

热等离子体中的尾波加速

李 毅¹⁾

(中国科学技术大学地球和空间科学系, 合肥 230026)

(1995 年 1 月 3 日收到)

通过计算在等离子体温度不太高时尾波中本底等离子体的分布函数, 推导出热等离子体中的尾波方程. 这个方程对进一步研究如何最大限度地提高热等离子体中的尾波加速效率提供了出发点. 讨论了温度对等离子体尾波加速的影响.

PACC: 5240M; 5235; 5260

1 引 言

等离子体尾波加速器是近几年研究的课题之一. 它利用穿行于等离子体中的一束高速运动的相对论性带电粒子作为驱动源, 使平静的等离子体产生电荷密度扰动, 在它的身后及它本身所处之处激发出纵向电场波, 即为尾波. 同时将另外少量高速带电粒子作为被加速粒子置于尾波中最强的正向电场处, 并使它们能与尾波同步前进, 利用尾波场进行加速. 由于相对论效应, 被加速粒子尽管能量增加, 但速度变化不大, 它们与尾波及驱动粒子束三者都以近乎相同的速度(约等于光速)同步前进, 因而会一直处于波的加速电场中, 不断得到能量, 直至驱动粒子的速度减到明显小于光速为止^[1-9].

由于常规加速器中加速电场达到一定的强度时会发生击穿, 无法进一步提高, 为了提高粒子的能量, 只有扩大规模. 而等离子体尾波的电场很容易超过 GV/m 的量级^[4], 利用它可能制成规模小、效率高的新型加速器, 因而吸引了人们的注意. 很多的研究都是处理在冷等离子体中的情况, 因为在冷等离子体中情况比较简单, 较容易计算等离子体中尾波加速的行为. 但是等离子体实际上具有一定的温度, 有必要进一步研究在热等离子体中, 尾波加速的行为会怎样改变. 这方面 Rosenzweig 和 Amatuni 等都做了一些较好的工作^[1-3].

Rosenzweig 在文献[1]中, 使用 Katsouleas 和 Mori 模型(“水袋模型”)的方法及推导, 并修正了边界条件, 得到方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\chi + \frac{\mu}{\chi} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\chi^2} - 1 \right) + \alpha, \quad (1)$$

式中 $\chi = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$, $\mu = \frac{3kT_e}{m_e c^2}$, $\beta = \frac{v}{c}$, α 是驱动粒子束密度除以本底等离子体的平均密

¹⁾ 第三世界科学院中国科学技术大学地球科学和天文学高级研究中心.

度, $\tau = \frac{\omega_p(z - v_b t)}{c}$ 是波的相位, $v_b \approx c$ 是驱动粒子束的速度. 当等离子体温度 T 趋向于零时, 方程回归冷等离子体中的尾波方程^[2]. Amatuni 等的文献^[3]专门处理热等离子体对尾波产生的影响. 他们应用相对论流体力学方程, 将热效应作为热压力及由于热运动引起的本底离子质量增加, 推导出较为复杂的热等离子体尾波电场方程.

虽然以上两文的结果都对热等离子体中的尾波进行了描述, 但前者的模型和处理过于简单, 得到的定性结论仅适合温度很高的情况; 而后的方程及推导都很复杂, 以至难以用它进行进一步研究. 另外, 这两文都基本上基于磁流体力学方法, 也许没有用动力学的粒子速度分布函数求解的结果好.

2 温度较低时的等离子体尾波加速理论

在一般情况下, 并没有使用高温等离子体作尾波加速器工作介质的必要, 因此, 本文的出发点是对于等离子体尾波中温度是个小量时的热效应问题, 用动力学的粒子速度分布函数进行分析、推导及求解. 在此我们着重研究电子为高速粒子的情况. 离子由于质量较大, 来不及响应尾波的振荡, 因而作为均匀的背景.

