

(2 + 1) 维离散型 Toda 方程的对称性 *

钱贤民

(绍兴师范专科学校物理系, 绍兴 312000)

楼森岳

(复旦大学李政道物理学综合实验室¹⁾, 物理系, 上海 200433; 宁波师范学院物理系, 宁波 315211)

(1994 年 4 月 7 日收到)

将文献[1—4]提出的形式级数对称理论推广应用到(2 + 1)维的离散型 Toda 方程, 得到了二族无穷多广义截断对称. 每一族对称构成一个广义 W_∞ 代数, 通常的 W_∞ 代数仅是这个代数的子代数.

PACC: 0220; 1110; 1130; 0340K

1 引 言

自从 Mikhailov^[5], Fordy 和 Gibbons^[6]提出(2 + 1)维 Toda 方程以来, 人们对 Toda 体系的研究已取得丰硕的成果. 例如: 已经发现(2 + 1)维 Toda 方程是一种完全可积的差分微分方程, 它有一个 Lax 对、无穷多个守恒律、Bäcklund 变换、孤子解以及可积模型具有的一般特征^[7,8]. 人们还发现(2 + 1)维的 Toda 方程可通过对自对偶 Yang-Mills 系统进行约化而获得^[9]. 并且在一维情况下, Toda 分子自身的约化可得出著名的 Toda 晶格系统. 在小振幅连续范围内, Toda 分子的渐近约化可得出(2 + 1)维的 Kadomtsev-Petviashvili 方程和 Davey-Stewartson 方程^[9]. 在完全可积的非线性系统研究中, Toda 方程的研究具有重要意义^[9]. Toda 方程的对称研究也是有意义的. 然而, 至今人们对(2 + 1)维的 Toda 方程的对称研究还局限于低阶对称^[10]. 近年来, 本文作者之一(楼)用形式级数对称理论研究了三维连续 Toda 场理论的广义对称和 W_∞ 代数, 并获得了连续的 Toda 场的广义高阶对称^[11]. 本文将推广利用形式级数对称理论来研究离散型(2 + 1)维 Toda 方程的广义对称及其 W_∞ 代数.

2 差分微分体系的形式级数理论

作为一种典型的差分微分方程, (2 + 1)维离散型 Toda 方程可写为^[10]

$$u_{xt}(n) - e^{u(n-1)-u(n)} + e^{u(n)-u(n+1)} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty), \quad (1)$$

式中 $u(n)$ 是连续变量 x, t 和离散变量 n 的函数. 首先将文献[1]的形式级数理论推广应

* 国家自然科学基金及浙江省自然科学基金资助的课题.

1) 海达 Fellow.

用于下述具有 $m+1$ 维连续变量和 j 维离散变量的一般的差分微分体系:

$$\begin{aligned} u_{x_1 t}(n) &= K(t, x_1, x_2, \dots, x_m, n_1, n_2, \dots, n_j, u, u_{x_1}, \dots) \\ &\equiv K(n, u), \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $n = (n_1, n_2, \dots, n_j)$, $K(n, u)$ 是 u 的时间导数无关的空间 $(x_1, x_2, \dots, x_m, n)$, 时间 t , 场量 $u(n) = u(n_1, n_2, \dots, n_j)$ 以及 u 的空间导数的任意函数. 定义(2)式的对称 σ 为(2)式线性化方程的一个解:

$$\sigma_{x_1 t} = K' \sigma \equiv \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} K(u + \epsilon \sigma) \right|_{\epsilon=0}, \quad (3)$$

即(2)式在无穷小变换

$$u(n) \longrightarrow u(n) + \epsilon \sigma(n) \quad (4)$$

下是形式不变的.(4)式中 ϵ 是无穷小参数. 类似于文献[1—4], 本文寻求(3)式的 $\sigma(n)$ 具有形式级数

$$\sigma(n, f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(-k)} \sigma[n, k] \quad (5)$$

