

轴向磁场中线性热势模型电 弧的螺旋不稳定性^{*}

刘金远 宫 野 李国炳 马腾才 张 林

(大连理工大学三束材料改性国家重点实验室, 大连 116023)

(1994年12月31日收到)

采用线性热势电导率模型和与时间有关的线性微扰理论, 给出了氢弧和其它气体中低电流弧的热势分布(温度分布)、稳定性条件以及不稳定性增长率等定量结果. 与均匀电流分布比较, 稳定性区域变大.

PACC: 5280; 5235; 5230

1 引 言

电弧的自磁场能够破坏具有旋转对称性弧柱的稳定性. 当放电电流低时, 弧柱一般具有圆柱形状. 当电流超过某一临界值时, 柱状弧柱就会变成螺旋状弧柱. 研究电弧的螺旋不稳定性对高压断路器的开断能力、高压光源中电弧放电的功率输入以及聚变反应堆中防止等离子体被污染等问题具有重要意义. 因此, 确定电弧不稳定性的增长率和外磁场对它的影响除了在技术上令人感兴趣外, 在理论研究上也进行了各种尝试. Yuen^[4]首次采用线性微扰理论和硬棒状电弧柱模型对轴向磁场中 Poiseuille 电弧的不稳定性进行了研究. Mentel^[2]阐述了与时间无关的长柱状电弧的线性微扰理论. Ernst 等^[3]由管壁直径和气体压力关系计算了使电弧产生不稳定性的临界电流幅度. Gaede^[4]阐述了自由磁场产生的电弧旋转机制. Ragaller^[5]从完整的平衡方程出发, 根据不稳定性增长率和外磁场影响的一些定性结果建立了电弧不稳定性理论. Mentel^[6]把与时间有关的线性微扰理论应用于基本微分方程, 对长柱型电弧不稳定性增长率的计算奠定了严格的理论基础. 在此基础上, Huelsmann 等^[7]对氢弧和其它气体中的低电流弧进行了研究. 但是, 以上作者都采用了通道模型, 即认为导电通道的电导率是常量. 而在实际情况下电弧柱的电导率是有一定分布的^[8]. 文献[9]采用了抛物型电流分布. 本文采用线性热势电导率模型^[10]和与时间有关的线性微扰理论, 给出氢弧和其它气体中低电流弧的定量结果.

2 基本方程与简化假设

描述电弧等离子体运动的基本方程是磁流体力学(MHD)方程组. 考虑到不稳定的时

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

间常数是毫秒量级,电弧质量密度很小,弧电流较低等因素,略去动量平衡方程的惯性项以及能量平衡方程中的辐射项.电磁方程采用静电近似处理,其中考虑到感应电场项比外加电场小三个以上数量级^[11],欧姆定律取 $j = \sigma E$,由以上假设,MHD 方程变为

$$\frac{d}{dt}\rho_m + \rho_m \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

$$j \times B - \nabla P - \eta \nabla \times \nabla \times v + \frac{4}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot v) = 0, \quad (2)$$

$$\rho_m \frac{d}{dt}h = j \cdot E + \nabla (\kappa \nabla T), \quad (3)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot E = 0, \quad (5)$$

$$j = \sigma E, \quad (6)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (8)$$

由于温度 T 和质量密度 ρ_m 的梯度很陡, $\nabla \cdot v$ 项不能忽略,粘滞力也被考虑.在电弧中,由洛伦兹力引起的相对压力 $\Delta P/P < 10^{-2}$,所以忽略输运系数对压力的依赖关系.引进热势 $S(T)$ (一个新的“温度”)来消除热传导系数 κ 对温度的依赖关系

$$S(T) = \int_0^T \kappa(T) dT, \quad (9)$$

并取^[7]

$$\alpha \equiv \left\langle \left(\frac{dh}{d(1/\rho_m)} \right)_p \right\rangle, \quad (10)$$

$$\rho_m = \frac{a_m}{S + S_a}, \quad (11)$$

$$\frac{dS}{dt} = (-v_{IC} + v) \nabla S, \quad (12)$$

其中 $\langle \rangle$ 表示取平均值, S_a, a_m 为常数, η 为粘性系数, v_{IC} 为弧柱的滑移速度.