设驱动粒子束之前未扰动等离子体粒子热运动分布为麦克斯韦分布:

$$f(\mathbf{u}, \tau_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2)$$

式中 $\sigma^2 = \frac{kT}{m_e c^2}$ 与(1)式中的 μ 相差 3 倍, 而 $\mathbf{u} = \beta\gamma$ 是无量纲的相对论动量. 采用与以前的处理中通常的一维假定^[2], 即尾波的波形、密度等物理量仅随 τ 变化, 或者说, 在以 v_b 运动的参考系中, 各物理量不随时间改变, 因而粒子的哈密顿量也是不含时的, 是守恒量. 通过洛伦兹变换, 用静止参考系的值替换运动参考系的哈密顿量中粒子的动能和电势能, 可得 $\varphi + \gamma - \beta_b u_x$ 是个常量, 这里 $\varphi = \frac{e\Phi}{m_e c^2}$ 是无量纲电势能, β_b 是驱动粒子束的运动速度除以光速, 因此有关系式:

$$\varphi + \gamma - \beta_b u_x = \gamma_0 - \beta_b u_{x0}, \quad (3)$$

式中带下标 0 的量代表粒子在未扰动等离子体中的量. 另外, 在一维情况下横向动量守恒:

$$u_y = u_{y0}, \quad u_z = u_{z0}. \quad (4)$$

由此, 我们能从粒子在未扰动等离子体中的热运动量 $\mathbf{u}_0$ 确定它处于尾波中时的动量 $\mathbf{u}$. 实际上从方程(3)中可解出两个 $\mathbf{u}$ 值, 第二个 $\mathbf{u}$ 值对应粒子被尾波捕获的情况, 其值在 β_b 趋于 1 时趋向无穷大. 粒子被捕获的条件是^[1]

$$\gamma_0 - \beta_b u_{x0} < \varphi_{\max} + \gamma_b^{-1},$$

式中 $\varphi_{\max}$ 是尾波场电势能的峰值. 由于我们考虑的等离子体温度不高, 几乎没有粒子热运动速度高到能满足这个条件, 因此可以认为 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{u}_0$ 有一一对应的关系.

设想将所有未扰动等离子体中处于相空间 (u_{x0}, u_{y0}, u_{z0}) 到 $(u_{x0} + du_{x0}, u_{y0} + du_{y0},$

$u_{x0} + du_{x0}$) 体积元中的那些粒子打上标记, 当它们进入尾波中时, 所处的相空间体积元变换为 (u_x, u_y, u_z) 到 $(u_x + du_x, u_y + du_y, u_z + du_z)$, u 与 u_0 之间满足以上关系. 再在以 v_b 运动的参考系中置两个参考点 A, B, 分别处在驱动束之前和尾波中, 在单位时间内, A 点扫过带标记的粒子数量为

$$N_A = (\beta_b - \beta_{x0}) f(u, \tau) du_{x0} du_{y0} du_{z0}. \quad (5)$$

同样, 在单位时间内 B 点扫过带标记的粒子数量为

$$N_B = (\beta_b - \beta_x) f(u, \tau) du_x du_y du_z. \quad (6)$$

由在以 v_b 速度运动的参考系中物理量不随时间变化的假定, A, B 点之间带标记粒子数量不变, 有

$$N_A = N_B. \quad (7)$$

由此可以得到在尾波中粒子的分布函数

$$\begin{aligned} f(u, \tau) du_x du_y du_z &= \frac{\beta_b - \beta_{x0}}{\beta_b - \beta_x} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\times \exp\left(-\frac{u_{x0}^2 + u_{y0}^2 + u_{z0}^2}{2\sigma^2}\right) du_{x0} du_{y0} du_{z0}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 β_x 与 u_0 的关系可由(3)式解出. 这个等式也可以通过 u 与 u_0 的关系, 将 u 视为 u_0 的函数, 仅用纯数学方法经雅可比变换求得.