的对称. 式中 $f = f(t)$, 是时间 t 的一个任意函数; $f^{(-k)} = \partial_t^{(-k)} f$ 和 $\partial_t^{-1} = \int dt$. 把(5)式代入(3)式, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(-k+1)} \sigma_{x_1}[n, k] + \sum_{k=1}^{\infty} f^{(-k+1)} \sigma_{x_1 t}[n, k-1] = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(-k-1)} K' \sigma[n, k-1]. \quad (6)$$

由于 f 是 t 的一个任意函数, 则比较(6)式中 $f^{(-k+1)}$ 的系数, 得

$$\sigma_{x_1}[n, 0] = 0, \quad \sigma[n, 0] = g(t, x_2, x_3, \dots, x_n, n) \equiv g, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma[n, k] &= (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K') \sigma[n, k-1] = (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K')^2 \sigma[n, k-2] \\ &= \dots = (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K')^k \sigma[n, 0] = (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K')^k g, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\partial_{x_1}^{-1} = \int^{x_1} dx_1$, 是一个不定积分算符. 至此, 得到一般差分微分体系(2)式的一个形式级数对称称为

$$\sigma(n, f) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(-k)} (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K')^k g. \quad (9)$$

由于(3)式是一个线性方程, 利用线性迭加原理可得到(2)式的更一般的形式级数对称:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(f_i, g_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(-k)} (-\partial_t + \partial_{x_1}^{-1} K')^k g_i, \quad (10)$$

式中包含无穷多个任意函数 f_i 和 g_i .

3 (2+1)维 Toda 方程的截断对称

对于一般的差分微分体系(2)式, 对称(9)或(10)式是一个形式级数. 对于纯微分体系, 在文献[1—4]中, 我们已经看到若适当选取任意函数 g , 无穷级数对称(9)式退化成为

一个有限项的和式对称. 特别地, 对于完全可积模型, 这些截断对称构成一个无穷维的 Kac-Moody-Virasoro 型代数或广义 W_∞ 代数^[1-4]. 有意义的是冗长的详细计算表明, 对于具体的差分微分可积体系可以得到完全类似的结论.

对于 (2+1) 维 Toda 方程 (1) (即方程 (2) 取 $m = j = 1$), (3) 式中的线性化算子 K' 为

$$K' = e^{u(n-1)-u(n)} \Delta_- - e^{u(n)-u(n+1)} \Delta_+, \quad (11)$$

式中算子 Δ_- 和 Δ_+ 作用于任意函数 $F(n)$ 的定义为

$$\begin{aligned} \Delta_- F(n) &= F(n-1) - F(n), \\ \Delta_+ F(n) &= F(n) - F(n+1). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{若进一步取 } g_i(n) = \frac{n^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (13)$$

则 (9) 式成为

$$\begin{aligned} \sigma_i(n, f) &= \frac{1}{(i-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(i-k-1)} (-\partial_t \\ &\quad + \partial_x^{-1} e^{u(n-1)-u(n)} \Delta_- - \partial_x^{-1} e^{u(n)-u(n+1)} \Delta_+)^k n^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

式中任意函数 $f(t)$ 已被重新标记为 $f^{(i-1)}$.

为了便于计算, 本文引入一个 $\tau(n, x, t)$ 函数, 即

$$\tau(n) = \partial_x^{-1} e^{u(n)-u(n+1)}. \quad (15)$$

显然, 利用 $\tau(n)$, 方程 (1) 变为

$$u_{xt}(n) = \tau_x(n-1) - \tau_x(n). \quad (16)$$

对上式等号两边积分可得

$$u_t(n) = \tau(n-1) - \tau(n). \quad (17)$$

再利用 (15) — (17) 式可得到关于 $\tau(n)$ 满足的方程:

$$\tau_t(n) = \partial_x^{-1} \tau_x(n) \tau(n-1) + \partial_x^{-1} \tau_x(n) \tau(n+1) - \tau^2(n), \quad (18)$$

即

$$\tau_{xt}(n) = \tau_x(n) \tau(n-1) + \tau_x(n) \tau(n+1) - 2\tau(n) \tau_x(n). \quad (19)$$

利用上述记号, 具体计算表明, 形式级数对称 (14) 式实际上是截断的. 如:

(i) 对于 (14) 式, 令 $i = 1$, 则 $g_1(n) = 1$; 再由 (7) 和 (8) 式可知:

$$\begin{aligned} \sigma_1[n, 0] &= 1, \\ \sigma_1[n, 1] &= (-\partial_t + \partial_x^{-1} K') \cdot 1 = 0, \quad \sigma_1[n, j] = 0 \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (20)$$

显然, 第一个形式级数对称已被截断, 由 (14) 式可知它可表示为

$$\sigma_1(n, f) = f(t). \quad (21)$$

(ii) 对于 (14) 式, 令 $i = 2$, 则 $g_2(n) = n$, 由 (7) 和 (8) 式及 (11) — (19) 式可得

$$\begin{aligned} \sigma_2[n, 0] &= n, \\ \sigma_2[n, 1] &= (-\partial_t + \partial_x^{-1} K') n = \partial_x^{-1} K' n = \partial_x^{-1} (\tau_x(n-1) \Delta_- - \tau_x(n) \Delta_+) n \\ &= \partial_x^{-1} [\tau_x(n-1) ((n-1) - n) - \tau_x(n) (n - (n+1))] \\ &= -\partial_x^{-1} [\tau_x(n-1) - \tau_x(n)] = -\partial_x^{-1} u_{xt}(n) = -u_t(n), \\ \sigma_2[n, 2] &= (-\partial_t + \partial_x^{-1} K') \sigma_2[n, 1] = (-\partial_t + \partial_x^{-1} K') (-u_t(n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u_{tt}(n) - \partial_x^{-1}[\tau_x(n-1)\Delta_- - \tau_x(n)\Delta_+]u_t(n) \\
&= u_{tt}(n) - \partial_x^{-1}[\tau_x(n-1)(u_t(n-1) - u_t(n)) - \tau_x(n)(u_t(n) \\
&\quad - u_t(n+1))] = u_{tt}(n) - \partial_x^{-1}u_{ttt}(n) = u_{tt}(n) - u_{tt}(n) = 0, \\
\sigma_2[n, j] &= 0 \quad j \geq 3,
\end{aligned} \tag{22}$$

故第二个形式级数对称也被截断, 可写为

$$\begin{aligned}
\sigma_2(n, f) &= \frac{1}{(1-1)!} \sum_{k=0}^1 f^{(2-1-k)} (-\partial_t + \partial_x^{-1}K')^k n \\
&= f'(t)n - f(t)u_t(n).
\end{aligned} \tag{23}$$

(iii) 对于(14)式, 令 $i=3$, 则 $g_3 = \frac{n^2}{2!} = \frac{n^2}{2}$, 由(7)和(8)式及(11)–(19)式可得

$$\begin{aligned}
\sigma_3[n, 0] &= \frac{n^2}{2}, \\
\sigma_3[n, 1] &= \left(\frac{1}{2} - n\right)\tau(n-1) + \left(\frac{1}{2} + n\right)\tau(n), \\
\sigma_3[n, 2] &= \partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n-2) + \partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n+1) - \tau(n)\tau(n-1), \\
\sigma_3[n, 3] &= (-\partial_t + \partial_x^{-1}K')\sigma_3[n, 2] \\
&= -\partial_x^{-1}[\tau_{xt}(n-1)\tau(n-2) + \tau_x(n-1)\tau_t(n-2) + \tau_{xt}(n)\tau(n+1) \\
&\quad + \tau_x(n)\tau_t(n+1) - \tau_{xt}(n-1)\tau(n) - \tau_x(n-1)\tau_t(n) - \tau_{xt}(n)\tau(n-1) \\
&\quad - \tau_x(n)\tau_t(n-1)] + \partial_x^{-1}(\tau_x(n-1)\Delta_- - \tau_x(n)\Delta_+)\partial_x^{-1}(\tau_x(n-1) \\
&\quad \times \tau(n-2) + \tau_x(n)\tau(n+1) - \tau_x(n-1)\tau(n) - \tau_x(n)\tau(n-1)) \\
&= 2\partial_x^{-1}[\tau(n-1)\tau(n-2)\tau_x(n-1) - \tau_x(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n-2)\tau(n-1) - \tau_x(n-1) \\
&\quad \times \partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n-2) + \tau_x(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n-1) + \tau_x(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n-1) \\
&\quad \times \tau(n) - \tau(n-1)\tau(n)\tau_x(n-1) + \tau_x(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n) + \tau_x(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n) \\
&\quad \times \tau(n-1) - \tau(n)\tau(n-1)\tau_x(n) + \tau(n)\tau(n+1)\tau_x(n) - \tau_x(n)\partial_x^{-1} \\
&\quad \times \tau_x(n+1)\tau(n) - \tau_x(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n+1)] = 0 + 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\sigma_3[n, j] = 0 \quad j \geq 4.$$

