第 45 卷 第 5 期 1996 年 5 月
1000-3290/96/45(05)/0796-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 45, No. 5, May, 1996

微扰法求解非线性驻波问题*

马大猷
(中国科学院声学研究所,北京 100080)
(1995 年 2 月 22 日收到;1995 年 5 月 16 日收到修改稿)

在历史上,用微扰法求解非线性驻波是不成功的.本文对此进行了分析,认为微扰法给出的一次解是基本解,决定了驻波的基本波形.二次以上的解是由于非线性对波形的影响,使驻波波形上各点随时间运动稍加变动,因此对二次以上的微量只应保留其时间微商.这样所得解不但是稳定的,并且与根据波动方程的严格解基本相同.

PACC: 4325

1 引 言

微扰法,或逐步求近法,对于求解一与某可解问题相似的问题是有力的方法[1],非线性驻波就是这样一个问题,它的波动方程只比线性波动方程多一个非线性项,边界条件完全相同.非线性驻波的波动方程早已在上一世纪中叶列出[2],但一直未能得解.1948 年,Eckart 把微扰法引入声学研究[3]后,声学家都认为这是非线性驻波问题突破的机会,因而闭管中声共振的研究受到广泛的注意,取得大量成果,但用微扰法求得的理论式却是不稳定的[4].驻波管是一个简单的稳定系统,怎么会得到非稳定的解呢?这个问题一直存在到最近.现在我们已得到波动方程的非线性驻波严格解[5],再回头审查过去微扰法导致非稳定解的问题,因而求得正确结果是有意义的.本文目的就是探讨如何正确使用微扰法的问题.

2 理 论

为了使用微扰法方便起见,采用 Lagrange 坐标系统,在闭管中,a 为质点的初始坐标,其在运动中的位置为 $x=a+\xi$,ξ 为质点位移.x 为 Euler 坐标系统,两种坐标系统虽有不同,在一般问题中,两种坐标系统所得结果完全相同.用 Lagrange 坐标系统时,连续性方程为 $\rho\mathrm{d}x=\rho_0\mathrm{d}a$.利用上述关系可得

$$\rho(1+\xi_a)=\rho_0. \tag{1}$$

动量方程则为

$$\rho_0\xi_{tt}+p_a=0, \tag{2}$$

---

*国家自然科学基金资助的课题.

式中 ρ 为空气密度, ρ_0 为其静态值, p 为声压, 下角标 t, a 分别表示对时间和空间坐标的微商. 绝热物态方程可写成

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = (1 + \xi_a)^{-\gamma}, \tag{1a}$$

式中 P 为瞬时压力, P_0 为其静态值或平均值, 对 a 微分,

$$\frac{p_a}{P_0} = -\gamma(1 + \xi_a)^{-(\gamma+1)}\xi_{aa}.$$

知 $c_0^2 = \gamma P_0/\rho_0$, 可得

$$p_a = -\rho_0 c_0^2(1 + \xi_a)^{-(\gamma+1)}\xi_{aa}, \tag{3}$$

代入(2)式, 展开级数, 并移项, 得

$$\xi_{tt} - c_0^2\xi_{aa} = -(\gamma + 1)c_0^2\left(\xi_a - \frac{1}{2}(\gamma + 2)\xi_a^2 + \cdots\right)\xi_{aa},$$

对时间微分, 得质点速度 u 的波动方程

$$u_{tt} - c_0^2 u_{aa} = -(\gamma + 1)c_0^2\left[\left(\xi_a - \frac{1}{2}(\gamma + 2)\xi_a^2 + \frac{1}{2\cdot 3}(\gamma + 2)(\gamma + 3)\xi_a^3 + \cdots\right)\xi_{aa}\right]_t. \tag{4}$$

这个式子没有严格解, 现使用微扰法. 取微扰级数

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \cdots, \tag{5}$$

u 为各次微量之和, 位移 ξ 和声压 p 也可用相似形式表达. 把(5)式代入(4)式, 使两边同次微量相等即得各次微量的式子. 一次近似式为

$$u_{tt}^{(1)} - c_0^2 u_{aa}^{(1)} = 0, \tag{6}$$

取简谐解,

$$u^{(1)} = u_0 \sin \omega t \sin ka, \tag{7}$$

质点位移

$$\xi^{(1)} = -\frac{u_0}{\omega}\cos \omega t \sin ka, \tag{8}$$

$k = \omega/c_0$ 为波数. 在闭管两端, 质点振动速度 u 和位移 ξ 都为零, 因此

$$\sin kL = 0, \tag{9}$$

L 为管长. 这些就是线性声学中的驻波解, 完全正确. 但二次量的解就费考虑了. 直接按一般数学处理方法, (4)式的二次微量方程为

$$u_{tt}^{(2)} - c_0^2 u_{aa}^{(2)} = -(\gamma + 1)c_0^2[\xi_a^{(1)}\xi_{aa}^{(1)}]_t, \tag{10}$$

