

微扰 Burgers-KdV 方程的孤子解*

海文华¹⁾

(湖南教育学院物理系, 长沙 410012)

肖 奕

(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

(1995年4月11日收到)

对于一个其耗散项可看作微扰的 Burgers-KdV (B-KdV) 方程 $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \epsilon u_{xx}$, $|\epsilon| \ll 1$, 考虑一级近似和行波情形, 建立一套求通解的直接扰动方法. 利用零级方程的单孤子解, 获得一级方程的孤子型通解. 它包含任意多个不同的孤子解, 每个孤子解分别描述一个位于半无限空间的孤子阵列. 分析表明, 耗散使得“亮孤子”变矮变窄, “暗孤子”变浅变窄.

PACC: 4735; 4720; 0340

1 引 言

KdV 方程是一类相当重要的和基本的非线性方程^[1]. 它在非线性问题中的地位似与 D'Alembert 方程在线性问题中的地位相当. 这不仅因为它在孤子研究的历史上具有重要地位, 而且因为它本身及对它的修正方程在流体力学乃至物理学其它领域具有应用价值. 例如, 在 KdV 方程中添加一个二阶项, 得到 B-KdV 方程^[2]; 添加一个五阶项, 得到所谓五阶 KdV 方程^[3]. 前者被研究者用来作为湍流的规范方程^[4-6], 后者被用来描述非定域孤波的运动^[7-9]. B-KdV 方程实质上是带耗散的 KdV 方程, 因为增加的二阶项积分一次后成为一阶项, 在行波情形它正比于时间导数. 近几年人们对 B-KdV 方程的研究有增无减^[10, 11], 但因方程的不可积, 至今仍未得到小耗散情形的解析解^[12]. 小耗散 B-KdV 方程是一类微扰 KdV 方程, 而微扰 KdV 方程由于应用上的重要性已引起人们极大的兴趣^[13].

本文将处理一个其耗散项可看作微扰的 B-KdV 方程^[2]

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \epsilon u_{xx}, \quad |\epsilon| \ll 1, \quad (1)$$

利用变分法中熟知的 Euler-Lagrange 方程与相应的 Jacobi 方程之间的关系^[14], 建立起一套求方程(1)孤子解的方法. 在一级近似和行波情形, 我们得到依赖零级单孤子解的一级孤子型通解. 与微扰直接相关的一级通解说明, 小耗散使得 KdV 孤子由单峰变成多峰,

*国家自然科学基金及湖南省自然科学基金资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080.

且主峰高度和宽度被改变,孤子存在的空间由正负无穷变为半无限.结合孤子型通解的数学形式,文中讨论了有关物理性质.

2 求 B-KdV 方程行波通解的直接微扰法

对于确定的色散参数 β 和耗散参数 ϵ ,假定孤子以恒定速度 c 运动,则方程(1)应有如下形式的行波解:

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式,后者化为一个三阶常微分方程

$$-cu_\xi + \frac{1}{2}(u^2)_\xi + \beta u_{\xi\xi\xi} = \epsilon u_{\xi\xi}, \quad |\epsilon| \ll 1. \quad (3)$$

由(3)式积分一次易得

$$A - cu + \frac{1}{2}u^2 + \beta u_{\xi\xi} = \epsilon u_\xi, \quad (4)$$

式中 A 为积分常数.由于正比于 ϵ 的耗散项是微扰项,它对场变量 u 仅贡献一个一级小量 u_1 ,使得 $u = u_0 + u_1$, $|u_1| \ll |u_0|$.将该式代入(4)式,并令零级项之和与一级项之和分别等于零,得

$$A - cu_0 + \frac{1}{2}u_0^2 + \beta u_{0,\xi\xi} = 0, \quad (5)$$

$$-cu_1 + u_0 u_1 + \beta u_{1,\xi\xi} = \epsilon u_{0,\xi}. \quad (6)$$

显然零级方程(5)相应于未扰 KdV 方程的一次积分.一级微扰的方程(6)是一个非齐次变系数线性方程,它的系数和非齐次项依赖于零级方程的解 u_0 .而零级方程(5)是可积的,其通解可用椭圆积分表示为

$$\int \frac{\sqrt{\beta} du_0}{\sqrt{-\frac{1}{3}u_0^3 + cu_0^2 - 2Au_0 - D_1}} = \xi - D_2, \quad (7)$$

式中 D_1, D_2 为两个相互独立的积分常数.