3 稳态平衡量

设稳态平衡时电弧是半径为 r_c 的无限长圆柱,宏观气流速度为零,考虑到问题的轴对称性,取以弧柱轴线为 z 轴的柱坐标系 (r, φ, z) ,采用线性热势电导率模型,即柱内电导率为

$$\sigma_0^i(r) = \frac{(\mu k)^2}{E_0^2} (S_0^i(r) - S_{0c} + S_b), \quad (13)$$

其中 $S_0^i(r)$ 和 S_{0c} 分别为柱内和 r_c 处热势, E_0 为电场强度, k 为波数, $k = 2\pi/\lambda$, μ 和 S_b 为待定常数.柱外仍然视为真空区,即柱外电导率 $\sigma_0^e = 0$,由稳态能量平衡方程及边界条件

$$S_0^i(r_c) = S_0^e(r_c) = S_{0c}, \quad S_0^e(R) = 0, \quad \frac{d}{dr} S_0^i|_{r_c} = \frac{d}{dr} S_0^e|_{r_c}, \quad (14)$$

得柱内外热势分别为

$$S_0^i(r) = S_{0c} \left[1 - \frac{J_0(x_c) - J_0(x)}{x_c J_1(x_c) \ln(R/r_c)} \right] \quad (r < r_c), \quad (15)$$

$$S_0^o(r) = S_{0c} \left[1 - \frac{\ln R - \ln r}{\ln(R/r_c)} \right] \quad (r_c < r < R), \quad (16)$$

其中 $x = \mu k r$, $x_c = \mu k r_c$, J_0, J_1 为 Bessel 函数, R 为外器壁半径, $S_{0c} = \frac{L}{2\pi} \ln \frac{R}{r_c}$, $L = IE_0$ 为弧柱单位长度的输入功率, I 为弧电流. 由(15)式得柱内电导率和电流密度分别为

$$\sigma_0(r) = \sigma_0 J_0(x), \quad (17)$$

$$j_0(r) = j_0 J_0(x) e_z, \quad (18)$$

其中 $\sigma_0 = \frac{j_0}{E_0}$, $j_0 = \frac{j_{00}}{B(x_c)}$, $j_{00} = \frac{I}{\pi r_c^2}$, $B(x) = \frac{2J_1(x)}{x}$, 由弧柱电流产生的自磁场

$$B_0^i(r) = \frac{1}{2} \mu_0 j_0 r B(x) e_\varphi, \quad (19)$$

外加轴向磁场设为

$$B_a = \frac{1}{2} \mu_0 j_{00} r_c FM(t) e_z, \quad (20)$$

其中 $FM(t) = B_a(t)/B_0^i(r_c)$.

4 扰动方程及其解

4.1 线性扰动展开

设电弧柱产生一个螺旋型的小扰动, 其边界方程为

$$r = r_c + \epsilon_c \exp(i\varphi - ikz), \quad (21)$$

其中 ϵ_c 为扰动振幅, $\epsilon_c \ll r_c$. 由(21)式得变形的弧柱表面外法矢量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r + i\epsilon_c \exp(i\varphi - ikz) \left[-\frac{1}{r_c} \mathbf{e}_\varphi + k \mathbf{e}_z \right], \quad (22)$$

这时各物理量都可展开为

$$A = A_0(r) + A_1, \quad (23)$$

其中 $A_0(r)$ 表示未扰动时的平衡量. 小扰动量 A_1 取下面形式:

$$A_1 = \hat{A}_1(r, k, t) \exp(i\varphi - ikz). \quad (24)$$

在弧柱表面上连续物理量的边界条件可写为

$$\left[\left(\frac{dA_0}{dr} \right)_{r=r_c} + \hat{A}_1(r_c, k, t) \right] = 0, \quad (25)$$

其中中括号表示电弧柱内外物理量在边界处的差值.

4.2 弧柱内的扰动电磁量

由(23)式, 扰动电流密度可写为

$$j_1(r) = \sigma_0(r)E_1(r) + \sigma_1(r)E_0, \quad (26)$$

其中 $E_1(r) = -\nabla V_1$, 电势 V_1 满足 Laplace 方程 $\Delta V_1 = 0$, 得

$$E_1(r) = \frac{\epsilon_0 k E_0}{I_1'} \left\{ -i I_1'(\rho) e_r + \frac{I_1(\rho)}{\rho} e_\varphi + I_1(\rho) e_z \right\}, \quad (27)$$

$$j_1(r) = \frac{\epsilon_0 k j_0}{I_1'} \left\{ -i J_0(x) I_1'(\rho) e_r + J_0(x) \frac{I_1(\rho)}{\rho} e_\varphi - [J_0(x) I_1(\rho) - 2\zeta \rho B(x) I_1'(\rho)] e_z \right\}, \quad (28)$$

其中 $\rho = kr$, $\zeta = \frac{1}{4}\mu^2$, $I_1(\rho)$ 及下面的 $K_1(\rho)$ 为虚宗量 Bessel 函数. 以下带撇号的表示求导数, 不带自变量的函数是指 $\rho = \rho_c$ 处的值. 例如 $I_1' \equiv \frac{d}{d\rho} I_1(\rho)|_{\rho=\rho_c}$. 由(7)和(23)式及边界条件 $[\hat{B}_{1r}] = 0$, $[\hat{B}_{1z}] = 0$, 得柱内扰动磁场