显然, 第三个形式级数对称已被截断, 同时也证明了它是方程(3)的一个解. $\sigma_3(n, f)$ 可表为

$$\begin{aligned}
\sigma_3(n, f) &= \frac{1}{2}f''(t)n^2 + f'(t)\left[\left(\frac{1}{2} - n\right)\tau(n-1) + \left(\frac{1}{2} + n\right)\tau(n)\right] + f(t) \\
&\quad \times [\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n-2) + \partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n+1) - \tau(n)\tau(n-1)].
\end{aligned} \tag{25}$$

(iv) 下一个截断对称为($i=4$)

$$\begin{aligned}
\sigma_4(n, f) &= \frac{1}{6}n^3f'''(t) + \frac{1}{6}f''(t)[(3n^2 + 3n + 1)\tau(n) - (3n^2 - 3n + 1)\tau(n-1)] \\
&\quad + f'(t)[(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n-2) + (n+1)\partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n+1) - n\tau(n)\tau(n-1)] \\
&\quad + f(t)[\partial_x^{-1}\tau_x(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n+1)\tau(n+2) - \partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n-2)\tau(n-3) \\
&\quad + \tau(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)\tau(n-2) - \tau(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n)\tau(n+1)].
\end{aligned} \tag{26}$$

类似于文献[1–4]的讨论, 可知形式级数对所有的 $i=1, 2, \dots$ 都是截断的. 结果为

$$\sigma_i(n, f) \equiv \sigma'_i(n, f(t)) = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{k=0}^{i-1} f^{(i-k-1)} (-\partial_t + \partial_x^{-1} e^{u(n-1)-u(n)} \Delta_- - \partial_x^{-1} \times e^{u(n)-u(n+1)} \Delta_+)^k n^{i-1}. \quad (27)$$

由于 Toda 方程(1)的时空交换不变性, 我们在前面的所有讨论中交换 x, t 变量即得另一族无穷多截断对称:

$$\sigma'_i(n, f(x)) = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{k=0}^{i-1} f^{(i-k-1)} (-\partial_x + \partial_t^{-1} e^{u(n-1)-u(n)} \Delta_- - \partial_t^{-1} e^{u(n)-u(n+1)} \times \Delta_+)^k n^{i-1}. \quad (28)$$

4 (2+1) 维离散型 Toda 方程的广义 W_∞ 代数

近年来 W_∞ 代数在物理学的许多领域(二维引力、共形场论、弦理论、膜理论和可积模型等)得到了广泛的应用^[1]. 特别在连续的高维可积模型中, 我们发现了更一般的代数——广义 W_∞ 代数^[1-4]. 上节的研究表明: 类似于连续的三维 Toda 场方程, 离散型 (2+1) 维 Toda 方程也有两族无穷多的截断对称. 可以证明 (2+1) 维离散型 Toda 方程的每一族对称(27)或(28)式均构成一广义 W_∞ 代数. 首先我们定义两个对称间的李括号为

$$[A, B] = A'B - B'A = \frac{\partial}{\partial \epsilon} [A(u + \epsilon B) - B(u + \epsilon A)]|_{\epsilon=0},$$

