)$$

(9)和(10)式可合并为如下矢量表达式:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= -\frac{i}{k_r^2} (ck_0 \hat{e}_z \times \nabla B_{0z} - k_g \nabla_\perp E_{0z} + k_0 \mathcal{H}_0 \mathbf{J}_\perp), \\ \mathbf{B}_\perp &= \frac{i}{k_r^2} (\frac{k_0}{c} \hat{e}_z \times \nabla E_{0z} + k_g \nabla_\perp B_{0z} - \mu_0 k_g \hat{e}_z \times \mathbf{J}). \end{aligned} \quad (11)$$

由以上各式可知,自由电子激光器中不仅可以形成横电波(TE)和横磁波(TM),而且在特定条件下还可以形成横电磁波(TEM).可见自由电子激光器可产生辐射场频率相当宽,原则上讲可产生微波、远红外甚至紫外光和 X 射线波辐射.

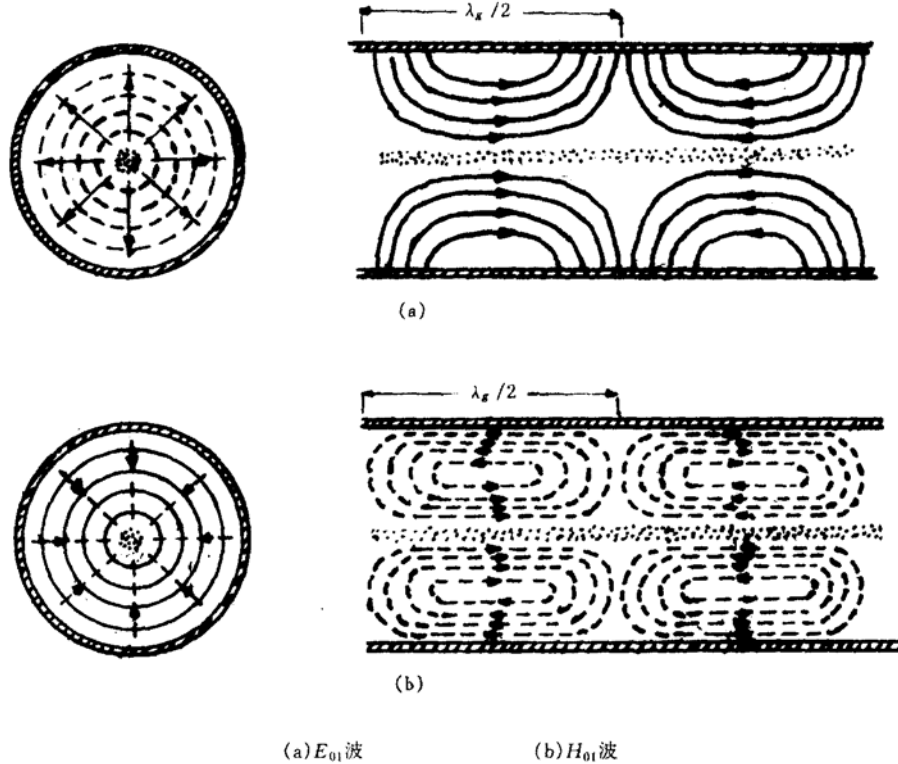


图 1 圆波导内场分布图 实线为电力线;虚线为磁力线;点为电子

TM 波 TM 波亦称为 E 波,形成条件为 $B_{0z} = 0, E_{0z} \neq 0$ [见图 1(a)],其横向分量

与纵向分量的关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp} &= \frac{i}{k_r^2} (k_g \nabla_{\perp} E_{0z} - k_0 \mathcal{H}_0 \mathbf{J}_{\perp}), \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{i}{k_r^2} \left(\frac{k_0}{c} \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla E_{0z} - \mu_0 k_g \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{J} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

