

非均匀载流柱形等离子体中的磁流体力学波^{*}

杨维纭 胡希伟

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(1994年12月13日收到)

对非均匀载流柱形等离子体数值求解了计及有限离子频率效应和有限压强效应的磁流体力学方程组,证实了在有天线激励情况下,理想等离子体的阿耳文波共振层并不奇异,且阿耳文波可以越过共振层并得到等离子体的强烈响应.还研究了天线和等离子体的耦合情况,给出了 $m=1$ 时的本征波谱曲线及典型波在等离子体中的传播,结果表明对各种频段的外界输入的磁流体波,都存在着到达共振层前被阻尼而在通过共振层后被放大的共同特征.

PACC: 5235; 5240D

1 引 言

用磁流体理论处理理想等离子体中阿耳文波传播时发现了波在一些特定区域(共振层)的非平方可积性^[1,2]. Appert 等^[3]在研究柱形冷等离子体时同样发现共振层奇异性的存在,阿耳文波从柱外进入等离子体后,最终能量将积聚在共振层而不再向柱中心传播. Hasegawa 等^[4]利用动力论方程证明了有限拉莫尔半径效应可以消除阿耳文共振层的奇异性,使阿耳文波越过共振层向柱中心传播.本文作者在文献[5]中对柱形等离子体同时考虑了有限压强效应和有限离子回旋频率修正后,仅用磁流体力学的方法也导出了理想磁流体中阿耳文共振层非奇异,并计算了均匀无载流柱形等离子体中的磁流体力学全波谱.

鉴于均匀无载流柱形等离子体仅是理想情况,实验上并不能实现(显然,静力平衡条件就不满足),而且阿耳文共振层仅能存在于非均匀等离子体中,即磁流体理论能否真正导出有限拉莫尔半径效应必须对非均匀等离子体进行验证.本文数值分析了非均匀载流且有天线激励柱形等离子体中的磁流体力学波,验证了阿耳文波共振层不奇异的结论,发现了波穿越共振层向柱中心传播时等离子体强烈的响应.该结果已被托卡马克装置 KT-5 上的实验证实^[6].

2 基本方程

对于有限压强 $p \neq 0$, $j \neq 0$ 柱形等离子体,采用下列螺旋坐标系:坐标单位矢量为

^{*}国家自然科学基金资助的课题.

$e_r, e_\perp = e_\parallel \times e_r, e_\parallel = B_0/B_0$, 其中 $B_0 = B_{0\theta}e_\theta + B_{0z}e_z$ (e_r, e_θ, e_z 为柱坐标单位矢量), 并假定 B_{0z} 为常数, $|B_{0\theta}/B_{0z}| \ll 1$. 把各物理量 Q 写作 $Q = Q_0 + Q_1$, 其中平衡量 $Q_0 = Q_0(r)$ 仅为半径 r 的函数, 扰动量 $Q_1 = Q_{1r}e_r + Q_{1\perp}e_\perp + Q_{1\parallel}e_\parallel$, 且 $|Q_1| \ll |Q_0|$, 设扰动量形式为 $\exp[i(kz + m\theta - \omega t)]$, k, m 分别为柱坐标中的柱向和角向模数.

当压强扰动和密度扰动都不能忽略时, 由线性广义磁流体方程组可以导出下列简化形式^[5]:

$$\frac{\partial}{\partial r} X = HX, \quad (1)$$

$$\text{其中 } X = (\tilde{E}_\perp, B_\parallel, p_1, v_r)^T, \quad (2)$$

$$\tilde{E}_\perp = E_\perp + \text{grad}\left(\frac{p_1}{2\rho_0 w_{ci}}\right). \quad (3)$$

(1) 式为四元一阶微分方程组, 其未知函数为 $E_\perp$ (扰动电场 E_1 在 $e_\perp$ 方向的分量), $B_\parallel$ (扰动磁场 B_1 在 $e_\parallel$ 方向的分量), p_1 (扰动压强) 和 v_r (扰动速度在 e_r 方向的分量).

2.1 用于数值计算的方程

设天线激励在边界处 $r = r_s$ 产生单模电场:

$$E_\perp = E_{\perp 0} \exp[i(kz - m\theta + \omega t)], \quad (4)$$

在方程(1)中令

$$Q = [Q_R(r) + iQ_i(r)] \exp[i(kz + m\theta - \omega t)], \quad (5)$$

其中 Q 表示任一未知函数: $\tilde{E}_\perp, B_\parallel, p_1, v_r, i = \sqrt{-1}, Q_r, Q_i$ 都是实数.