这样, 通过计算在 B 点的等离子体密度

$$\rho = \int f(u, \tau) du_x du_y du_z, \quad (9)$$

可以代入求解泊松方程

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\beta_b^2(\rho - 1 + \alpha). \quad (10)$$

原则上这样处理是可以的, 但是运算过于繁琐. 由于热运动动量 u_0 是个小量, 可作近似处理. 令

$$g(u_0) = \frac{\beta_b - \beta_{x0}}{\beta_b - \beta_x}, \quad (11)$$

将函数 $g(u_0)$ 在 $u_0 = 0$ 处作泰勒级数展开:

$$\begin{aligned} g(u_0) &= g(0) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{x0}}\right)_{u_0=0} u_{x0} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{y0}}\right)_{u_0=0} u_{y0} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_{z0}}\right)_{u_0=0} u_{z0} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{x0}^2}\right)_{u_0=0} u_{x0}^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{x0} \partial u_{y0}}\right)_{u_0=0} u_{x0} u_{y0} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{x0} \partial u_{z0}}\right)_{u_0=0} u_{x0} u_{z0} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{y0}^2}\right)_{u_0=0} u_{y0}^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{y0} \partial u_{z0}}\right)_{u_0=0} u_{y0} u_{z0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_{z0}^2}\right)_{u_0=0} u_{z0}^2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

我们感兴趣的只是级数中的二次平方项, 因为所有的一次项和二次的交叉项及三次项在作积分

$$\rho = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(u_0) (2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{u_0 \cdot u_0}{2\sigma^2}\right] du_{x0} du_{y0} du_{z0} \quad (13)$$

时都为零,而常数项 $g(0)$ 的积分只是它本身,即

$$\begin{aligned}\rho &= g(0) + \iiint_{-\infty}^{+\infty} (g_{xx}u_{x0}^2 + g_{yy}u_{y0}^2 + g_{zz}u_{z0}^2)(2\pi\sigma^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0}{2\sigma^2}\right] du_{x0} du_{y0} du_{z0} + O(\sigma^4) \\ &= g(0) + \sigma^2(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) + O(\sigma^4),\end{aligned}\quad (14)$$

式中

$$g_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u_{x0}^2} \Big|_{u_0=0}, \quad g_{yy} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u_{y0}^2} \Big|_{u_0=0}, \quad g_{zz} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial u_{z0}^2} \Big|_{u_0=0},$$

并忽略了 σ^4 以上的高阶小量.

由以上几个等式可推导出:

$$u_x = \gamma_b^2 [\beta_b(\gamma_0 - \beta_b u_{x0} - \varphi) - \sqrt{(\gamma_0 - \beta_b u_{x0} - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)(1 + u_{\perp 0}^2)}], \quad (15)$$

$$\gamma = \gamma_b^2 [(\gamma_0 - \beta_b u_{x0} - \varphi) - \beta_b \sqrt{(\gamma_0 - \beta_b u_{x0} - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)(1 + u_{\perp 0}^2)}], \quad (16)$$

式中 $\mathbf{u}_{\perp 0} = u_{y0}\mathbf{e}_y + u_{z0}\mathbf{e}_z$, 代入下式:

$$g(\mathbf{u}_0) = \frac{\beta_b - \beta_{x0}}{\beta_b - \beta_x} = \frac{\beta_b - \beta_{x0}}{\beta_b \gamma - u_x} \cdot \gamma = \frac{(\beta_b - \beta_{x0})\gamma}{\sqrt{(\gamma_0 - \beta_b u_{x0} - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)(1 + u_{\perp 0}^2)}}, \quad (17)$$

忽略三次以上的高阶小量,对 $g(\mathbf{u}_0)$ 的表达式进行展开,或者直接作微分运算,可计算出

$$g_{xx} = -3\beta_b[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{3}{2}} + 3\beta_b^3(1 - \varphi)[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{5}{2}}, \quad (18)$$

$$g_{yy} = g_{zz} = -\frac{1}{2}\beta_b\varphi[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{3}{2}}, \quad (19)$$

因此

$$\begin{aligned}\rho &= g(0) + \sigma^2(g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}) \\ &= g(0) + \sigma^2\{-\beta_b(3 + \varphi)[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad + 3\beta_b^3(1 - \varphi)[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{5}{2}}\}.\end{aligned}\quad (20)$$