式中 ϵ 是无穷小参数. 通过详细的计算可得

$$[\sigma'_1(n, f_1), \sigma'_1(n, f_2)] = 0, \quad (29)$$

$$[\sigma'_1(n, f_1), \sigma'_2(n, f_2)] = f'_1(t)f_2(t) = \sigma'_1[f'_1f_2], \quad (30)$$

$$[\sigma'_2(n, f_1), \sigma'_2(n, f_2)] = \sigma'_2[f'_1f_2 - f_1f'_2], \quad (31)$$

$$[\sigma'_3(n, f_1), \sigma'_1(n, f_2)] = \sigma'_2[-2f'_2f_1], \quad (32)$$

$$[\sigma'_2(n, f_1), \sigma'_3(n, f_2)] = \sigma'_3[2f'_1f_2 - f'_2f_1], \quad (33)$$

$$[\sigma'_3(n, f_1), \sigma'_3(n, f_2)] = \sigma'_4[2f'_1f_2 - 2f'_2f_1]. \quad (34)$$

必须指出的是(32)–(34)式的计算中必须利用不定积分的性质^[1-4]:

$$\partial_x^{-1} 0 = h(n, t),$$

$$\partial_x^{-1} u(n, x, t) = \partial_x^{-1} (u + 0) = \partial_x^{-1} u + H(n, t). \quad (35)$$

例如:

$$\begin{aligned} [\sigma'_3(f_1), \sigma'_1(f_2)] &= \sigma'_3(f_1)\sigma'_1(f_2) - \sigma'_1(f_2)\sigma'_3(f_1) \\ &= f_1\partial_x^{-1}[\tau_x(n-1)(\sigma'_1(n-1) - \sigma'_1(n))\tau(n-2) + \tau_x(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n-2) \\ &\quad \times (\sigma'_1(n-2) - \sigma'_1(n-1)) + \tau(n+1)\tau_x(n)(\sigma'_1(n) - \sigma'_1(n+1)) + \tau_x(n) \\ &\quad \times \partial_x^{-1}\tau_x(n+1)(\sigma'_1(n+1) - \sigma'_1(n+2))] - f_1[\tau(n-1)\partial_x^{-1}\tau_x(n) \\ &\quad \times (\sigma'_1(n) - \sigma'_1(n+1)) + \tau(n)\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)(\sigma'_1(n-1) - \sigma'_1(n))] \\ &\quad + f'_1[-n\partial_x\sigma'_1(n) + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}\tau_x(n-1)(\sigma'_1(n-1) - \sigma'_1(n)) + \partial_x^{-1} \\ &\quad \times \tau_x(n)(\sigma'_1(n) - \sigma'_1(n+1)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_1 \partial_x^{-1} 0 + f_1 \partial_x^{-1} \tau_x(n-1) \partial_x^{-1} 0 + f_1 \partial_x^{-1} 0 + f_1 \partial_x^{-1} \tau_x(n) \\
&\quad \times \partial_x^{-1} 0 - f_1 \tau(n-1) \partial_x^{-1} 0 - f_1 \tau(n) \partial_x^{-1} 0 - n f_1' \sigma_{1t}'(n) + f_1' \partial_x^{-1} 0 \\
&= f_1 h_0(n, t) + f_1 \partial_x^{-1} \tau_x(n-1) h_1(n, t) + f_1 h_2(n, t) + f_1 \partial_x^{-1} \tau_x(n) \\
&\quad \times h_3(n, t) - f_1 \tau(n-1) h_4(n, t) - f_1 \tau(n) h_5(n, t) - n f_1' f_2' + f_1' h_6(n, t),
\end{aligned}$$

比较上式等号右边与(32)式等号右边, 积分函数 h_0 — h_6 应取为

$$h_0 = h_2 = -n f_2'', \quad h_1 = h_5 = 2 f_2', \quad h_3 = h_4 = 0, \quad h_6 = -n f_2',$$

从而

$$\begin{aligned}
[\sigma_3'(f_1), \sigma_1'(f_2)] &= -2n f_1 f_2'' + 2 f_2' f_1 u_t(n) - 2n f_1' f_2' \\
&= -(-2 f_2' f_1) u_t(n) + (-2 f_2' f_1)' n \\
&= \sigma_2'[-2 f_2' f_1].
\end{aligned}$$

(29)–(34)式可统一写为

$$\begin{aligned}
[\sigma_i'(f_1), \sigma_j'(f_2)] &= \sigma_{i+j-2}'[(j-1)f_1' f_2 - (i-1)f_2' f_1], \\
\sigma_j'(f) &= 0 \quad (j < 1).
\end{aligned} \quad (36)$$