将(5)式代入(1)式, 假定 k, m, ω 为实数, 可得

$$\frac{d}{dr} Y = GY, \quad \frac{d}{dr} Z = GZ, \quad (6)$$

$$Y = (r\tilde{E}_{\perp i}, B_{\parallel R}, p_{1R}, r\rho_0 v_{ri})^T,$$

$$Z = (r\tilde{E}_{\perp R}, B_{\parallel i}, p_{1i}, r\rho_0 v_{rR})^T,$$

$$G = \{g_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$g_{11} = k_\perp (w w_{ci} \rho_0 + 2k_\parallel B_{0\theta}/r)/k_\parallel^2, \quad g_{12} = w r (k_\parallel^2 + k_\perp^2)/k_\parallel^2, \quad g_{13} = 0,$$

$$g_{14} = -k_\perp w w_{ci}/k_\parallel^2, \quad g_{21} = \{k_\parallel^2 + \rho_0 w_{ci}^2 [k_\parallel^2 - w^2 \rho_0 - 4B_{0\theta} k_\parallel w / (r w_{ci})] / k_\parallel^2\} / r w,$$

$$g_{22} = -g_{11}, \quad g_{23} = -k_\perp w_{ci}/w, \quad g_{24} = w_{ci}^2 [k_\parallel^2 - w^2 \rho_0 - 2B_{0\theta} k_\parallel w / (r w_{ci})] / (r w k_\parallel^2),$$

$$g_{31} = g_{24}, \quad g_{32} = -\rho_0 g_{14}, \quad g_{33} = -g_{23},$$

$$g_{34} = w_{ci}^2 (k_\parallel^2 - w^2 \rho_0 - k_\parallel^2 w^2 / w_{ci}^2) / (r w k_\parallel^2), \quad g_{41} = \rho_0 g_{33}, \quad g_{42} = 0,$$

$$g_{43} = r \{v_A^2 w^2 / [v_s^2 T_{e0}(r)] - k_\perp^2 - k_\parallel^2\}, \quad g_{44} = g_{23}.$$

注意到 Y, Z 满足完全一样的方程, 故只需数值解其中之一即可. 下面仅讨论方程(6)的关于 Y 的前一个方程.

假定在等离子体中 ($1 \leq r < 1$),

$$B_{0\theta}(r) = \delta [1 - (1 - r^2)^5] / r, \quad (7)$$

$\rho_0 = 1 - 0.99r^2$, $r = r_s$ 处为器壁, 在等离子体与器壁间 ($1 < r < r_s$) 为真空, $\rho_0(r) = 0$.

此即 Appert 在冷等离子体理论中所考虑过的情况^[3], 此时在等离子体区有 $j_0 \propto (1 - r^2)^4$. 和他们不同的是我们不能在假设 ρ_0 是非均匀的, 同时又假定 $B_{0\theta} = 0$ (即 $j_0 = 0$). 这是因为我们的方程中有电子温度 $T_{e0}(r)$, 而这必须由平衡量的方程组确定, 有

$$T_{e0}(r) = -\frac{v_A^2(0)}{v_s^2(0)} \frac{B_{0\theta}}{\rho_0} \left(B'_{0\theta} + \frac{B_{0\theta}}{r} \right), \quad (8)$$

其中 $\rho'_0 = d\rho_0/dr$, $B'_{0\theta} = dB_{0\theta}/dr$. 因 $T_{e0}(r)$ 为无量纲量, 有 $T_{e0}(0) = 1$. 由 (7) 式可得

$$\delta = \sqrt{0.99} \frac{v_s(0)}{5v_A(0)}. \quad (9)$$

2.2 边界条件选取

I. $r = \epsilon \rightarrow 0$ 时

由于方程中有 $1/r$ 因子, 数值计算 r 只能从 ϵ 开始. 令

$$y_i = \hat{y}_i \epsilon^q \quad (q \geq 0, i = 1, 2, 3, 4), \quad (10)$$

代入方程 (6) 的前一个方程可得两组解 (基矢)^[7]:

$$(a) \begin{cases} q = |m| \\ \hat{y}_1 = 0 \\ \hat{y}_2 = w_{ci} \\ \hat{y}_3 = -(w_{ci} + w \frac{|m|}{m}) \\ \hat{y}_4 = m, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} q = |m| \sqrt{1 + 100\delta^2/k^2} \\ \hat{y}_1 = mw \\ \hat{y}_2 = k_{\parallel}^2 \frac{q}{m} - 10k_{\parallel} \delta - ww_{ci} \\ \hat{y}_3 = ww_{ci} \\ \hat{y}_4 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

II. $r = 1$ 时

$$y_3(1) = p_{1R}(1) = 0. \quad (12)$$

III. $r = r_s$ 时

$$y_1(r_s) = r_s E_{\perp i}(r_s) = r_s E_{\perp 0i}. \quad (13)$$

条件 (13) 式即为天线激励 (参见方程 (4)).