一级方程(6)是不可积的,处理起来比较棘手,我们将建立一个巧妙的方法来获取它的通解.我们知道,任何非齐次方程的通解可表为它的一个特解与相应的齐次方程通解的线性叠加.设 u_1^* 和 u_1' 分别为方程(6)的特解和相应的齐次方程

$$-cu_1' + u_0 u_1' + \beta u_{1',\xi\xi} = 0 \quad (8)$$

的通解,那么(6)式的通解成为 $u_1 = u_1^* + u_1'$.从而微扰 B-KdV 方程(3)在一级近似下的通解为

$$u = u_0 + u_1 = u_0 + u_1^* + u_1'. \quad (9)$$

零级方程(5)又可表为变量 ξ 空间的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial u_0} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{0,\xi}} \right) = 0, \quad (10)$$

式中 L 为 Lagrange 密度.

$$L = \frac{1}{2}\beta(u_{0,\xi})^2 - Au_0 + \frac{1}{2}cu_0^2 - \frac{1}{6}u_0^3. \quad (11)$$

相应于(10)式的 Jacobi 方程为^[14]

$$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial u_0^2} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u_0 \partial u_{0,\xi}} \right) \right] u'_1 - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u_{0,\xi}^2} u'_{1,\xi} \right) = 0 \quad (12)$$

结合(11)和(12)式, 不难看出后者即为(8)式, 即(8)式为(5)式的 Jacobi 方程. 根据变分法中熟知的结果^[14], (8)式的通解可用(5)式的通解表示为

$$u'_1 = B_1 \frac{\partial u_0}{\partial D_1} + B_2 \frac{\partial u_0}{\partial D_2}, \quad (13)$$

式中 B_1, B_2 是两个一级小常数, $\partial u_0 / \partial D_1$ 和 $\partial u_0 / \partial D_2$ 为(8)式的两个特解. 事实上, 对(13)式取两阶导数并利用(5)式, 易得

$$\begin{aligned} u'_{1,\xi\xi} &= (B_1 \frac{\partial}{\partial D_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial D_2}) u_{0,\xi\xi} = (B_1 \frac{\partial}{\partial D_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial D_2}) \beta^{-1} (cu_0 - \frac{1}{2}u_0^2 - A) \\ &= \beta^{-1} (c - u_0) (B_1 \frac{\partial}{\partial D_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial D_2}) u_0 = \beta^{-1} (c - u_0) u'_1. \end{aligned}$$

此即方程(8), 从而证明了(13)式确为(8)式的通解. 给出齐次方程(8)的通解(13)式以后, 相应的非齐次方程(6)的一个特解可由常数变易法直接写出为

$$u_1^* = f_1(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial D_1} + f_2(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial D_2}, \quad (14)$$

式中函数 f_1 和 f_2 满足下列线性方程:

$$\frac{\partial u_0}{\partial D_1} f_{1,\xi} + \frac{\partial u_0}{\partial D_2} f_{2,\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_0}{\partial D_1} \right)_\xi f_{1,\xi} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial D_2} \right)_\xi f_{2,\xi} = \frac{\varepsilon}{\beta} u_{0,\xi}. \quad (15)$$

容易证明, 在条件(15)式下, (14)式确为方程(6)的特解. 将(7), (13)和(14)式代入(9)式, 原则上可得微扰 B-KdV 方程(3)的通解.

在具体求解过程中, 由(13)至(15)式可见, 求得 $\partial u_0 / \partial D_1$ 和 $\partial u_0 / \partial D_2$ 的函数形式是至关重要的. 一个微妙的求解技巧是: 先由(7)式写出这两个函数应满足的方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial D_2} &= -u_{0,\xi} = -\sqrt{\beta^{-1} \left(-\frac{1}{3}u_0^3 + cu_0^2 - 2Au_0 - D_1 \right)}, \\ \left(\frac{\partial u_0}{\partial D_1} \right)_\xi &= \frac{\partial}{\partial D_1} u_{0,\xi} \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}u_0^2 + cu_0 - A \right) \frac{\partial u_0}{\partial D_1} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{\beta \left(-\frac{1}{3}u_0^3 + cu_0^2 - 2Au_0 - D_1 \right)}},$$

再通过选取合适的任意常数 A 和 D_1 , 由(7)式得到 u_0 的显式, 继而代入(16)式, 求得 $\partial u_0 / \partial D_i$ 的具体形式. 若选取 u_0 为 KdV 方程的孤子解, 则按此方法求得的 u_1 为孤子型通解. 若选取 u_0 为 KdV 方程的周期解, 则 u_1 为周期型通解.