TE 波 TE 波亦称 H 波, 形成条件为 $E_{0z} = 0, B_{0z} \neq 0$ [见图 1(b)], 其横向分量与纵向分量的关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp} &= -\frac{ik_0}{k_r^2} (c \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla B_{0z} + \mathcal{H}_0 \mathbf{J}_{\perp}), \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \frac{ik_g}{k_r^2} (\nabla_{\perp} B_{0z} - \mu_0 \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{J}). \end{aligned} \quad (13)$$

TEM 波 TEM 波形成的条件为 $E_{0z} = 0, B_{0z} = 0$, 其横向分量的矢量表达式可写为

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{ik_0 \mathcal{H}_0}{k_r^2} \mathbf{J}_{\perp}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = -\frac{i\mu_0 k_g}{k_r^2} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{J}. \quad (14)$$

以上是这三类波的横向分量的矢量表达式, 它们可由(11)式直接推得, 其相应直角坐标系上的分量表达式可由(9)和(10)式直接推得, 这里不再重复.

3 电流密度分析

上节分析表明, 自由电子激光辐射场的解析表达式可通过解方程(1)获得, 为此必须首先求出电流密度 $\mathbf{J}$, 而电荷密度 ρ_e 可利用(2)式解出.

$$\mathbf{J} = nev, \quad (15)$$

式中 n 为电子束流横截面中电子数, e 为单个电子电荷, v 为相对论电子运动速度, 它满足洛伦兹力方程和能量方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma v) &= -\frac{|e|\hbar}{m_0} (\mathbf{E}_{\text{总}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{总}}), \\ \frac{d}{dt}\gamma &= -\frac{|e|\hbar}{m_0 c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_{\text{总}}), \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{E}_{\text{总}}$ 和 $\mathbf{B}_{\text{总}}$ 为系统总的电场和磁场, 在一般情况下 $\mathbf{E}_{\text{总}} = \mathbf{E}_r$, $\mathbf{B}_{\text{总}} = \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_r$, $\mathbf{B}_w$ 为 wiggler 磁场强度, $\mathbf{E}_r$ 和 $\mathbf{B}_r$ 为运动中辐射场电场和磁场(本节辐射场均以下标 r 为标记), γ 为相对论电子能量因子. 由于自由电子激光辐射场是电子与波相干而产生的, 电子与波相干前电子受 wiggler 磁场作用只形成自发辐射(非相干辐射), 其自发辐射场可利用推迟势公式解得^[12]

$$\mathbf{E}_r = \frac{e(1 - \beta_z^2)\mathbf{r}}{[r_{\perp}^2(1 - \beta_z^2) + r_{\parallel}^2]^{3/2}},$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{v_z}{c} \times \mathbf{E}_r, \quad (17)$$

式中 $\beta_z = \frac{v_z}{c}$, r 为自发辐射场矢径. 假定系统中 wiggler 磁场为螺旋磁场, 即

$$\mathbf{B}_w = B_w(\hat{e}_x \cos k_w z + \hat{e}_y \sin k_w z), \quad (18)$$

则自发辐射场径向矢量也作相应螺旋形回旋运动, 即有

$$\mathbf{r} = r(\hat{e}_x \cos(k_r z - \omega_r t + \phi) - \hat{e}_y \sin(k_r z - \omega_r t + \phi)). \quad (19)$$

由(16)–(19)式得电子(相干前)运动速度的三个坐标分量为^[13]

$$\begin{aligned} v_{x0} &= \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \sin \xi_r - \frac{\Omega_w c}{\omega_w} \cos k_w z_s, \\ v_{y0} &= \frac{2\Omega_r c}{\omega_r} \cos \xi_r - \frac{\Omega_w c}{\omega_w} \sin k_w z_s, \\ v_{z0} &= \frac{\Omega_r \Omega_w c}{\Delta \omega} \left(\frac{2}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_w} \right) [\sin(\Delta \omega t + \theta) - \sin \theta], \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \frac{|e| E_r}{v_s m_0 c}, \quad \Omega_w = \frac{|e| B_w}{v_s m_0}, \\ \xi_r &= k_r z_s - \omega_r t + \phi, \quad \Delta \omega = (k_r + k_w) v_z^0 - \omega_r, \\ \theta &= (k_r + k_w) z_s + \phi, \end{aligned} \quad (21)$$