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{\epsilon_0 \mu_0 j_0}{I_1'} & \left\{ i [J_0(x) \frac{I_1(\rho)}{\rho} + M_1 I_1'(\rho) + 2\zeta(\beta, A_k')] e_r \right. \\ & - [J_0(x) I_1'(\rho) + M_1 \frac{I_1(\rho)}{\rho} + 2\zeta \frac{(\beta, A_k)}{\rho}] e_\varphi \\ & \left. + [M_1 I_1(\rho) + 2\zeta(\beta, A_k)] e_z \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中括号函数 (β, A_k) 的定义见附录. M_1 为

$$M_1 = 2\zeta \rho_c [K_1'(\beta, A_k)_{\rho=\rho_c} - K_1(\beta, A_k')_{\rho=\rho_c}] - J_0(x_c) I_1 K_1.$$

4.3 动量扰动方程及其解

为了求解动量方程, 引进如下辅助量:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{4}{3} \eta \nabla \cdot v_1 - p_1, \\ \omega_1 = \nabla \times v_1, \\ W_1 = v_{1z} - \frac{d}{\alpha dz} S_1. \end{cases} \quad (30)$$

利用这些辅助量, 得线性化后的扰动方程

$$\Delta q_1 - 2\mu_0 j_0(r) j_{1z}(r) + (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{j})_1 = 0, \quad (31)$$

$$\eta \Delta \omega_{1z} + [\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})]_{1z} = 0, \quad (32)$$

$$\eta \Delta W_1 + \frac{d}{dz} q_1 - \frac{d}{\alpha dz} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1 + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_{1z} = 0. \quad (33)$$

取辅助量的无量纲形式

$$q_1^* = \frac{k^2}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} q_1,$$

$$\omega_1^* = \frac{k^2 \eta}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} (\omega_{1r}, i\omega_{1\varphi}, i\omega_{1z}),$$

$$W_1^* = \frac{ik^3 \eta}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} W_1.$$

方程(31)–(33)在弧柱内(用角标 i 表示)外(用角标 e 表示)的解为

$$\begin{aligned} \hat{q}_1^{*i} = & C_1 I_1(\rho) + M_7 \zeta(\beta, A_k) + M_6 \{ -2(\alpha\alpha, A_k) + \zeta[2M_1(\beta, A_k) \\ & + 8(\alpha\beta, B_k) + (\beta\beta, A_k) - 2(\beta\beta, B_k) + 2(\beta\beta, A_{k+1}) + 4\zeta(\beta\beta, P_m^{k-m})] \}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\hat{q}_1^{*e} = C_7 I_1(\rho) + C_8 K_1(\rho), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1z}^{*i} = & C_2 I_1(\rho) + M_7 [0.5(\alpha, A_k) - \zeta(\beta, B_k)] \\ & + M_6 \{ M_1(\alpha, A_k) - 0.5(\alpha\beta, A_k) - \zeta[2M_1(\beta, B_k) + 2(\alpha\beta, A_k) \\ & - (\beta\beta, B_k) - 2(\beta\alpha, P_m^{k-m}) + 4\zeta(\beta\beta, R_m^{k-m})] \}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\hat{\omega}_{1z}^{*e} = C_{11} I_1(\rho) + C_{12} K_1(\rho), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_1^{*i} = & -0.5C_1 \rho I_1'(\rho) + C_3 I_1(\rho) + M_5 [-2(\alpha, A_k) + 2\zeta(\beta, B_k)] - M_7 \zeta(\beta, P_k^0) \\ & + M_6 \{ -0.5(\alpha\beta, B_k) + 2(\alpha\alpha, P_k^0) - \zeta[2M_1(\beta, P_k^0) \\ & + 8(\alpha\beta, Q_k^0) + (\beta\beta, P_k^0) - 2(\beta\beta, Q_k^0) + 2(\beta\beta, P_{k+1}^0) + 4\zeta(\beta\beta, S_m^{k-m})] \}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\hat{W}_1^{*e} = -0.5C_7 \rho I_1'(\rho) - 0.5C_8 \rho K_1'(\rho) + C_9 I_1(\rho) + C_{10} K_1(\rho), \quad (39)$$

其中 $M_5 = \frac{\epsilon_c k \pi \rho_c}{I_1' M k B(x_c)}$, $M_6 = \frac{\epsilon_c}{r_c I_1' B^2(x_c)}$, $M_7 = \frac{\epsilon_c k F M}{I_1' B(x_c)}$, $Mk = \frac{\alpha \mu_0 I}{\eta E_0}$ 为 Maecker 数, $C_1, C_2, C_3, C_7, \dots, C_{12}$ 为待定积分常数.