完全类似于文献[1–4]的讨论, (36)式对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, \infty$ 成立, 所以由(27)式(或(28)式)所描述的一族无穷多对称构成一种广义 W_∞ 代数(36)式. 比较(36)式与三维 Toda 连续场论的广义 W_∞ 代数结构, 可以看到两者的代数结构的差异仅在于对于连续场论对称指标 $i, j \geq 0$, 而对于分离场对称指标为 $i, j \geq 1$. 最后, 我们从(27), (28)式和(36)式出发, 给出广义 W_∞ 代数(36)式的一些有意义的子代数:

(i) 式中时间 t 无关对称

$$\begin{aligned}
\sigma_i' &\equiv \sigma_i'(1) = \frac{1}{(i-1)!} (-\partial_t + \partial_x^{-1} K')^{i-1} n^{i-1}, \\
\sigma_i^r &\equiv \sigma_i^r(1) = \frac{1}{(i-1)!} (-\partial_x + \partial_t^{-1} K')^{i-1} n^{i-1},
\end{aligned} \quad (37)$$

组成一个对易代数:

$$[\sigma_i', \sigma_j'] = [\sigma_i^r, \sigma_j^r] = [\sigma_i', \sigma_j^r] = 0. \quad (38)$$

(ii) 从(27)式的一般表达式出发, 可得到关于二维离散型 Toda 方程的 k 级主对称^[11]:

$$\beta_{i,k} = \frac{1}{(i-1)!} (-\partial_t + \partial_x^{-1} K')^{i-k-1} n^{i-1} \quad k = 1, 2, \dots, i-1. \quad (39)$$

而(39)式中的一级主对称构成一个第一类 Virasoro 代数:

$$[\beta_{i,1}, \beta_{j,1}] = (j-i) \beta_{j+i-2}, \quad (40)$$

即

$$[\sigma_i(t), \sigma_j(t)] = (j-i) \sigma_{j+i-2}(t) \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

(iii) 若取 $i = j = 2$,

$$f = \exp(rt/\alpha) \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

式中 α 是常数, 则可得到第二类 Virasoro 代数:

$$[\sigma^r, \sigma^s] = \frac{1}{\alpha} (r-s) \sigma^{r+s} \quad (r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (42)$$

式中 $\sigma^r \equiv \sigma_2(\exp rt/\alpha)$.

(iv) 若取 $j = i = 2$

$$f = (1/\alpha)t^r \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

式中 α 是常数, 则可得到第三类 Virasoro 代数:

$$[\sigma^r, \sigma^s] = \frac{1}{\alpha}(r-s)\sigma^{r+s-1} \quad (r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \quad (43)$$

式中 $\sigma^r \equiv \sigma_2(t^r/\alpha)$.

(v) 对于 (36) 式, 当 $i \geq 2$ 时, 若取 $f = \exp rt$

$$\sigma_i^r \equiv \sigma_i(\exp rt) \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

则可得到标准的第一类 W_∞ 代数:

$$[\sigma_i^r, \sigma_j^s] = [(j-1)r - (i-1)s]\sigma_{j+i-2}^{r+s} \quad (j, i \geq 2). \quad (44)$$

而 σ_i^r 正是一个共形自旋 i 的生成元. 在另外的 W_∞ 代数表示中要获得较高自旋生成元是很困难的^[12].

(vi) 由 (44) 式得到的第一类 W_∞ 代数是第二类 Virasoro 代数的推广形式, 而第二类 W_∞ 代数是第一类和第三类 Virasoro 代数的推广形式, 可表示为

$$[\sigma_i^r, \sigma_j^s] = \frac{1}{\alpha p}[(j-1)r - (i-1)s]\sigma_{j+i-2}^{r+s-p}, \quad (45)$$

式中 α 是常数, p 是一固定的整数, 且 $\sigma_i^r \equiv \sigma_i[(1/\alpha) \times t^{r/p}]$. 然而, 在 (45) 式中, 若取 $r = s = p$, $\alpha = 1$, 且 $i = j = 2p = 2$, 则 (45) 式成为本文已讨论过的第一类和第三类 Virasoro 代数.