3 微扰 B-KdV 方程的孤子型通解

我们的兴趣在于确定一级 B-KdV 方程(6)的孤子型通解. 孤子型通解的概念已见于

一些文献^[15,16]. 由于孤子型通解包含某些任意常数或函数, 所以它包含许多不同形式的孤子, 这些孤子对应着各种初、边值条件. 孤子型通解在实际初、边值问题中的应用, 必将受到更广泛的重视.

对于我们考虑的系统, 若选取任意常数 A 和 D_1 为 $A = D_1 = 0$, 则零级解(7)式为 KdV 方程的单孤子解

$$u_0 = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (\xi - D_2) \right], \quad A = D_1 = 0. \quad (17)$$

为了计算的简便, 令新的变量 ξ' 为

$$\xi' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (\xi - D_2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} (x - ct - D_2), \quad (18)$$

于是由(17)和(18)式写出下列计算中有用的函数:

$$u_{0,\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\beta}} u_{0,\xi'} = -3 \sqrt{\frac{c^3}{\beta}} \operatorname{sech}^2 \xi' \operatorname{th} \xi', \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} u_0^2 - cu_0 = 3c^2 \operatorname{sech}^2 \xi' \left(\frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \xi' - 1 \right). \quad (20)$$

将它们与(17)式一起代入(16)式, 得

$$\frac{\partial u_0}{\partial D_2} = 3 \sqrt{\frac{c^3}{\beta}} \operatorname{sech}^2 \xi' \operatorname{th} \xi', \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial D_1} \right)_\xi = \frac{\partial u_0}{\partial D_1} \sqrt{\frac{c}{\beta}} \left(\frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \xi' - 1 \right) \operatorname{cth} \xi' - \frac{1}{6 \sqrt{\beta c^3}} \operatorname{ch}^2 \xi' \operatorname{cth} \xi'. \quad (22)$$

方程(22)是函数 $\partial u_0 / \partial D_1$ 的一阶非齐次变系数常微分方程, 它有如下熟知的解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial D_1} &= -\frac{1}{3c^2} \exp \left[\int (3 \operatorname{sech}^2 \xi' - 2) \operatorname{cth} \xi' d\xi' \right] \\ &\quad \times \int \operatorname{ch}^2 \xi' \operatorname{cth} \xi' \exp \left[\int (2 - 3 \operatorname{sech}^2 \xi') \operatorname{cth} \xi' d\xi' \right] d\xi' \\ &= \frac{1}{3c^2} \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^2 \xi' (\operatorname{cth} \xi' - \operatorname{sh}^3 \xi' \operatorname{ch} \xi' - 3\xi'). \end{aligned} \quad (23)$$

计算中已令积分常数为零, 因为我们只需一个特解. 将(21)和(23)式代入(8)式, 经冗长的计算可直接证明它们确为方程(8)的特解, 因而它们的线性叠加为(8)式的通解.

现在求一级方程(6)的特解(14)式的具体形式. 联立(15), (21)和(23)式, 有

$$\begin{aligned} f_{2,\xi} &= \frac{\epsilon}{\beta} u_{0,\xi} \frac{\partial u_0}{\partial D_1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial D_1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial D_2} \right)_\xi - \frac{\partial u_0}{\partial D_2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial D_1} \right)_\xi \right] \\ &= 2\epsilon u_{0,\xi} \frac{\partial u_0}{\partial D_1} = 2 \frac{\epsilon}{\sqrt{\beta c}} \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^4 \xi' (\operatorname{sh}^3 \xi' \operatorname{ch} \xi' + 3\xi' - \operatorname{cth} \xi'), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} f_{1,\xi} &= -\frac{\partial u_0 / \partial D_2}{\partial u_0 / \partial D_1} f_{2,\xi} = -2\epsilon u_{0,\xi} \frac{\partial u_0}{\partial D_2} = 2\epsilon (u_{0,\xi})^2 \\ &= 18\beta^{-1} \epsilon c^3 \operatorname{sech}^4 \xi' \operatorname{th}^2 \xi'. \end{aligned} \quad (25)$$