4.4 能量扰动方程及其解

将(9)–(12)式代入(3)式,线性化后得弧柱内外能量扰动方程

$$D_B \hat{S}_1^* - f(\rho) \frac{d}{d\rho} \hat{S}_1^* = M_2 f(\rho) [\hat{\omega}_{1\varphi}^* + \frac{d}{d\rho} \hat{W}_1^*] - M_8 f(\rho) - \frac{(j \cdot E)_1}{k^2 L}, \quad (40)$$

其中 $M_2 = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3 I_1' B^2(x_c)}$, $\hat{S}_1^* = \frac{\hat{S}_1}{L}$, $M_8 = \frac{\epsilon_c \tau}{r_c \pi \rho_c}$, $\tau = \frac{\pi r_c^2 \alpha}{L}$ 为特征时间常数.

$$f(\rho) \equiv \frac{d}{d\rho} \ln [S_0(\rho) + S_a], \quad (41)$$

$$\hat{\omega}_{1\varphi}^* = \frac{d}{d\rho} \hat{q}_1^* - \frac{\hat{\omega}_{1z}^*}{\rho} + \frac{1}{r_c \mu_0 j_{00}^2} (j \times B)_{1r}, \quad (42)$$

$$D_B \equiv \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right). \quad (43)$$

方程(40)在电弧柱内外的解分别为

$$\hat{S}_1^{*i} = \sum_{n=1}^4 C_n F_n(\rho) + \frac{\epsilon_c}{r_c Mk} F_5(\rho) + \frac{\epsilon_c}{r_c} F_6(\rho) + \frac{\epsilon_c}{r_c} F M F_7(\rho) + \frac{\epsilon_c \tau}{r_c Mk} F_8(\rho), \quad (44)$$

$$\hat{S}_1^{*e} = \sum_{n=5}^{12} C_n G_{n-4}(\rho) + \frac{\epsilon_c \tau}{r_c Mk} G_9(\rho), \quad (45)$$

$F_n(\rho)$ 表达式见附录, $G_n(\rho)$ 见文献[9], C_4, C_5, C_6 为待定积分常数.

5 边界条件

除了前面用过的电磁场边界条件以及物理量有限值条件外,还有下面一些条件.

5.1 在器壁处($r = R$)由热势和气流速度为零得关系

$$\widehat{S}_1^{*e}(\rho_w) = 0, \quad (46)$$

$$\widehat{\omega}_{1\varphi}^{*e}(\rho_w) + \frac{d}{d\rho} \left[\widehat{W}_1^{*e}(\rho) + \frac{\pi^2 \rho_c^3}{Mk} \widehat{S}_1^{*e}(\rho) \right]_{\rho=\rho_w} = 0, \quad (47)$$

$$\widehat{\omega}_{1r}^{*e}(\rho_w) = 0, \quad (48)$$

$$\widehat{W}_1^{*e}(\rho_w) = 0. \quad (49)$$

5.2 在弧柱边界上($r = r_c$)由热势、气体速度、总压力、热流密度和粘滞应力都是连续的,有以下关系:

$$[\widehat{S}_1^*] = 0, \quad (50)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} \widehat{q}_1^* \right] + \frac{k}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} (j \times B)_{1r} |_{\rho=\rho_c} = 0, \quad (51)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} \widehat{\omega}_{1z}^* \right] - \frac{1}{\rho_c} [\widehat{q}_1^*] + \frac{ik}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} (j \times B)_{1\varphi} |_{\rho=\rho_c} = 0, \quad (52)$$

$$[\widehat{q}_1^*] + \frac{ik}{\mu_0 j_{00}^2 \rho_c} (j \times B)_{1z} |_{\rho=\rho_c} = 0, \quad (53)$$

$$[\widehat{\omega}_{1z}^*] = 0, \quad (54)$$

$$[\widehat{W}_1^*] = 0, \quad (55)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} \widehat{S}_1^* \right] + \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} S_0^* \right)_{\epsilon k} \right] = 0, \quad (56)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} \widehat{W}_1^* \right] + \frac{\pi^2 \rho_c^3}{Mk} \left[\frac{d}{d\rho} \widehat{S}_1^* \right] = 0. \quad (57)$$

5.3 限制性的附加条件

$$\left(\frac{dS_0}{d\rho} \right) |_{\rho=\rho_c} \epsilon k + \widehat{S}_1(\rho_c) = 0. \quad (58)$$

6 螺旋不稳定性分析

有了(46)–(58)式的定解条件,即可确定电弧柱内外的场分布(电磁场、流场)以及温度分布.(即热势分布).下面讨论螺旋不稳定性.

