

动力学不连续性引起的新型激变^{*}

孙建刚 官 山 纪西萍 何大韧¹⁾

(西北大学物理系, 西安 710069)

汪秉宏

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

屈世显

(西安石油学院基础部, 西安 710061)

(1995 年 6 月 7 日收到; 1995 年 8 月 1 日收到修改稿)

在描述张弛振子的一维不连续映象中, 可以观察到由于混沌吸引子与动力学不连续点集碰撞而引起的具有新特征的激变. 参量空间中的表征不同特征激变的四个临界曲面有可能会聚于一个公共“尖点”. 在此尖点附近, 参量的扰动会导致混沌吸引子的突然膨胀或收缩.

PACC: 0545

1 引 言

近 20 年对可微非线性动力系统复杂现象的研究取得很大进展, 但大量存在的充满突变行为的动力系统所对应的“分段光滑”数学模型尚未受到足够重视. 最近几年来对描述张弛振子或冲击振子的分段光滑映象的动力学行为的研究开始引起人们的注意^[1-19].

本文部分作者(何、汪、官)关于张弛振子系统的研究发现了下列新的动力学现象与规律:

(1) V 型阵发: 这是此类模型中“不可微点集”与一个稳定周期轨道碰撞而导致混沌的动力学过程. 这种周期吸引子向混沌吸引子的突变可被称为一个“非光滑分岔”^[11]. 对于一维映象数学模型亦可称为“尖角接触型分岔”^[4]. 我们用解析、数值和电子张弛振子的实验方法证明了: 这种阵发显示出与偏离临界点控制参量值的对数成正比的平均层流相长度^[3,4,8], 双曲正割函数型的层流相长度概率分布^[5]及与偏离临界点控制参量值的对数成反比的李雅普诺夫指数^[7,11]. 我们也给出外噪声对于上述性质的影响^[6]. V 型阵发已经在气体辉光放电系统^[9]、锗自激振荡系统^[10]和冲击振子系统^[11]中得到实验和数值验证.

(2) “映孔”导致吸引域分裂和吸引子共存: “映孔”是既不连续又不可逆一维映象中的特有现象, 它是指当不连续点的逆映象具有多值性时高次迭代映象在某个极值点近邻

^{*} 国家攀登计划“非线性科学”重大项目、国家自然科学基金和陕西省自然科学基金资助的课题.

¹⁾ 通讯联系人.

两侧成对出现的状如孔洞的不连续区域.映孔的出现可以导致周期吸引子的吸引域的分裂和共存吸引子的出现.共存吸引子通常以映孔及其各阶逆映象为其吸引域.这种现象随着映孔的消失而结束.映孔的存在与消失构成“魔梯”现象中的新景观^[17,18,20].

(3)“映孔”导致激变:当映孔与一局域混沌吸引子碰撞时,轨道迭代可以经过映孔而逃逸出此吸引子,从而导致混沌吸引子的突然扩张^[21].

本文将报道:一种与理想化张弛振子对应的一维分段光滑映象,由于其动力学不连续性与不可逆性的相互作用,可以呈现出更多种类的具有新特征的激变.在控制参数空间中,发生不同种类激变的临界曲面在一定条件下能够会聚于同一“尖点”.在此尖点附近,参量的扰动会导致系统动力学行为的复杂而剧烈的变化^[1].

2 系 统

本文研究的系统是具有“累积-触发”动力学特征的张弛振子模型.其中一个变量 V 以恒定的上升斜率 I_i 和恒定的下降斜率 $-I_d$ 在一个方波调制上阈值与一个恒定下阈值之间作张弛振荡^[20].这是一种描述实际电子张弛振荡的简化模型^[16,18].这一简化模型仍然能够呈现出非线性张弛振子模型中的大多数特征现象,然而由于其逐段线性,可以方便地进行解析研究.我们已经解析推导出这一模型的彭卡莱映象.不失一般性,可取上阈电压的平均值为 1. I_i 和 I_d 分别是充电与放电期间的电流强度,设参数 A 为控制电压上阈值的方波调制信号的幅度,则当 $I_i \geq 4A$ 时,映象为^[20]