由(24)和(25)式直接积分得

$$\begin{aligned}
 f_1(\xi) &= \int f_{1,\xi} d\xi = 2\sqrt{\frac{\beta}{c}} \int f_{1,\xi} d\xi' = 36\epsilon c^2 \sqrt{c\beta^{-1}} \int \operatorname{sech}^4 \xi' \operatorname{th}^2 \xi' d\xi' \\
 &= \frac{36}{5} \epsilon c^2 \sqrt{c\beta^{-1}} \left[\frac{1}{3} (\operatorname{sech}^2 \xi' + 2) - \operatorname{sech}^4 \xi' \right] \operatorname{th} \xi', \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2(\xi) &= 4\epsilon c^{-1} \int (\operatorname{th}^4 \xi' + 3\xi' \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^4 \xi' - \operatorname{sech}^4 \xi') d\xi' \\
 &= 4 \frac{\epsilon}{c} \left[\xi' \left(1 - \frac{1}{4} \operatorname{sech}^4 \xi' \right) - \operatorname{th} \xi' \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sech}^2 \xi' \right) \right]. \quad (27)
 \end{aligned}$$

上述计算过程是冗长的, 计算中用到如下公式:

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{th}^{2n} \xi' d\xi' &= \int \operatorname{th}^{2n-2} \xi' d\xi' - \int \operatorname{th}^{2n-2} \xi' d(\operatorname{th} \xi'), \\
 \int \xi' \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^{2n} \xi' d\xi' &= \xi' \int \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^{2n} \xi' d\xi' - \int \left(\int \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^{2n} \xi' d\xi' \right) d\xi', \quad (28) \\
 \int \operatorname{sech}^{2n} \xi' d\xi' &= \frac{1}{2n-1} \left[\operatorname{sech}^{2n-2} \xi' \operatorname{th} \xi' + (2n-2) \int \operatorname{sech}^{2n-2} \xi' d\xi' \right] \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

将(21), (23), (26)和(27)式代入(13)和(14)式, 并进一步代入(9)式, 同时利用(17)式, 最后得到微扰 B-KdV 方程的孤子解

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + u_1 = u_0 + (B_1 + f_1) \frac{\partial u_0}{\partial D_1} + (B_2 + f_2) \frac{\partial u_0}{\partial D_2} \\
 &= 3c \operatorname{sech}^2 \xi' + \frac{1}{3c^2} \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^2 \xi' (c \operatorname{th} \xi' - \operatorname{sh}^3 \xi' \operatorname{ch} \xi' - 3\xi') \\
 &\quad \times \left[B_1 + \frac{36}{5} \epsilon \sqrt{\frac{c^5}{\beta}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sech}^2 \xi' - \operatorname{sech}^4 \xi' \right) \operatorname{th} \xi' \right] \\
 &\quad + 3 \sqrt{\frac{c^3}{\beta}} \operatorname{sech}^2 \xi' \operatorname{th} \xi' \left[B_2 + \frac{4\epsilon}{c} \left(\xi' - \frac{1}{4} \xi' \operatorname{sech}^4 \xi' \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \operatorname{th} \xi' + \frac{1}{4} \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^2 \xi' \right) \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

式中 B_2 为任意常数, 由于 $\operatorname{sh}^3 \xi' \operatorname{ch} \xi'$ 项在 $t \rightarrow \infty$ 时发散, 所以为保证解 u 收敛, 常数 B_1 必须取为

$$B_1 = -\frac{24}{5} \epsilon c^2 \sqrt{\frac{c}{\beta}}, \text{ 当 } c < 0; B_1 = \frac{24}{5} \epsilon c^2 \sqrt{\frac{c}{\beta}}, \text{ 当 } c > 0. \quad (30)$$

这一条件保证了一级解 u_1 为孤子型通解, 使得系统处于稳定平衡态.

4 一级孤子型通解的物理性质及讨论

现在简单地讨论孤子型通解 u_1 的某些有趣的物理性质. 首先, 我们注意到, 由于因子 $\sqrt{c/\beta}$ 的出现, 正色散 $\beta > 0$ 相应于 $c > 0$ 的右行亮孤子, 负色散 $\beta < 0$ 相应于 $c < 0$ 的左行暗孤子. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, (29) 式包含的项

$$\frac{1}{3c^2} \operatorname{th} \xi' \operatorname{sech}^2 \xi' (-\operatorname{sh}^3 \xi' \operatorname{ch} \xi') (B_1 + \frac{24}{5} \epsilon c^2 \sqrt{c/\beta} \operatorname{th} \xi')$$