将(46)–(58)式写成如下矩阵方程:

$$M \cdot C_i = 0, \quad (59)$$

其中列阵 C_i 和系数矩阵

$$C_i = \left[C_1, \dots, C_{12}, \frac{\epsilon_c}{r_c} \right]^T, \quad M = [M^1 | \dots | M^{13}], \quad (60)$$

列阵 $M^1, \dots, M^{12}$ 由积分常数 $C_1, \dots, C_{12}$ 的系数构成, M^{13} 由扰动振幅 ϵ_c 的系数构成

$$M^{13} = d_1 + FMd_2 + \frac{1}{Mk}d_3 + \frac{\epsilon_c \tau \pi \rho_c^2}{\epsilon_c Mk}d_4, \quad (61)$$

其中 $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为分别与自磁场、外加磁场、热传导和热惯性相关的系数. (59) 式的齐次方程组有非零解的条件是相应的矩阵行列式 $|M| = 0$, 即

$$\frac{\dot{\epsilon}_c}{\epsilon_c} \tau \Delta_4 + \Delta_3 + MkFM\Delta_2 + Mk\Delta_1 = 0. \quad (62)$$

这即为螺旋扰动振幅 ϵ_c 满足的微分方程, 其中 Δ_n 为下列形式的行列式:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \det(M^1 | \dots | M^{12} | d_n) \quad n = 1, 2, 3, \\ \Delta_4 &= \pi \rho_c^2 \det(M^1 | \dots | M^{12} | d_4). \end{aligned} \quad (63)$$

由(62)式得扰动振幅 ϵ_c 与时间的函数关系

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \exp \left\{ -\frac{1}{\tau \Delta_4} \left[(\Delta_3 + Mk\Delta_1)t + Mk\Delta_2 \int_0^t FM(t) dt \right] \right\}. \quad (64)$$

对 $FM(t) = FM = \text{常量}$ (外加稳恒轴向磁场)

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \exp[\Omega t], \quad (65)$$

其中 Ω 称为不稳定性增长率,

$$\Omega = -\frac{\Delta_1}{\tau \Delta_4} \left(Mk + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} + MkFM \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right). \quad (66)$$

稳定性条件为

$$\dot{\epsilon}_c \leq 0, \text{ 或为 } \Omega \leq 0. \quad (67)$$

若取 $FM = 0, \dot{\epsilon}_c = 0$, 得

$$Mk_G = -\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \quad \Omega_0 = -\frac{\Delta_1}{\tau \Delta_4} \left(Mk + \frac{\Delta_3}{\Delta_1} \right), \quad (68)$$

Mk_G 称为临界 Maecker 数, Ω_0 为自磁场产生的螺旋不稳定性增长率. 当 $Mk > Mk_G$ 时, 电弧为不稳定的. 当 $Mk < Mk_G$ 时, 电弧为稳态的柱形. 当 $Mk = Mk_G$ 时, 电弧为稳态的螺旋形状. 为了得到定量结果, 本文对(68)式进行了计算, 并同通道模型进行了比较^[2]. 图 1 中曲线 1 为均匀电流分布情形, 曲线 2 为本文情形. 可见本文相应的 Mk_G 比均匀分布的高, 稳定区域增大. 图 2 和图 3 分别为均匀电流分布情形和本文情形. 图中曲线 1—5 分别对应电流 $I = 6, 9, 12, 15, 18$ A, 可见本文情形低电流的 Mk_G 随扰动波长变化较大, 电流快. 图 4 为本文情形下不稳定性增长率 Ω_0 随扰动波长的变化曲线, 比均匀电流情形稍低些. 计算参数取自文献[13].

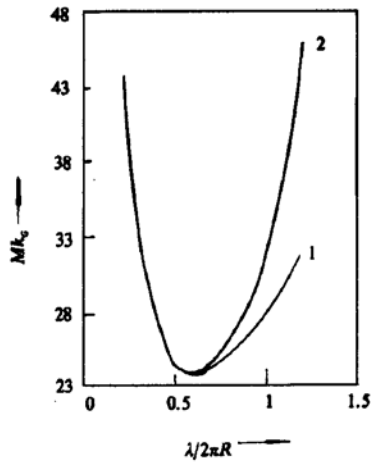


图1 临界 Maecker 数 Mk_G 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线
曲线 1 为文献[12]情形;曲线 2 为本文情形

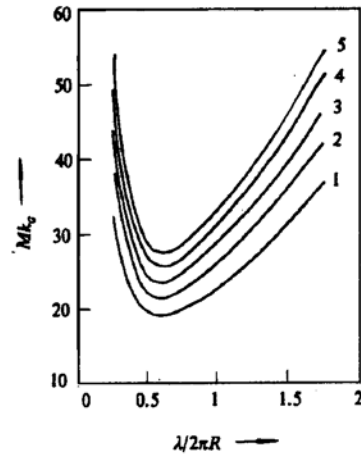


图2 均匀电流分布时临界 Maecker 数 Mk_G 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线 曲线 1-5 分别对应电流 $I = 6, 9, 12, 15, 18$ A