如求本征模解时假定 $r = r_s$ 器壁处为超导, 有

$$y_1(r_s) = 0. \quad (14)$$

3 数值解的方法与结果

数值解方程 (6) 的前一组方程, 边界条件为 (11)–(14) 式, 这是一组三个边界的强刚性方程, 用建立在自动变步长的 Gear 方法基础上的试射法 (shooting method) 求数值解, 得如下结果:

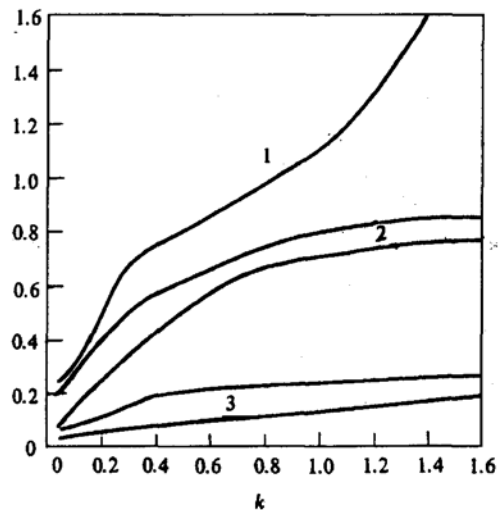


图1 超导边界无天线激励时的本征谱 $x = w/w_{ci}$, $m = 1$, $\rho_0(r) = 1 - 0.99r^2$, $j_0 \propto (1 - r^2)^4$, 1 为快磁声波区, 2 为离散阿耳文波区, 3 为离散慢磁声波区

3.1 图 1 示出超导边界无天线激励时的本征谱. 由于磁流体方程没有像朗道阻尼等动力学效应, 故快、慢磁声波, 阿耳文波都存在, 且由于边界条件的限制, 它们都为离散谱. 我们同时用有限元方法求该问题的数值解, 得到了与此类似的结果^[8].

3.2 图 2 示出 $k=0.05$, $\omega/\omega_{ci}=0.082$ 时, 有天线激励, 慢磁声波与阿耳文波交界处的情况. 利用下式:

$$\rho_0(r) = \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right), \quad (15)$$

可算出阿耳文共振层位于 $r=0.957$. 可清楚地看出波越过共振层向柱中心传播时形成的驻波.

3.3 图 3 示出 $k=0.20$, $\omega/\omega_{ci}=0.216$ 时, 有天线激励, 处于离散阿耳文波区的情况. 由 (15) 式可算出共振层位于 $r=0.896$. 天线的激励在 $r>0.896$ 处会出现阻尼, 但波一旦达到共振层, 则会穿越共振层导致等离子体出现极强的响应. 该情况已被实验证实^[6].

3.4 图 4 示出有天线激励, 处于快磁声波附近等离子体对激励的响应. 由 (15) 式算出的共振层位于 $r=0.997$. 可见方程 (6) 所表现出的极强刚性.