$$t_{m+1} = f_i(t_m) = k_i(t_m) + b_i \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= 1, & b_1 &= J(1 + A), & \text{当 } t_m \in [t_{mi}, t_{mm}]; \\ k_2 &= -I_i/I_d, & b_2 &= JI_i(n + 1/2), & \text{当 } t_m \in [t_{mm}, t_{me}]; \\ k_3 &= 1, & b_3 &= J(1 - A), & \text{当 } t_m \in [t_{me}, 1 + t_{mi}]; \\ J &= (I_i + I_d)/I_i I_d. \end{aligned} \quad (2)$$

若 $I_i < 4A$, 则 f_1 函数枝将不出现.设方波的周期为 1, 则

$$\begin{aligned} t_{mi} &= n - (1 - A)/I_i, & t_{mm} &= n + 1/2 - (1 + A)/I_i, \\ t_{me} &= n + 1/2 - (1 - A)/I_i, \end{aligned}$$

其中 n 为某个整数.这是正圆映象与逆圆映象耦合而成的不可逆性与不连续性并存的动力学系统. t_{mi} 即是一个间断点,在此点的迭代函数存在宽度为 $2JA$ 的间断跳跃.间断点及其迭代构成系统的动力学不可微点集.

如果在一个迭代轨道中,有 Q 次访问 f_1 , P 次访问 f_2 , W 次访问 f_3 , 则由于三个映象函数段中有两段的斜率恒为 1, 易得此轨道的李雅普诺夫指数表示式为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[(P/N) \ln |I_i/I_d| \right], \quad (3)$$

其中 $N = P + Q + W$. 此式告诉我们在 I_i - I_d 参量平面上, 对角线 $I_i = I_d$ 所分隔开的两个区域具有完全不同的动力学行为.在 $I_i > I_d$ 部分, 当 $P \neq 0$, $\lambda > 0$, 轨道是混沌的.而在 I_i

$< I_d$ 部分, 当 $P \neq 0$, $\lambda < 0$, 轨道是周期的. 这也就是说, 在一般情况下, 斜率可变的 f_2 段决定了系统行为的基本动力学类型. 然而, 由于映象在 $t = t_{mi}$ 处的不连续性, 可能出现 $P = 0$ 的参数区域, 造成以上讨论的例外情况, 这在文献[20]中已作讨论, 在此不再赘述, 本文所要讨论的激变现象, 亦即混沌吸引子的拓扑突变行为, 当然只可能出现在 $I_i > I_d$ 区域.

取定参数 $A = 0.6$, 观察参量平面 $I_i - I_d$ 上各点对应的混沌吸引子的几何形态, 可以得到四条激变临界线, 如图 1 所示. 这些临界线会聚于一个公共尖点 F , F 点的坐标为: $I_{d,F} = 1.200$, $I_{i,F} = 2.400$. 以下将解析推导四条激变临界线的表达式并证明这四条激变临界线的确存在一个公共尖点.