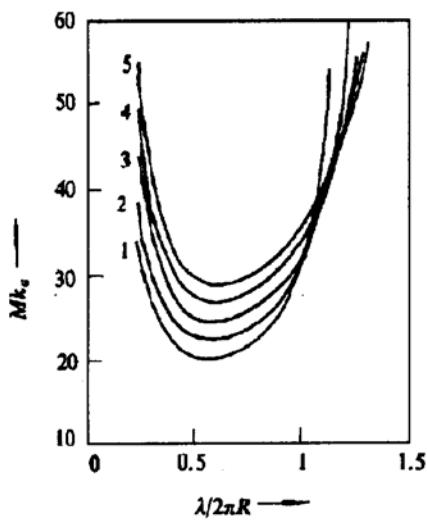


图3 本文情形临界 Maecker 数 Mk_G 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线 曲线说明同图 2

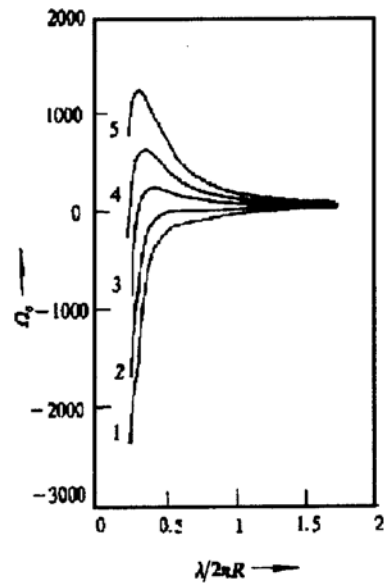


图4 自磁场产生的不稳定性增长率 Ω_0 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线 曲线说明同图 2

7 结 论

1. 本文采用接近实际的电导率分布模型和与时间有关的线性微扰理论,得到了电弧柱内外场分布、温度即能量分布.对电弧等离子体发生器的设计提供了理论依据.

2. 通过定解条件, 得到了螺旋扰动振幅所满足的微分方程. 在外加稳恒轴向磁场的假设下, 得到了稳定性条件.

3. 为了检验所得到的结果, 计算了自磁场的临界 Maecker 数及不稳定性增长率与扰动波长的关系. 与通道模型比较, 稳定区域变大, 与实验结果比较一致^[13].

4. 对不同电流的临界 Maecker 数计算表明, 在长波扰动下, 小电流电弧的稳定性比大电流电弧的稳定性好.

5. 可以预计, 本文采用的电弧模型, 对大功率电弧更有实际意义.

附 录

(1) 定义括号函数

$$(\cdots \alpha\beta, \varphi \cdots mk) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \cdots \alpha_{m-n} \beta_{k-m} \varphi \cdots mk(\rho).$$

(a) α , β 和 γ 是有定义的表达式, 在本文中为

$$\alpha_k = \frac{(-\xi)^k}{(k!)^2}, \quad \beta_k = \frac{(-\xi)^k}{(k!)(k+1)!}, \quad \gamma_k = \frac{(-\xi)^k}{[(k+1)!]^2}.$$

(b) $\varphi \cdots mk(\rho)$ 是下面有定义的带角标的函数.

(c) 这里求和顺序是固定的. 二重求和先 m 后 k , 三重求和先 n 再 m 后 k , 例如

$$(\alpha\beta, A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \alpha_m \beta_{k-m} A_k(\rho), \quad (\alpha\beta, A_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \alpha_m \beta_{k-m} A_m(\rho).$$

函数 $(\alpha\beta, A_k)$ 与函数 $(\alpha\beta, A_m)$ 是不同的.

(2) $D_B A(\rho) = f(\rho)$ 的非齐次特解

$$f(\rho) = \rho^{2n} I_1(\rho) \text{ 和 } f(\rho) = \rho^{2n+1} I_1'(\rho) \text{ 的特解分别为 } A_n(\rho), B_n(\rho),$$

$$A_n(\rho) = \sum_{m=-1}^n E_m^n [-m\rho^{2m} I_1(\rho) + \rho^{2m+1} I_1'(\rho)] \quad n = -1, 0, 1, 2, \cdots$$

$$B_n(\rho) = -(n+1)A_n(\rho) + \frac{1}{4(n+1)}\rho^{2(n+1)} I_1(\rho) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$B_{-1}(\rho) = \frac{1}{2} I_1(\rho) \ln \rho,$$