将此式代入泊松方程,再经过乘以 $d\varphi$ 积分后,即可得到在等离子体温度不为零时的尾波场方程:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\epsilon^2 &= \int \alpha d\varphi - \gamma - \sigma^2\{4\beta_b\gamma_b^2[1 - (1 - \varphi)[(1 - \varphi)^2 \\ &\quad - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{1}{2}}] + \beta_b[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \beta_b^3[(1 - \varphi)^2 - (1 - \beta_b^2)]^{-\frac{3}{2}}\},\end{aligned}\quad (21)$$

式中 $\epsilon = -\frac{d\varphi}{\beta_b d\tau}$ 是无量纲化的电场. 积分过程中用到了由(3)和(11)式得到的关系:

$$\int (g(0) - 1) d\varphi = -\gamma. \quad (22)$$

在 γ_b 趋于 $+\infty$ 的简单情况时,上式成为

$$\rho = g(0) + \sigma^2 \varphi(\varphi + 2)(1 - \varphi)^{-4}. \quad (23)$$

为了与(1)式比较,从(3)式可得 $\chi = 1 - \varphi$, 将(21)式代入的泊松方程(10), 成为

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\chi^2} - 1 \right) + \alpha + \sigma^2 \frac{(1 - \chi)(3 - \chi)}{\chi^4}, \quad (24)$$

在 $T=0$ 时, 即成为冷等离子体中的非线性相对论尾波方程(文献[4]中的方程 19).

3 结果分析

对于长度和密度相同的驱动粒子束, 在不同温度的热等离子体中运动的情况, 我们用数值解法解以上方程, 得到 φ 随 τ 的变化关系, 再求出电场 $E = -\frac{d\varphi}{d\tau}$. 计算结果如图 1 所示, 尾波电场呈周期性的波动(图 1 中标有 n_b 的是驱动粒子束密度曲线, 温度 T 以 $m_e c^2$ 为单位). 可以看出, 当等离子体温度升高时驱动粒子束产生的尾波幅度是逐渐减小的, 这意味着温度升高使尾波加速效率降低, 同时周期也是逐渐减小的.

另外, 在冷等离子体中, 等离子体尾波的振幅大小与尾波频率之间有确切的对应关

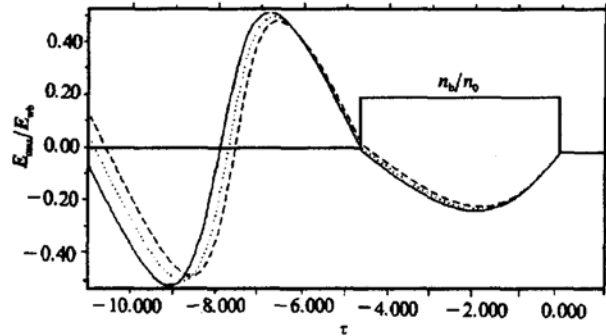


图 1 不同温度下的尾波场 ——为 $T=0.00$; ... 为 $T=0.05$; - - 为 $T=0.10$

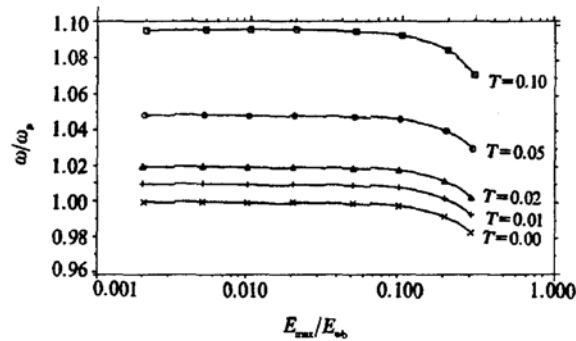


图 2 不同温度下尾波场的幅度与频率的关系

系. 在热等离子体中, 这个对应关系随温度的变化如图 2 所示. 图 2 中电场的单位

$E_{wb} = \frac{m_e \omega_p c}{e}$, 是冷等离子体非相对论波破裂的极限值^[4], 频率单位 ω_p 是等离子体振荡

频率. 图 2 中结果显示, 对电场波幅同样大小的尾波而言, 温度越高时其波长越短, 频率越高, 其数值大致上可以拟合为以下的经验公式:

$$\frac{\omega_T}{\omega_0} \approx 1 + \frac{kT}{m_e c^2},$$

式中 ω_0 是温度为零时的尾波频率. 而一般的热等离子体波中的 Bohm-Gross 色散关系为

$$\frac{\omega_T}{\omega_p} = \left(1 + \frac{3}{2} \frac{kT}{m_e c^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