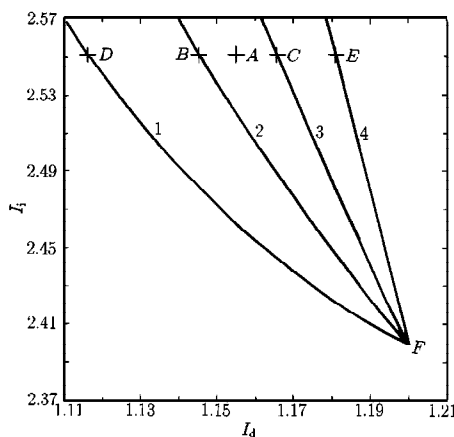


图 1 当 $A = 0.6$ 时, $I_i - I_d$ 参数平面上的四条激变临界线以及它们的会聚点 F

3 激变临界线的解析推导

图 2 显示了图 1 中 A 点处的映象(1)的回归映射(return map). 在极大值 $f_2(t_{mm})$ 附近的细黑线显示出这时的局域混沌吸引子. 这些线是选取初值 $t_0 = 0.5$, 略去 2000 次迭代以避免瞬态行为, 然后记录 200 次迭代得到的. 此一混沌吸引子局限在从 $f_2[f_2(t_{mm})]$ 至 $f_1 f_2 f_2(t_{mm})$ 之间的区域. 当 I_d 值减小时, 迭代函数 f_1 段会上升而离开对角线, 因而此混沌吸引子的占据范围会逐渐扩大. 当 I_d 减小到临界值 $I_{d,c}^{(2)}$ 时, 此吸引子的边缘即与不连续点 t_{mi} 碰撞. $I_{d,c}^{(2)}$ 由下式定义:

$$f_2 f_2(t_{mm}) = t_{mi}. \quad (4)$$

当 $I_d < I_{d,c}^{(2)}$, 局域吸引子将由于与不连续点 t_{mi} 的碰撞而突然扩张. 吸引子几何形态的突然扩张或消失是一种激变现象. 然而, 当 $\epsilon = I_{d,c}^{(2)} - I_d$ 为小量时, 扩张吸引子的轨道迭代的绝大部分仍然落在未扩张前吸引子所占据的小区域中, 它必须经过某一“生存时间” τ 之后, 才能够越出扩张前的小范围而作少数几次大幅度跳跃, 然后又会“重注入”到此小区域中, 如图 3 所示.

激变现象及其长混沌瞬态行为的特征首先由 Grebogi, Ott 和 Yorke 等发现和研究. 但他们所研究的激变现象都属于光滑动力系统.

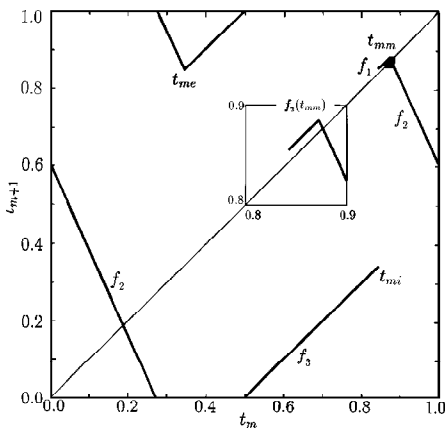


图 2 $A = 0.6$, $I_i = 2.551$, $I_d = 1.155$ (图 1 中 A 点) 映射(1)的回归映象. 图正中插入方图是极大值 t_{mm} 附近映象函数的放大

基于可微数学模型,他们提出三种激变机制:

(1)内禀激变:是指混沌吸引子与其吸引域内的一个鞍结点碰撞而突然扩张或收缩.(2)边界激变:是指一个混沌吸引子与另一共存吸引子的吸引域边界碰撞而导致共存结束,使混沌吸引子突然消失.(3)循环激变:是指两个或更多个共存混沌吸引子因同时与它们的吸引域边界碰撞而突然合并.

显然,我们这里报道的 $I_d = I_{d,c}^{(2)}$ 时混沌吸引子的突然扩张也是一种激变.然而与上述三种激变机制不同,这里与混沌吸引子碰撞的点集是不可逆不连续逐段线性映射的动力学不可微点集:间断点 t_{mi} 及其各次迭代^[11],因而带有明显的新特征.从临界条件(4)式可以得到激变临界参数 $I_{d,c}^{(2)}$ 的解析表达式为

$$I_{d,c}^{(2)} = \frac{I_i \{ 2 I_i - [4 I_i^2 - 6(1+A) I_i + 4(1-A^2)]^{1/2} \}}{3 I_i - 2(1-A)}. \quad (5)$$