粗看似乎发散,但由(30)式给定的常数 B_1 使得该项为

$$\begin{aligned} & \frac{8}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta}\operatorname{th}^2\xi'\operatorname{sh}^2\xi'(1-\operatorname{th}\xi'), \text{ 当 } c < 0; \\ & \frac{8}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta}\operatorname{th}^2\xi'\operatorname{sh}^2\xi'(1+\operatorname{th}\xi'), \text{ 当 } c > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

考虑到当 $t \rightarrow \infty$ 时, $c < 0$ 情形, $\xi' \rightarrow +\infty$, $c > 0$ 情形, $\xi' \rightarrow -\infty$, 而

$$\lim_{\xi' \rightarrow \infty} \operatorname{sh}^2\xi'(1-\operatorname{th}\xi') = \lim_{\xi' \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}^2\xi'(1+\operatorname{th}\xi') = \frac{1}{2},$$

故(31)式在 $t \rightarrow \infty$ 收敛于 $\frac{4}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta}$, 从而保证了(29)式在半无限的空间 $x \in [-x_0, \infty)$ (当 $c < 0$) 或 $x \in (-\infty, x_0]$ (当 $c > 0$) 为孤子解. 这里 $x_0 > 0$ 为有限值. $\xi' = 0$ 为 KdV 孤子的中心位置, 在该点有

$$\operatorname{sh}\xi'|_{\xi'=0} = \operatorname{th}\xi'|_{\xi'=0} = 0, \operatorname{sech}\xi'|_{\xi'=0} = 1.$$

将该式代入(29)式, 联立(30)式易得孤子在 $\xi' = 0$ 点的值为最大峰(腹)值

$$|u(0)| = u_{\max} = \left| 3c + \frac{B_1}{3c^2} \right| = \begin{cases} \left| 3c - \frac{8}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta} \right|, & c < 0, \\ \left| 3c + \frac{8}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta} \right|, & c > 0. \end{cases} \quad (32)$$

由于(4)式中耗散项 $\epsilon u_{\xi} = -\epsilon c^{-1}u_t$, 故作为阻尼系数的 ϵ 应小于零, 因而(32)式包含下列两种情况:

- 亮孤子情形^[17], $c > 0$, $\beta > 0$, 耗散使得最大峰值变小, 孤子变“矮”.
- 暗孤子情形, $c < 0$, $\beta < 0$, 耗散使得最大腹值变小, 波腹升高.

考虑到(32)式中第一项为零级解 u_0 的贡献, 第二项为微扰项 u_1 的贡献, 由 $|u_0| \gg |u_1|$, 应有

$$3|c| \gg 8/5|\epsilon|\sqrt{c/\beta}, |c| \gg (8/15)^2\epsilon^2/|\beta|, \quad (33)$$

即孤子速度的绝对值不小于 ϵ^2 量级.

另一方面, 将(30)式代入(29)式, 并注意到 $\epsilon < 0$, 可见(29)式中第二项为

$$\frac{B_1}{3c^2}\operatorname{sech}^2\xi' < 0, \text{ 当 } c > 0; \frac{B_1}{3c^2}\operatorname{sech}^2\xi' > 0, \text{ 当 } c < 0,$$

以后各项均因含因子 $\operatorname{th}\xi'$ 而在孤子中心 $\xi' = 0$ 附近趋于零, 所以第二项使得第一项无论亮孤子还是暗孤子均变窄. 由(31)式表示的项则使得 u 在 ξ' 趋于 $\pm\infty$ 时为 $\frac{4}{5}\epsilon\sqrt{c/\beta}$. 取定常数 B_2 和 D_2 , 由(29)式对 ξ' 取导数并令其等于零, 可得一系列有限个极值点, 它们分别对应于一个波峰值或波腹值. 可见(29)式描述由有限个亮孤子和暗孤子组成的孤子阵列, 它看来像一个 KdV 孤子 u_0 带有振幅为 ϵ 量级的振动的尾巴.