式中下标 s 的量为相干前物理量, v_z^0 为电子进入 wiggler 磁场前电子纵向速度, 由此得相干前电流密度和电荷密度为

$$\mathbf{J}_s = ne(\hat{e}_x v_{x0} + \hat{e}_y v_{y0} + \hat{e}_z v_{z0}), \quad (22)$$

$$\rho_{es} = -\frac{ne\Omega_r \Omega_w c(k_r + k_w)}{\Delta^2 \omega} \left(\frac{2}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_w} \right) [\sin(\Delta \omega t + \theta) - \sin \theta - \Delta \omega t \cos \theta]. \quad (23)$$

由于电子与波相干后电子能量和纵向位置都将发生变化, 即有

$$v = v_s + \Delta v, \quad z = z_s + \Delta z. \quad (24)$$

在小信号情况下, 自由电子激光辐射场基本上由同步电子与自发辐射场相干后产生, 所以 $\Delta v = \delta v_0 + \delta v_1$, $\Delta z = \delta z_1$, 它们可表示为^[14]

$$\begin{aligned} \delta v_0 &= \frac{H}{\Delta \omega} [\sin(\Delta \omega t + \theta) - \sin \theta], \\ \delta v_1 &= -D \int \sin(\Delta \omega t + \theta) \delta z_1 dt, \\ \delta z_1 &= \frac{c}{v_s^3} \int \delta v_0 dt = \frac{cH}{v_s^3 \Delta \omega^2} [\cos \theta - \cos(\Delta \omega t + \theta) - \Delta \omega t \sin \theta], \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $H = \frac{\Omega_r \Omega_w v_s}{\omega_w}$, $D = H(k_r + k_w)$. 由此得相干的电子运动速度的坐标分量为

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + v_{x1} \delta z_1, \\ v_y &= v_{y0} + v_{y1} \delta z_1, \\ v_z &= v_{z0} + v_{z1} \delta z_1, \end{aligned} \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned} v_{x1} &= \frac{2\Omega_r k_r c}{\omega_r} \cos \xi_r + \frac{\Omega_w k_w c}{\omega_w} \sin k_w z, \\ v_{y1} &= -\frac{2\Omega_r k_r c}{\omega_r} \sin \xi_r - \frac{\Omega_w k_w c}{\omega_w} \cos k_w z, \\ v_{z1} &= \frac{\Omega_r \Omega_w c (k_r + k_w)}{\Delta \omega} \left(\frac{2}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_w} \right) [\cos(\Delta \omega t + \theta) - \cos \theta]. \end{aligned} \quad (27)$$

由(27)式得相干后电流密度和电荷密度为

$$\mathbf{J} = ne(\hat{e}_x v_x + \hat{e}_y v_y + \hat{e}_z v_z), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{ne\Omega_r \Omega_w c (k_r + k_w)^2}{\nu^2 \omega_w \Delta \omega^3} \left(\frac{2}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_w} \right) \left[\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos(\Delta \omega t + 2\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cos 2(\Delta \omega t + \theta) + \Delta \omega t (\sin(\Delta \omega t + 2\theta) - \sin 2\theta) - \frac{1}{2} (\Delta \omega t)^2 \cos 2\theta \right] \\ &\quad - \frac{ne\Omega_r \Omega_w c (k_r + k_w)}{\Delta \omega^2} \left(\frac{2}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_w} \right) [\sin(\Delta \omega t + \theta) - \sin \theta - \Delta \omega t \cos \theta]. \end{aligned} \quad (29)$$

4 场方程自洽解

为了方便,我们把三维有源波动方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial t^2} u(\mathbf{r}, t) = c^2 \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - c^2 f(\mathbf{r}, t). \quad (30)$$