当 $I_d < I_{d,c}^{(2)}$ 并继续减小时,已经历一次激变的混沌吸引子将继续逐渐膨胀,但仍然局限于一定范围,如图 4(a) 所示,其吸引子边界由 $f_2(t_{mm})$, $f_2 f_2(t_{mm})$, $f_3 f_2 f_2(t_{mm})$ 和 $f_2 f_3 f_2 f_2(t_{mm})$ 给出.当 I_d 进一步降低而使得 $f_2 f_3 f_2 f_2(t_{mm}) > f_2(t_{mm})$ 时,在图 4(a) 中可以看到轨道迭代不再重注入回介于 $f_2(t_{mm})$ 与 $f_2 f_2(t_{mm})$ 之间的 f_2 函数段,从而使轨

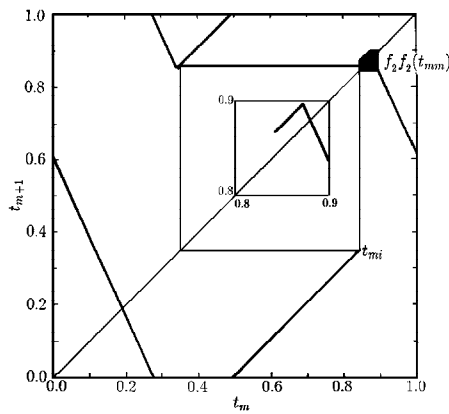
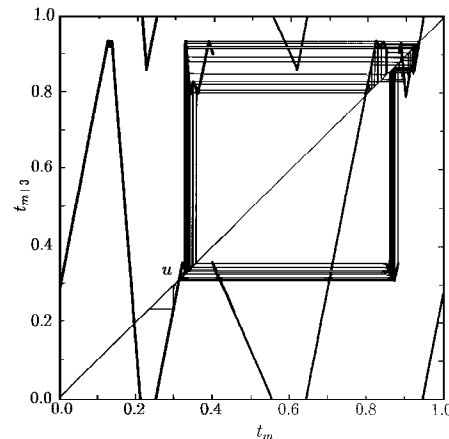
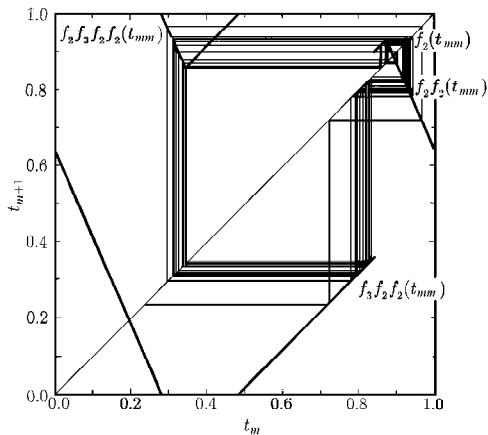


图 3 $A = 0.6$, $I_i = 2.551$, $I_d = 1.1453$ (图 1 中 B 点)映射(1)的回归映像. 细黑线是取 $x_0 = 0.5$, 略去 2000 次瞬态迭代, 记录 200 次画出的轨道; 中间插入方图是极大值 $f_2(t_{mm})$ 附近迭代放大



(a) $A = 0.6$, $I_i = 2.551$, $I_d = 1.11644$ (图 1 中 D 点)映射(1)的回归映像. 细直线是取 $x_0 = 0.5$, 略去 2000 次瞬态迭代, 记录 100 次画出的轨道

(b) 参数值与图(a)相同时映射(1)的 3 次迭代映像

图 4

道很快从上述区域中逃逸出去. 这一类激变的临界条件 $I_{d,c}^{(1)}$ 由下式确定:

$$f_2 f_3 f_2 f_2(t_{mm}) = f_2(t_{mm}). \quad (6)$$

由此得到激变临界线(1)的解析表达式为

$$[2I_d - (1 + A)] I_i^2 - [2I_d - (1 - A)] I_d I_i - (I_d - 2) I_d^2 = 0. \quad (7)$$

同样, 可以认为当

$$\epsilon = I_{d,c}^{(1)} - I_d > 0$$

为小量时, 迭代将经过孔洞 $f_2 f_3 f_2 f_2(t_{mm}) - f_2(t_{mm})$ 逃逸出去.