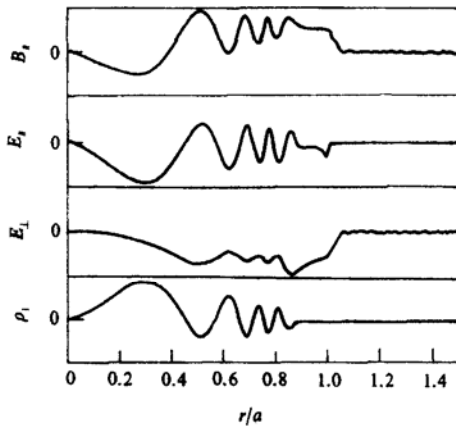


图 2 有天线激励时的慢磁声波在等离子体中的传播 $m=1$, $\omega/\omega_{ci}=0.082$, $k=0.05$

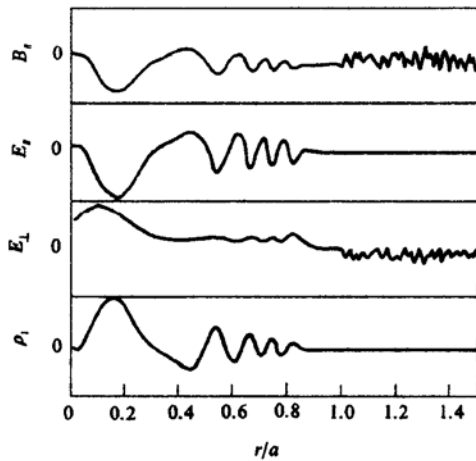


图 3 有天线激励时的离散阿耳文波在等离子体中的传播 $m=1$, $\omega/\omega_{ci}=0.216$, $k=0.20$

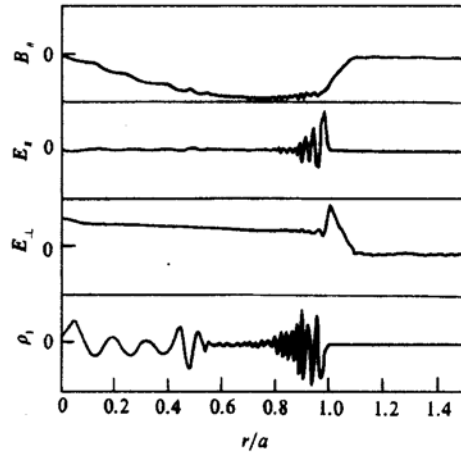


图 4 有天线激励时的快磁声波在等离子体中的传播 $m=1$, $\omega/\omega_{ci}=0.082$, $k=0.05$

4 结 论

本文继续了文献[5]中所做的工作,对于磁流体力学理论对理想等离子体可以导出有限拉莫尔半径效应的结论,在符合实验条件的情况下,利用数值计算作了验证.由于篇幅所限,本文只给出一些最重要的计算结果图示.对计算结果总结如下:

1. 当射频波从柱外进入等离子体,在到达阿耳文共振层前将被阻尼,越靠近共振层阻尼越大.而波一旦到达共振层,则等离子体表现出很强的自组织能力,波不但能继续向柱中心传播,而且振幅被放大,即只要阿耳文共振层离边界足够近,功率很小的射频波都可以在等离子体中激发出强烈的该种模式的波.

2. 快磁声波在 $\omega \leq \omega_{ci}$ 时数值计算很容易发现在等离子体中传播,它同样需要阿耳文共振层靠近等离子体边界,当 $\omega \geq \omega_{ci}$ 时也表现出较大的阻尼.

3. 慢磁声波在等离子体中传播时阻尼极大,除非其 ω, k 的值在频谱图(图1)上很靠近离散阿耳文波区,否则数值解几乎找不到.

上述磁流体波从真空进入等离子体后,在到达共振层前的阻尼效应和在越过共振层后的放大效应在动力论中只对剪切阿耳文波用离子的朗道阻尼和模转化作过解释^[9].本工作在磁流体理论的框架下,对所有三种类型的波,都给出了简单、一致的描述,使我们对外加磁流体波在等离子体中的耦合和传播行为有了更清楚的认识,这为用外加磁流体波加热或抑制托卡马克磁流体活动的进一步研究打下了基础.

- [1] J. Tataronis and W. Grossmann, *Z. Physik*, **261**(1973), 203.
- [2] C. E. Kieras, Ph.D. thesis, Wisconsin University(1982).
- [3] K. Appert, J. Vaclavik and L. Villard, *Phys. Fluids*, **27**(1984), 432.
- [4] A. Hasegawa *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 370.
- [5] 杨维续、胡希伟, *物理学报*, **41**(1992), 910.
- [6] 韩申生, 博士论文, 中国科学技术大学(1990).
- [7] 杨维续, 博士论文, 中国科学技术大学(1990).
- [8] 杨 峰, 硕士论文, 中国科学技术大学(1994).
- [9] D. W. Rose, G. L. Chen and S. M. Mahajan, *Phys. Fluids*, **25**(1982), 652.

MAGNETOHYDRODYNAMICS WAVES IN A NONHOMEGENEOUS CURRENT-CARRYING CYLINDRICAL PLASMA

YANG WEI-HONG HU XI-WEI

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(Received 13 December 1994)

ABSTRACT

Considering the effects of both the finite ion-cyclotron frequency and the finite pressure, We solved numerically the magnetohydrodynamics (MHD) equations describing a nonhomogeneous current-carrying cylindrical plasma. It is found that the resonant layer of the shear Alfvén wave in an ideal plasma impelled by rf wave of antenna is not a singular layer and that Alfvén wave can go across the resonant layer. The couple of an antenna with plasma is researched carefully and the results are given by some figures.

PACC: 5235; 5240D