也是当温度升高时频率增高, 两个公式的趋势是一致的.

4 讨 论

在对等离子体尾波加速器研究时, 最重要的是怎样才能获得最大的加速效率, 得到最大能量的被加速粒子. 为此人们进行了许多研究, 也提出了多种方案, 有使用多束粒子团逐级驱动尾波的^[7], 有计算了驱动束最优的密度分布的^[6], 有给出非线性尾波最大加速效率的^[2], 等等. 所有这些结果都要从尾波方程出发, 以上的尾波方程为进一步研究热等离子体中的情况提供了基础. 例如, 被加速粒子应放在驱动粒子束产生的尾波的最强正向电场处, 否则粒子就难以得到有效的加速. 尾波最强的正向电场在哪里要由方程计算. 如果忽略等离子体的温度, 得到的结果就有误差. 因此, 尽管等离子体温度对尾波方程的改变是个小量, 但对等离子体尾波加速器的加速效果而言却有很大的影响.

本文的结果与以前文献中已有的结果在定量上有些差别. 这是因为那些结果是在“水袋”模型或磁流体方法下得到的, 其假设的条件和处理手段不同, 但定性的结果基本上一致. 下一步我们拟由方程计算如何安排驱动粒子束与被驱动粒子束的位置及怎样取粒子束长度、密度分布能更有效地加速等, 并与冷等离子体中的情况进行比较.

另外, 如果本底等离子体的温度增高到足够大时, 本文中的公式就不再适用. 在这种情况下, 会产生本底粒子被波捕获的情况, 即本底粒子速度分布中的一部分高速粒子与波速之间的相对速度较小, 能被波的势阱捕获, 从而不断被波加速, 与波一起前进^[5]. 这种情况会导致波量的损失, 使被加速粒子束得不到应有的加速电场, 所以等离子体温度不能过高, 它对尾波加速所起的作用一般是不利的.

对等离子体尾波加速器的原理及其规律进行研究, 不但可以深入了解这一种新的获取极高能量带电粒子的途径, 另外, 它作为一种纵向静电场等离子体波加速带电粒子的方式, 还能应用于天体物理中成为高能宇宙线粒子的可能的加速机制之一.

工作中得到中国科学院等离子体物理研究所李有宜研究员的帮助与指导, 谨此致谢.

- [1] J. B. Rosenzweig, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 3634.
- [2] J. B. Rosenzweig, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 555.
- [3] A. Ts. Amatuni, S. S. Elbakian and E. V. Sekhposian, *Part. Accl.*, **36**(1992), 241.
- [4] J. Krall, G. Joyce and E. Esarey, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 6854.
- [5] P. Mora, *Phys. Fluids*, **B4**(1992), 1630.

- [6] Y. T. Yan, H. D. Chen, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 1490.
- [7] P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff and T. Katsouleas, *Phys. Rev. Lett.*, **54**(1985), 693.
- [8] U. A. Mofiz, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 6752.
- [9] 李毅, 中国科学院等离子体物理研究所博士论文(1992).

THE WAKE FIELD ACCELERATION IN THERMAL PLASMA

LI Yi

(Department of Earth and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Received 3 January 1995)

ABSTRACT

We obtain the wake field equation in thermal plasma by calculating the distribution function of the base plasma which temperature is not too high. This equation is helpful to study how to maximize the efficiency of wake field acceleration in thermal plasma. We also discuss the influence of temperature on plasma wake field acceleration.

PACC: 5240M; 5235; 5260