其中

$$E_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2(2m+1)} \prod_{k=m}^{n-1} \frac{2k(k+1)(k+2)}{2k+3} & (m < n), \\ \frac{1}{2(2n+1)} & (m = n), \end{cases}$$

以及其它特解

$$P_n^k(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-mA_{m+k}(\rho) + B_{m+k}(\rho)],$$

$$Q_n^k(\rho) = -(n+1)P_n^k(\rho) + \frac{1}{4(n+1)}A_{n+k+1}(\rho),$$

$$R_n^k(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [(1-2m^2)A_{m+k}(\rho) + mB_{m+k}(\rho) + A_{m+k+1}(\rho)],$$

$$S_n^k(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-mP_{m+k}^0(\rho) + Q_{m+k}^0(\rho)].$$

(3) $F_n(\rho)$, $n=1-8$

$$F_1(\rho) = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3} [-I_1(\rho) + 2(\beta, u_0^k)],$$

$$F_2(\rho) = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3} [-2(\beta, a_k)],$$

$$F_3(\rho) = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3} [-I_1(\rho)],$$

$$F_4(\rho) = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3} P_n(\rho),$$

$$F_5(\rho) = \frac{Mk}{\pi \rho_c I_1' B(\rho_c)} 2 [\lambda(\alpha, a_k) - \lambda \zeta(\beta, b_k) + (\gamma \alpha, a_{k+1}) - \zeta(\gamma \beta, b_{k+1}) + 2(\alpha \beta, u_m^{k-m}) - 2 \zeta(\beta \beta, v_m^{k-m})],$$

$$\begin{aligned} F_6(\rho) = & \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3 I_1' B^2(\rho_c)} 2 [M_1(\alpha \beta, a_k) + (\alpha \alpha \beta, b_k) + 0.5(\alpha \beta \beta, a_{k+1}) - \zeta(\beta \beta \beta, b_{k+1}) - M_1(\alpha \beta, x_m^{k-m}) \\ & + 2M_1 \zeta(\beta \beta, y_m^{k-m}) + (0.5 + 2 \zeta)(\alpha \beta \beta, x_m^{k-m}) - \zeta(\beta \beta \beta, y_m^{k-m}) + 2 \zeta(\beta \alpha \beta, x_m^{k-m}) \\ & - 2 \zeta(\beta \alpha \beta, X_n^{k-m, m-n}) + 4 \zeta^2(\beta \beta \beta, W_n^{k-m, m-n}) + 2M_1 \zeta(\beta \beta, u_m^{k-m}) \\ & - 2(\alpha \alpha \beta, u_m^{k-m}) + (8 \zeta - 0.5)(\alpha \beta \beta, v_m^{k-m}) + \zeta(\beta \beta \beta, u_m^{k-m}) \\ & - 2 \zeta(\beta \beta \beta, v_m^{k-m}) + 2 \zeta(\beta \beta \beta, u_{m+1}^{k-m}) + 4 \zeta^2(\beta \beta \beta, X_n^{k-m, m-n}) - 2M_1 \zeta(\beta \beta \beta, U_{m+1}^{k-m, 0}) + 2(\alpha \alpha \beta, U_m^{k-m, 0}) \\ & - 8 \zeta(\alpha \beta \beta, V_m^{k-m, 0}) - \zeta(\beta \beta \beta, U_m^{k-m, 0}) + 2 \zeta(\beta \beta \beta, V_m^{k-m, 0}) - 2 \zeta(\beta \beta \beta, U_{m+1}^{k-m, 0}) - 4 \zeta^2(\beta \beta \beta, Y_n^{k-m, m-n})], \end{aligned}$$

$$F_7(\rho) = \frac{Mk}{\pi^2 \rho_c^3 I_1' B(\rho_c)} [- (\alpha \beta, a_k) + (\alpha \beta, x_m^{k-m}) - 2 \zeta(\beta \beta, y_m^{k-m}) - 2 \zeta(\beta \beta, u_m^{k-m}) + 2 \zeta(\beta \beta, U_m^{k-m, 0})],$$

$$F_8(\rho) = \frac{Mk}{\pi \rho_c} P(\rho),$$

$$\text{其中 } a_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,1}^n \rho^{2k+2n+3}, \quad b_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,2}^n \rho^{2k+2n+3},$$

$$P_n(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,3}^n \rho^{2k+1} \quad (n=-1), \quad P(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,4}^n \rho^{2k+3} \quad (n=0),$$

$$C_{k,i}^n = \frac{1}{4\lambda(k+n+1)(k+n+2)} \left\{ d_{k,i} + C_{k-1,i}^n [\lambda + 4(k+n)^2 - 2] + \sum_{m=2}^k \frac{C_{k-m,i}^n (-\zeta)^{m-2}}{(m!)^2} \right. \\ \left. \times [2\zeta m - m^2 - 4\zeta(k+n+1-m)(k+n+2-2m)] \right\} \quad k=0,1,2,\dots, i=1,2,3,4,$$