由(8)式, 知

$$\xi_a^{(1)} = -\frac{u_0}{c_0}\cos \omega t \cos ka \tag{11}$$

和

$$\xi_{aa}^{(1)} = \frac{u_0}{c_0}k \cos \omega t \sin ka, \tag{12}$$

代入(10)式, 得

$$u_{tt}^{(2)} - c_0^2 u_{aa}^{(2)} = -\frac{1}{2}(\gamma+1)\omega^2 \frac{u_0^2}{c_0}\sin 2\omega t \cdot \sin 2ka, \tag{13}$$

积分,得[6]

$$u^{(2)} = \frac{\gamma+1}{8}\frac{u_0^2}{c_0}\cos 2\omega t \cdot \omega t \cdot \sin 2ka, \tag{14}$$

数学是严格的,但驻波管是一个简单的稳定系统,为何得到非稳定解,$u^{(2)}$随时间无穷增加?有人解释[6],流体动力方程(1)和(2)可以由统计力学导出,为其某种近似,因而也有统计性质,驻波管系统迟早是会稳定的,但一时可能有变化,解(14)式是正确的,但只适用于短时间内.另一个意见[7]是可假设一、二次项之间没有相互作用,因而二倍基频以上的共振不被激发,(13)式中只应保留与时间无关的项,解就不会是像(14)式的非稳定式了.此外还有其他尝试.

在准确理论[5]的启示下,可发现问题是出在(13)式上.前面已提到一次解就等同于线性声学解,因而是驻波的基本解,代表驻波的基本波形.驻波的波形与行波的波形不同,它在空间不移动(传播),而只在本地变化.波动方程中的非线性项只能使各点的变化有所改变,高次解,$u^{(2)}$, $u^{(3)}$, …就是这种改变的反映,因而不考虑它们的空间微商.(13)式应写为

$$u_{tt} = -\frac{1}{2}(\gamma+1)\omega^2\frac{u_0^2}{c_0}\sin 2\omega t \cdot \sin 2ka, \tag{13a}$$

积分,得

$$u^{(2)} = \frac{\gamma+1}{8}\frac{u_0^2}{c_0}\sin 2\omega t \cdot \sin 2ka, \tag{14a}$$

和直接波动方程所得准确式[5]完全相同.从而非稳定的问题根本就不存在了.所以前人得到非稳定解,原因是未正确处理驻波现象.把不考虑高次微量的空间微商的概念推广到整个波动方程,即了解高次微量是驻波上各点的运动由于非线性因素而产生的增量或修正,可求得一般公式.首先把(1a)式改写为

$$\frac{P}{P_0} = (1 + \xi_a^{(1)})^{-\gamma}.$$

声压即为

$$p = P - P_0 = -\gamma P_0\left(\xi_a^{(1)} - \frac{\gamma+1}{2}(\xi_a^{(1)})^2 + \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2\cdot 3}(\xi_a^{(1)})^3 + \cdots\right).$$

把(11)式代入,注意小信号声速 $c_0^2 = \gamma P_0/\rho_0$,并令 $p_0 = \rho_0, c_0 u_0$,可得

$$p = p_0\cos\omega t\cos kx + \frac{\gamma+1}{2}\frac{p_0^2}{\gamma P_0}\cos^2\omega t\cos^2 kx + \cdots, \tag{15}$$

式中各项即为声压的各阶微量,其一般项为

$$p^{(n)} = \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)}{n!}\frac{p_0^n}{(\gamma P_0)^{n-1}}\cos^n\omega t\cos^n kx. \tag{16}$$

知

$$\cos^n\theta = 2^{-(n-1)}\left(\cos n\theta + n\cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{2}\cos(n-4)\theta\right.$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-m-1)}{m!}\cos(n-2m)\theta), \tag{17}$$

式中 $n-2m=2$(n 为偶数)或 1(n 为奇数),因是用于声场表示,常数项已略去.把(17)式代入(15)式,就可把 p 表示为谐波关系.

根据(2)式,质点速度应满足

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{\rho_0}p_a \\ &= -c_0^2\left(\xi_a^{(1)}-\frac{\gamma+1}{2}(\xi_a^{(1)})^2+\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2\cdot 3}(\xi_a^{(1)})^3+\cdots\right)_a, \end{aligned}$$

其 n 次项为

$$u_t^{(n)}=\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)}{(n-1)!}\omega\frac{u_0^n}{c_0^{n-1}}\cos^n\omega t\cos^{n-1}kx\sin kx,$$