临界条件(6)式明显告诉我们: 映象(1)的一个周期 3 轨道与以极值 $f_2(t_{mm})$ 为标志的局域混沌吸引子发生碰撞. 这一机制可以用 3 次迭代映象显示地说明, 如图 4(b)所示. 图 4(b)中显示出当超过临界点时, 迭代可以跨越三阶不稳定不动点而逃离原局域混沌吸引子的占据区域.

当 I_d 从 $I_{d,A} = 1.155$ (即图 1 中 A 点) 增大时, 图 2 中的 f_1 段将向对角线靠拢, 局域混沌吸引子的尺寸将不断减小. 当 $I_d = I_{d,c}^{(3)}$ 时, f_1 段与对角线重合, 原局域混沌吸引子的尺寸减小到零, 临界参数 $I_{d,c}^{(3)}$ 由下式确定:

$$f_2(t_{mm}) = t_{mm}. \quad (8)$$

易得其解析表达式为

$$I_{d,c}^{(3)} = I_i(1 + A)/[2I_i - (1 + A)]. \quad (9)$$

当此激变发生时, 整个 f_1 段成为临界稳定的不动点集, 尺寸缩为零的局域混沌吸引子与此点集发生碰撞而引起这一激变. 当 $I_d > I_{d,c}^{(3)}$ 或

$$\epsilon = I_d - I_{d,c}^{(3)} > 0$$

时, f_1 段降到对角线以下, 在 f_1 段与对角线之间形成一个“层流隧道”, 轨道迭代可以通过此隧道逃离原来的无穷小混沌吸引子而发生突然扩张, 如图 5 所示.

当 $I_d > I_{d,c}^{(3)}$ 并继续增大时, f_1 段继续下降而远离对角线, 使已扩张一次的局域于一定范围的混沌吸引子继续扩张. 但只要保持 $I_d <$

$I_{d,c}^{(4)}$, 它仍然被约束在如图 6(a) 所示的 $f_1(t_{mi})$, $f_3 f_1(t_{mi})$, $f_2 f_3 f_1(t_{mi})$, $f_2 f_2 f_3 f_1(t_{mi})$ 范围内, 临界参数 $I_{d,c}^{(4)}$ 由下式确定:

$$f_2 f_2 f_3 f_1(t_{mi}) = f_1(t_{mi}), \quad (10)$$

其解析表达式为

$$(I_i - 4A) I_d^3 + (4 - 5I_d) I_i^3 + 2(1 + A) I_d I_i (I_i - I_d) + 2(I_i I_d)^2 = 0. \quad (11)$$

当 $I_d > I_{d,c}^{(4)}$, 即 $f_2 f_2 f_3 f_1(t_{mi}) < f_1(t_{mi})$, 如图 6(a) 所示时, 迭代将通过逃逸孔洞 ($f_1(t_{mi})$, $f_2 f_2 f_3 f_1(t_{mi})$) 而逃离原临界奇异集.