与(1)式比较显然可看出,当 $f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ 时, $u(\mathbf{r}, t)$ 即代表自由电子激光辐射场电场 $E(\mathbf{r}, t)$, 当 $f(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 时, $u(\mathbf{r}, t)$ 即代表磁场 $B(\mathbf{r}, t)$, 其中 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\rho_e(\mathbf{r}, t)$ 由(22)和(23)式表示, 所以方程中非齐次项 $f(\mathbf{r}, t)$ 应看成是一个已知函数. 利用非齐次微分方程可用按本征函数系展开的试解方程^[15], 先求出(30)式对应齐次方程(即 $f=0$ 时无源波动方程)在满足给定边界条件下的本征函数系, 则 $f(\mathbf{r}, t)$ 可按本征函数系展开

$$f(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) u(n\mathbf{r}), \quad (31)$$

式中

$$f_n(t) = -\frac{2}{c^2 r} \iiint_0^r f(\mathbf{r}_1, t) u(n\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (32)$$

式中 $u(n\mathbf{r})$ 为无源波动方程在满足给定边界条件下的本征函数, $u(n\mathbf{r})$ 的解可利用分离变量法^[15], 设

$$u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) T(t), \quad (33)$$

则 $u(\mathbf{r})$ 和 $T(t)$ 分别满足方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0, \quad (34)$$

$$T''(t) - c^2 k^2 T(t) = 0. \quad (35)$$

(34)式为齐次亥姆霍兹方程, 在柱坐标系下可表为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (36)$$

设

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z), \quad (37)$$

则(36)式可进一步分离为如下三个方程:

$$Z'' - \omega^2 Z = 0, \quad (38)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(k^2 + \omega^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (40)$$

(40)式为贝塞耳方程,其解为

$$R(\rho) = J_m(\omega' \rho), \quad (41)$$

式中 $\omega' = (k^2 + \omega^2)^{1/2}$, 假定边界条件为

$$\alpha \frac{dR}{d\rho} + \beta R(\rho) \Big|_{\rho=b} = 0, \quad (42)$$

则由方程 $\alpha \omega' J'_m(\omega' b) + \beta J_m(\omega' b) = 0$ 的根确定本征值 ω' , 相应的本征函数为

$$R_n(\rho) = J_m(\omega'_n \rho). \quad (43)$$

同理解(38)和(39)式, 并根据其边界条件确定相应的本征函数, 最后由(37)式求出 $u(\rho, \varphi, z)$ 的本征函数, 它即为(31)式中所求的本征函数系 $u(nr)$. 下面举两个例子说明非齐次波动方程求解法:

例一
$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} + c^2 f(z, t), \quad (44)$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0 \quad (0 \leq t),$$

$$u|_{t=0} = \phi(z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(z) \quad (0 \leq z \leq l). \quad (45)$$

上式为给定边界条件和初始条件, 其 $f(z, t)$, $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均为已知函数, (44)式的解为

$$\begin{aligned} u(z, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + \psi_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi z}{l} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \sin \frac{n\pi c(t-\tau)}{l} \sin \frac{n\pi z}{l} f_n(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (46)$$

式中 $\sin \frac{n\pi z}{l}$ 为一维齐次亥姆霍兹方程在(45)式中边界条件下的本征函数

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(z_1) \sin \frac{n\pi z_1}{l} dz_1, \\ \psi_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(z_1) \sin \frac{n\pi z_1}{l} dz_1, \\ f_n(\tau) &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l f(z_1, \tau) \sin \frac{n\pi z_1}{l} dz_1. \end{aligned} \quad (47)$$

例二

$$\frac{\partial^2 u(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u(\rho, \varphi, t) + c^2 f(\rho, \varphi, t), \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \varphi, t)|_{\rho=R_0} &= 0, \\
 u|_{t=0} &= \phi(\rho, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0,
 \end{aligned} \quad (49)$$