(vii) 第三类 W_∞ 代数是第二类和第三类 Virasoro 代数的推广, 可表示为

$$[\sigma_i^r, \sigma_j^s] = \frac{1}{\alpha p}(r-s)\sigma_{i+j}^{r+s-p} + \frac{1}{\alpha}(i-j)\sigma_{i+j}^{r+s}, \quad (46)$$

式中 $\sigma_i^r \equiv \sigma_2(t^{r/p} \exp it)$. 当 $r = s = 0$ 或 $i = j = 0$, $p = 1$ 时, (46) 式将退化为第二类和第三类 Virasoro 代数.

5 结论与讨论

本文首先将形式级数推广应用到了高维的一般差分微分体系, 对一类相当一般的差分微分方程给出了一族形式级数对称, 然后将一般的形式级数理论应用于 (2+1) 维离散型 Toda 方程, 得到了二族无穷多截断对称 $\sigma_i^t(n, f(t))$, $\sigma_i^x(n, f(x))$, 且每一族广义对称都构成一种广义的 W_∞ 代数. 文献 [10] 给出的对称代数, 三种类型的 Virasoro 代数和三类 W_∞ 代数均为广义 W_∞ 代数的子代数.

本文采用的所谓形式级数对称理论能够容易地推广到能用线性或非线性差分微分方程描述的各种线性和非线性的物理问题. 在高维的情况下, 这个方法不仅适用于各种可积体系, 也可以适用于不可积体系. 然而这个方法是否可进一步推广给出一个可积模型的全部对称性, 还未得到圆满的解决. 如方程 (1) 具有分离不变性: $n \rightarrow n + m$, m 是任意整数, 而这个分立对称性尚未包含于 σ^t 和 σ^x 中.

随着理论研究的不断深入, W_∞ 代数在物理学中的作用愈来愈显得重要, 特别地它在

弦理论、共形场论、自对偶引力理论、膜理论、凝聚态物理、量子场论等研究中得到了广泛的应用. 因此, 本文给出的广义 W_∞ 对称代数是否可以在这些领域得到广泛应用是值得进一步研究的.

- [1] S-y Lou, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 4099.
- [2] S-y Lou, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**(1993), 4387; S-y Lou and J. Lin, *Phys. Lett.*, **A185**(1994), 29.
- [3] S-y Lou, *J. Math. Phys.*, **35**(1994), 1755.
- [4] S-y Lou, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**(1994), 3235.
- [5] A. V. Mikhailov, *Pisma. Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **77**(1978), 24.
- [6] A. P. Fordy and J. Gibbons, *Commun. Math. Phys.*, **77**(1980), 2.
- [7] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981).
- [8] F. Calogero and A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons* (North Holland, Amsterdam, 1982).
- [9] J. Villarroel and M. J. Ablowitz, *Phys. Lett.*, **A163**(1992), 293.
- [10] D. Levi and P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **34**(1993), 3713.
- [11] B. Fuchssteiner, *Prog. Theor. Phys.*, **70**(1983), 1508; **65**(1981), 861; *Theory Method Analysis*, **3**(1979)849; A. S. Fokas and B. Fuchssteiner, *Phys. Lett.*, **A86**(1981)341.
- [12] J. Avan, *Phys. Lett.*, **A168**(1992)363.

SYMMETRIES OF THE $(2+1)$ DIMENSIONAL DISCRETE Toda EQUATION

QIAN XIAN-MIN

(Department of Physics, Shaoxing Normal College, Shaoxing 312000)

LOU SEN-YUE

(Fudan T. D. Lee Physics Laboratory, Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433;

Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo 315211)

(Received 7 April 1994)

ABSTRACT

We extend the formal series symmetry theory proposed in Refs. [1—4] to the $(2+1)$ dimensional discrete Toda equation. Two sets of infinitely many symmetries of this equation are found. Every one set of symmetries constitute a generalized W_∞ algebra which contains the usual W_∞ algebra as its subalgebra.

PACC: 0220; 1110; 1130; 0304K