激变条件(10)式表示映象(1)的一个周期 3 轨道与由不连续点集上端 $f_1(t_{mi})$ 决定的

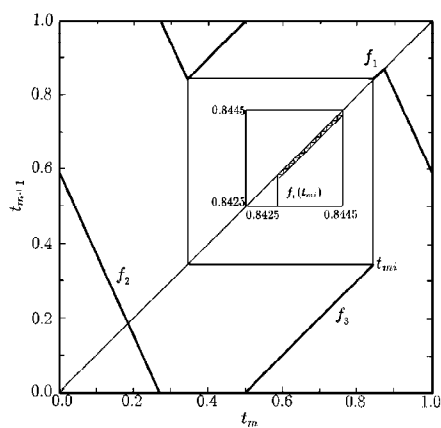
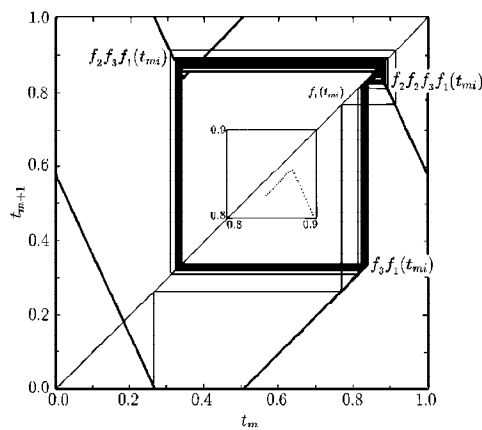
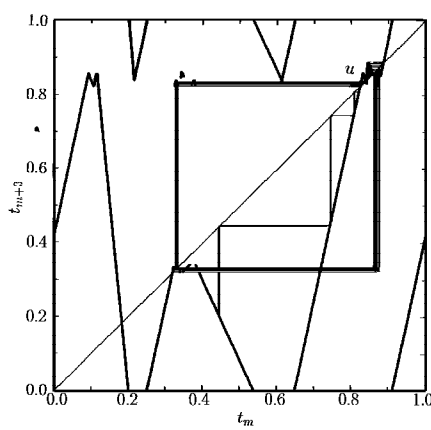


图 5 $A=0.6$, $I_i=2.551$, $I_d=1.1656$ (图 1 中 C 点) 映射(1)的回归映象. 细黑线是取 $x_0=0.5$, 略去 2000 次瞬态迭代, 记录 50 次迭代画出的轨道; 中间插入方图是隧道部分的放大.



(a) $A=0.6$, $I_i=2.551$, $I_d=1.1808$ (图 1 中 E 点)映射(1)的回归映象 细黑线是取 $x_0=0.5$, 略去 2000 次瞬态迭代, 记录 100 次画出的轨道



(b) 参数值与图(a)相同时映射(1)的 3 次迭代映象

图 6

混沌吸引子的边界发生碰撞, 这一机制可由图 6(b)中的 3 次迭代映象明显地表示. 从图 6(b)中可以看到: 当混沌吸引子中的轨道迭代能够跨越三阶不稳定不动点时即可逃离原临界奇异集而发生激变.

4 参量空间中激变临界曲面的相交

方程(5), (7), (9)和(11)分别确定了在三维参量空间 (A, I_d, I_i) 中的四个激变临界曲面 1, 2, 3, 4 的位形. 每两个不同的激变临界曲面相交于一条空间曲线, 在这些交线上, 同时发生两种类型的激变. 例如: 激变曲面 3 与激变曲面 1 的交线方程为

$$I_d = (3 - A)/2, \quad I_i = (1 + A)(3 - A)/4(1 - A); \quad (12)$$

激变曲面 3 与激变曲面 2 的交线方程为

$$I_d = 4A(1 + A)/(7A - 1), \quad I_i = 4A; \quad (13)$$

激变曲面 3 与激变曲面 4 的交线方程为

$$I_d = \frac{(1 + A) \{2(5A - 1) + [2(10A - 1 - 13A^2)]^{1/2}\}}{2(7A - 1)},$$

$$I_i = \frac{(1 + A) \{4(1 - 2A) + [2(10A - 1 - 13A^2)]^{1/2}\}}{2(3 - 5A)}. \quad (14)$$

由此可见, 对于一般的 A 值, 不同的激变临界曲面在 (I_d, I_i) 参数平面上的截线一般相交于不同的点. 然而对于 $A=3/5$ 这一特殊情形, 四条临界曲线都相交于一个共同的“尖点” F , 如图 1 所示, 其坐标为 $I_{d,F}=6/5$, $I_{i,F}=12/5$. 如前所述, 这是 f_1 段消失的临界点. 当 $A=3/5$, $I_{d,F}=6/5$, $I_{i,F}=12/5$ 时, f_1 段缩短为一个点, 且位于对角线上. 这很好地解释了四条激变临界线为何能够会聚于一个共同尖点. 在此尖点附近, 参量的扰动将导致系统