$$d_{k,1} = \frac{(0.5)^{2k+1}}{k!(k+1)!}, \quad d_{k,2} = d_{k,1}(2k+1), \quad d_{k,3} = \begin{cases} 1, & k=0; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad d_{k,4} = \beta_k.$$

$$x_n^k(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-ma_{m+k}(\rho) + b_{m+k}(\rho)], \quad y_n^k(\rho) = -(n+1)x_n^k(\rho) + \frac{1}{4(n+1)}a_{n+k+1}(\rho),$$

$$u_n^k(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [(1-2m^2)a_{m+k}(\rho) + mb_{m+k}(\rho) + a_{m+k+1}(\rho)],$$

$$v_n^k(\rho) = -(n+1)u_n^k(\rho) + \frac{1}{2}a_{n+k+1}(\rho) + \frac{1}{4(n+1)}b_{n+k+1}(\rho),$$

$$X_n^{i,k}(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-mx_{m+k}^i(\rho) + y_{m+k}^i(\rho)],$$

$$U_n^{i,k}(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-mu_{m+k}^i(\rho) + v_{m+k}^i(\rho)],$$

$$V_n^{i,k}(\rho) = -(n+1)U_n^{i,k}(\rho) + \frac{1}{4(n+1)}u_{n+k+1}^i(\rho),$$

$$W_n^{i,k}(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [(1-2m^2)x_{m+k}^i(\rho) + my_{m+k}^i(\rho) + x_{m+k+1}^i(\rho)],$$

$$Y_n^{i,k}(\rho) = \sum_{m=0}^n E_m^n [-mU_{m+k}^{i,0}(\rho) + V_{m+k}^{i,0}(\rho)],$$

$$\text{其中 } \lambda = (a\rho_c)^2, \quad a^2 = 2B(\rho_c) [\ln(R/r_c) + b] + \frac{1-J_0(\rho_c)}{\zeta}, \quad b = \frac{2\pi S_a}{L}.$$

[1] M.C. Yuen, *Phys. Fluids*, **9**(1966), 1140.

[2] J. Mentel, *Z. Naturforsch. Teil, A*, **26** (1971), 526.

[3] K.A. Ernst, J. Kopainsky and J. Mentel, *Z. Phys.*, **265**(1973), 253.

[4] P.J. Gaede, *Z. Phys.*, **255**(1972), 40.

[5] K. Ragaller, *Z. Naturforsch. Teil, A*, **28**(1973), 1321.

- [6] J. Mentel, in the Theory of the Electric Arc Under Conditions of Forced Heat Exchange (in Russian), edited by M. F. Zhukov (Nauka, Novosibirsk, 1977), pp. 182—205.
- [7] H. G. Huelsmann and J. Mentel, *Phys. Fluids*, **30**(1987), 2266.
- [8] K. Behringer and N. van Cung, *Appl. Phys.*, **22**(1980), 373.
- [9] 李国炳、刘金远、孙继中、宫野, 核聚变与等离子体物理, **15**(2)(1995), 9.
- [10] H. H. Maecker, *Proc. IEEE*, **59**(1971), 439.
- [11] М. ф. Жуков, А. С. Кортеев, Б. А. Урюков, Прикладная динамика термической плазмы(Издательство «НАУКА», сибирское отделение, 1975).
- [12] H. G. Huelsmann and J. Mentel, *Phys. Fluids*, **30**(1987), 2274.
- [13] H. G. Huelsmann, Ph. D. thesis(Ruhr-University Bochum, 1982).

THE HELICAL INSTABILITY OF ARCS FOR LINEAR HEAT FLUX POTENTIAL MODEL IN AN AXIAL MAGNETIC FIELD

LIU JIN-YUAN GONG YE LI GUO-BING MA TENG-CAI ZHANG LIN

(State Key Laboratory for Materials Modification by Laser, Ion and Electron Beams,
Dalian University of Technology, Dalian 116023)

(Received 31 December 1994)

ABSTRACT

The helical instability of an arc column with electrical conductivity of the distribution of the linear heat flux potential (a new "temperature") is discussed in axial magnetic field. The magnetohydrodynamic equations serve as the starting point of the theory. In an electrostatic approximation and a linear time dependent perturbation theory, the perturbation equations for the arc column movement are deduced. Solutions of these equations are obtained analytically, from which the stability limit of the cylindrical arc and the growth rate of the helical instability are given. In comparison the results with those of uniform current distribution, it is found that the stable area is enlarged.

PACC: 5280; 5235; 5230