选取不同的常数 B_2 和 D_2 , (29)式将给出不同的孤子特解. 例如取 $B_2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $a_i = \text{const}$, n 为任意整数, 则与每个 a_i^2 相乘的项为

$$F(\xi') = 3a_i^2\sqrt{c^3/\beta}\operatorname{sech}^2\xi'\operatorname{th}\xi' = 3a_i^2\sqrt{c^3/\beta}(\operatorname{th}\xi' - \operatorname{th}^3\xi').$$

它表示正扭结 $\text{th}\xi'$ 与反扭结 $(-\text{th}^3\xi')$ 的线性叠加. 由 $dF/d\xi' = 3a_i^2\sqrt{c^3/\beta}\text{sech}^2\xi'(1 - 3\text{th}^2\xi') = 0$, 得极值点 $\xi'_0 = \pm \text{Arth}\sqrt{1/3}$, 可见 $F(\xi')$ 描述由一个处于 $\xi' = |\xi'_0|$ 的亮孤子和一个处于 $\xi' = -|\xi'_0|$ 的暗孤子组成的孤子对. 通解 u_1 包含 n 个这类孤子对的叠加.

由(18)式知常数 D_2 相应于 $t = 0$ 时刻孤子的中心位置 $\xi' = 0, x = D_2$. 在(29)式中令 $D_2 = D_2'$ 而得到另一个孤子解, 该孤子与孤子(29)式之间的距离为 $R = |D_2 - D_2'|$. 研究相距 R 的两个 B-KdV 孤子之间的相互作用将是有趣的.

我们已经建立起求解微扰 B-KdV 方程的直接微扰方法, 并用以求得该方程的一级孤子型通解 u_1 . 孤子型通解包含许多右行亮孤子和左行暗孤子, 微扰使得零级亮孤子变矮变窄, 暗孤子变浅变窄. 孤子被定义在半无限空间, 其速度大小的下限被限制为 ϵ^2 量级.

由于孤子型通解 u_1 的形式相当复杂, 对它的几何形状和能量传播等性质还需研究. 特别是结合湍流和激波实验, 对它在收敛区域 $x \in [-x_0, \infty)$ 外的失稳, 需做进一步研究. 将 u 逐级展开代入(4)式, 用上述方法可逐级求解, 使解精确到任意级.

- [1] D.J. Korteweg and G. DeVries, *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422.
- [2] 管克英、高歌, 中国科学(A辑), (1)(1987), 64.
- [3] Y. Pomeau, A. Ramani and B. Grammaticos, *Physica*, **D31**(1988), 127.
- [4] 高歌, 中国科学(A辑), (5)(1985), 457.
- [5] 熊树林, 科学通报, **34**(1989), 26.
- [6] 忻孝康、赵越, 中国科学(A辑), (2)(1992), 161.
- [7] J.P. Boyd, *Physica*, **D48** (1991), 129.
- [8] K.A. Gorshkov and L.A. Ostrovsky, *Physica*, **D1 & 2**(1981), 424.
- [9] V.I. Karpman and V.V. Solov'ev, *Physica*, **D1 & 2**(1981), 142.
- [10] 刘式适、刘式达, 科学通报, **37**(1992), 191.
- [11] 高歌, 中国科学(A辑), (1)(1993), 64.
- [12] 谢成康、赵海燕, 现代数学与力学, **5**(1993), 628.
- [13] R. Grimshaw and B.A. Malomed, *J. Phys. A*, **26** (1993), 4087.
- [14] 吴迪光, 变分法(北京: 高等教育出版社, 1987).
- [15] Z.Y. Chen, Z.G. Li and N.N. Huang, *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **3**(1994), 1.
- [16] W.H. Hai, *Phys. Rev.*, **A46** (1992), 6757; *J. Phys. A*, **25**(1992), 1515; *J. Phys. A*, **26**(1993), 969; *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **3**(1994), 18.
- [17] 刘颂豪、郭旗、廖常俊、金怀诚, 科学通报, **37**(1992), 193.

SOLITON SOLUTIONS OF PERTURBED BURGERS-KdV EQUATION

HAI WEN-HUA

(Department of Physics, Hunan Educational Institute, Changsha 410012)

XIAO YI

(Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

(Received 11 April 1995)

ABSTRACT

In this paper, we have studied a perturbed Burgers-Korteweg-de Vries equation $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \epsilon u_{xx}$, $|\epsilon| \ll 1$. Under first order approximation and travelling wave case, the direct perturbation method to find the general solution is established. By means of the single soliton solution of the zeroth order equation we have obtained the general soliton solution of the first order equation. It contains many different soliton solutions and any one of them describes an array of solitons in semi-infinite space. The analyses show that the dissipation ϵ makes the bright soliton the lower and narrower and the dark soliton the shallower and narrower than unperturbed KdV soliton.

PACC: 4735; 4720; 0340