动力学性质的复杂突变,产生五种不同几何形状的混沌吸引子,它们只因参量的微小变更,即经历突然的扩张或收缩而互相变化。

5 结 论

本文报道了描述张弛振子的既不连续又不可逆的一维分段光滑映象中具有新特征的几种激变现象。这些激变现象的发生机制是:由映射函数极值点决定的混沌吸引子边界、映射的不连续点集和映射的不稳定周期轨道三者之中有两者发生相互碰撞。参量空间中两个以上的激变临界曲面有可能会聚于同一公共不可微“尖点”。

作者(汪、何)感谢中国科学院理论物理研究所开放课题的持续支持。

- [1] J. A. Gallas, C. Grebogi and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 1359.
- [2] H. E. Nusse, E. Ott and J. A. Yorke, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1073.
- [3] M. Bauer, S. Habip, D. R. He and W. Martienssen, *Phys. Rev. Lett.*, **68**(1992), 625.
- [4] D. R. He, M. Bauer, U. Krueger, S. Habip, W. Martienssen, B. Christiansen and B. H. Wang, *Phys. Lett.*, **A171**(1992), 61; *物理学报*, **42**(1993), 711.
- [5] J. Fan, F. Ji, S. Guan, B. H. Wang and D. R. He, *Phys. Lett.*, **A182**(1993), 232.
- [6] J. Fan, F. Ji, B. H. Wang and D. R. He, *Phys. Lett.*, **A191**(1994), 139.
- [7] S. Wu, E. J. Ding and D. R. He, *Phys. Lett.*, **A197**(1995), 287.
- [8] F. Ji and D. R. He, *Phys. Lett.*, **A177**(1993), 125.
- [9] C. Wunderlich, L. Moorman and P. M. Koch, *Phys. Lett.*, **A176**(1993), 317.
- [10] R. Richter, A. Kittel, K. Pyragas, J. Peinke and J. Parisi, *Z. Phys.*, **B91**(1993), 527.
- [11] H. Lamba and C. J. Budd, *Phys. Rev.*, **E50**(1994), 84.
- [12] W. Chen, E. Ott, H. E. Nusse and C. Grebogi, *Phys. Rev.*, **E50**(1994), 4427.
- [13] J. P. Keener, *Trans. Am. Math. Soc.*, **261**(1980), 589.
- [14] E. J. Ding and P. C. Hemmer, *J. Stat. Phys.*, **46**(1987), 99.
- [15] W. M. Zheng and L. S. Lu, *Commun. Theor. Phys.*, **15**(1991), 16.
- [16] B. Christiansen, D. R. He, S. Habip, M. Bauer, V. Krueger and W. Martienssen, *Phys. Rev.* **A45**(1992), 8450.
- [17] D. R. He, E. J. Ding, M. Bauer, S. Habip, V. Krueger, W. Martienssen and B. Christiansen, *Euro. Phys. Lett.*, **26**(1994), 165.
- [18] D. R. He, B. H. Wang, M. Bauer, V. Krueger, W. Martienssen and B. Christiansen, *Physica*, **D79**(1994), 335.
- [19] K. Yagisawa, T. Kambara and M. Naito, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1320.
- [20] S. Guan, B. H. Wang, D. K. Wang, D. R. He, *Phys. Rev.*, **E52**(1995), 453.
- [21] S. X. Qu, B. Christiansen and D. R. He, *Phys. Lett.*, **A201**(1995), 413.

NEW CRISES DUE TO DYNAMICAL DISCONTINUITY

SUN JIAN-GANG GUAN SHAN JI XI-PING HE DA-REN

(*Department of Physics, Northwestern University, Xian 710069*)

WANG BING-HONG

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

QU SHI-XIAN

(*Department of Basic Courses, Xian Petroleum Institute, Xian 710061*)

(Received 7 June 1995; revised manuscript received 1 August 1995)

ABSTRACT

We have observed crises with new characteristics induced by discontinuity in a one-dimensional discontinuous map describing relaxation oscillators. There are four critical lines characterizing different types of new crises in the parameter plane (I_d , I_i). These have a common convergence at a non-differentiable vertex, near which a small parameter perturbation may induce drastic dynamical changes of the system.

PACC: 0545