对时间积分,应用(17)式,可得

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(n)} = &\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)}{(n-1)!}\frac{u_o^n}{c_0^{n-1}}2^{-2(n-1)}\left(\sin n\omega t+\frac{n^2}{n-2}\sin(n-2)\omega t\right. \\ &+\left.\frac{n^2(n-1)}{2(n-4)}\sin(n-4)\omega t+\cdots\right)(\sin nkx+(n-2)\sin(n-2)kx \\ &+\frac{(n-1)(n-4)}{2}\sin(n-4)kx+\cdots). \end{aligned} \tag{18}$$

根据(18)式可求出质点速度 u 值中频率相同的谐波值.为了避免繁复,可简单写出基波

$$\begin{aligned} u_1 = u_0\sin\omega t[&\sin kx+\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{3!}\frac{u_0^2}{c_0^2}2^{-4}(\sin 3kx+\sin kx) \\ &+\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)}{5!}\frac{u_0^4}{c_0^4}2^{-8}(\sin 5kx+3\sin 3kx \\ &+2\sin kx)+\cdots], \end{aligned} \tag{19}$$

式中方括号内第一项来自 $u^{(1)}$,第二项来自 $u^{(3)}$,第三项来自 $u^{(5)}$,等等.项数虽然很多,但还是以第一项为主,后面各项按 u_0^2/c_0^2 比例递减,因而都很小.各次谐波项与此相似.以上所求得的质点速度,虽然所用坐标系统不同,与严格解[5]基本相同.

但声压却不是如此,(16)式的二次项:

$$p_2^{(2)}=\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_0^2}{\gamma P_0}\cos^2\omega t\cdot\cos^2 kx$$

就比严格式[5]少一个因数 3/2.可以证明,在 Lagrange 坐标系统求得的声压(15)式(写作 $p(L)$)基本与 Euler 坐标系统中的 $\rho_0c_0\lambda$ 相当.而在后者中,ρc 是随 p 变化的.如果代入 Euler 系统中的声压 $p(E)$ 与 λ 的关系[5],可得

$$p=P_0\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{p(L)}{P_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}-1\right], \tag{20}$$

就基本相同了.以上用“基本相同”字样是指主要部分相同,次要项由于所用近似方法不同,有些差别.

3 结 论

本文审查了过去使用微扰法求解非线性驻波时得到不稳定二次解的问题，发现其原因在求二次解时忽略了驻波的性质．一次解是驻波的基本解，决定了驻波的波形．驻波是不传播的，二次解以及更高次解只能给出驻波波形上各点随时间的运动因非线性而产生的改变．因此对于高次微量只能保留其时间微商而不考虑其空间微商．这样得到的解不但没有不稳定的问题，而且与波动方程的严格解基本相同．一般情况，使用 Lagrange 坐标系统和用 Euler 坐标系统，虽然所讨论的运动着的质点所用位置不同（相差质点位移），但结果是相同的，这里驻波也是一例．这个关系不能过于推广，例如从本文结果再推出非线性声压就是错误的．在 Lagrange 坐标系统，即在质点开始运动的位置上，声压和质点速度的关系（见方程(2)）与线性声学中完全相同．而在 Euler 坐标系统，即在质点运动时的实际位置上，则要受非线性的影响，二者不可能求出相同的结果．把 Lagrange 系统中求得的 p 看作 Eluer 系统中的 $\lambda\rho_0c_0$，再求声压，所得结果就基本相同了．

由此可以得到结论，在解物理问题中使用数学工具时，必须注意物理意义，并且在全过程中，毫不松懈地注意物理意义，否则可能发生错误．

[1] P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics (McGraw - Hill, 1953), PP. 999 - 1170.

[2] S. Earnshow, *Phil. Trans. Roy. Soc.* (*London*), **150**(1866), 133; B. Riemann, *Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaft zu Goettingen*, *Mathematische Physikalische Klasse*, **8**(1858 - 59), 43.

[3] C. Eckart, *Phys. Rev.*, **73**(1948), 68.

[4] 马大猷，声学学报，**13**(1990), 354.

[5] 马大猷，声学学报，**19**(1994), 161.

[6] 例如，见 O. V. Rudenko and S. I. Soluyan, Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics (Plenum, 1977) pp. 120—130.

[7] P. J. Westervelt, *J. Acoust. Soc. Am.*, **22**(1950), 319.

PERTURBATION METHOD IN THE SOLUTION OF NONLINEAR STANDING WAVES

MA DA - YOU (MAA DAH - YOU)

(*Institute of Acoustics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

(Received 22 February 1995; revised manuscript received 16 May 1995)

ABSTRACT

In the history, perturbation method was unsuccessful in the solution of nonlinear standing waves. This problem is reviewed. It is apparent that the first order solution of the wave equation for standing wave by the perturbation method gives the basic solution, determining the basic wave form of the standing wave. The second and higher order solutions modify the time - dependent motion of the particle at different points on the wave form due to the nonlinearity, and hence only the time derivatives of the higher order quantities should be preserved. The results thus obtained are stable and essentially agree to the exact solution of the wave equation.

PACC: 4325