式中 $f(\rho, \varphi, t)$ 和 $\phi(\rho, \varphi)$ 均为已知函数, 方程(48)的解为

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \varphi, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{m,n} \cos c \omega_n^m t \cos m \varphi + B_{m,n} \cos c \omega_n^m \sin m \varphi] J_m(\omega_n^m \rho) \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cos c \omega_n^m (t - \tau) (\cos m \varphi + \sin m \varphi) J_m(\omega_n^m \rho) f_n(\tau) d\tau, \quad (50)
 \end{aligned}$$

式中 $(\cos m \varphi + \sin m \varphi) J_m(\omega_n^m \rho)$ 为二维齐次亥霍兹方程在满足(49)式中边界条件下的本征函数

$$\begin{aligned}
 A_{m,n} &= \frac{2}{\pi R_0^2 (J_{m+1}(\omega_n^m R_0))^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \rho \phi(\rho, \varphi) \cos m \varphi J_m(\omega_n^m \rho) d\rho d\varphi, \\
 B_{m,n} &= \frac{2}{\pi R_0^2 (J_{m+1}(\omega_n^m R_0))^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \rho \phi(\rho, \varphi) \sin m \varphi J_m(\omega_n^m \rho) d\rho d\varphi, \\
 f_n(\tau) &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} f(\rho, \varphi, \tau) (\cos m \varphi + \sin m \varphi) J_m(\omega_n^m \rho) d\rho d\varphi. \quad (51)
 \end{aligned}$$

5 结束语

本文系统地讨论了一般 Compton-Raman 型自由电子激光辐射场特性, 研究了在小信号情况下辐射场方程的自洽分析解. 场方程满足有源波动方程和麦克斯韦方程组, 场方程的解可归结为非齐次波动方程特解与对应齐次波动方程的通解之和所组成. 求解过程必须先求出齐次波动方程在满足给定边界条件下的本征函数系. 波动方程中非齐次项 $f(\mathbf{r}, t)$ 为(1)式等号右端时, 其解为自由电子激光辐射场的自洽解. 其中 $\mathbf{J}$ 和 ρ_e 一般由(28)和(29)式给出.

感谢王润文研究员对本文提出了宝贵意见.

- [1] L. R. Elias *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 717.
- [2] H. Dreicer, *Phys. Fluids*, **7**(1964), 735.
- [3] R. H. Pantell *et al.*, *IEEE J. Quan. Elec.*, **QE-4**(1968), 905.
- [4] J. M. J. Madey, *J. Appl. Phys.*, **42**(1971), 1906.
- [5] F. A. Hopf *et al.*, *Opt. Commun.*, **18**(1976), 413.
- [6] W. B. Colson, *Phys. Quan. Elec.*, **5**(1978), 157.
- [7] P. Sprangle and R. A. Smith, *Phys. Rev.*, **A21**(1980), 293.
- [8] G. G. Shih and A. Yariv, *Phys. Rev.*, **A22**(1980), 2717.
- [9] I. B. Bernstein and L. Friedland, *Phys. Rev.*, **A23**(1981), 816.
- [10] L. Friedland and A. Fruchtman, *Phys. Rev.*, **A25**(1982), 2693.
- [11] 刘盛纲, 强激光与粒子束, **2**(1990), 131.
- [12] 曹昌祺编, 电动力学(人民教育出版社, 北京, 1962), 第 212 页.

- [13] 赵东焕, 红外与毫米波学报, 10(1991), 87.
[14] 赵东焕, 物理学报, 43(1994), 1447.
[15] 陆全康编, 数学物理方法(下册)(上海科学技术出版社, 上海, 1982), 第 10, 11, 17 章.

CLASSICAL THEORETICAL ANALYSIS OF RADIATIONS FIELDS IN THE FREE ELECTRON LASER

ZHAO DONG-HUAN LEI SHI-ZHAN

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800*)

(Received 30 August 1994)

ABSTRACT

The radiations fields of FELs are analysed by using the classical electrodynamics. The general characteristics of radiation fields are discussed, and the methods of self-consistent solutions for the radiation fields of FELs are established systematically by using the Maxwell equations, wave equation, continuity equation of electron, Lorentz force equation and energy equation of relativistic electrons.

PACC: 4255T