

动力系统的时序列重构分析*

杨志安¹⁾ 陈式刚^{1,2)} 王光瑞^{1,2,3)}

1) (中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 100088)

2) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

3) (中国科学院国际材料物理中心, 沈阳 110015)

(1995 年 4 月 3 日收到)

利用延迟重构变换的雅可比行列式, 分析了常微方程系统重构的拓扑性质. 指出重构的嵌入性质除与重构维数有关之外, 还依赖于延迟时间的选择, 依赖于重构变量本身的条件稳定性. 利用条件 Lyapunov 指数分析了重构变量本身对重构的影响. 提出了从时间序列计算雅可比行列式的方法, 并以 Rössler 系统为例进行了讨论.

PACC: 0540

1 引 言

时间序列分析的一个重要内容, 是由实验数据重构相空间, 这是研究实际系统动力学行为的一个重要工具. 为了反映原系统的动力学性质和几何性质, 必须要求重构变换是嵌入. 以前的工作主要集中在确定重构空间维数 d_E 和延迟时间 T 方面. Takens^[1] 定理给出了嵌入的充分条件: $d_E \geq 2d_A + 1$, d_A 是原吸引子的维数. Takens 定理只给出了满足嵌入的充分条件, 是否在更低的维数上满足嵌入要求, 是一个有实际意义的问题. 这个问题与重构的另一个重要参数: 延迟时间 T 又有着密切关系. 目前已有许多方法选择延迟时间^[2-4]. 通常的方法往往把原来的 $d(\geq 3)$ 维系统看作二维重构来研究, 而且没有考虑嵌入要求, 这不能完整地反映出原系统的动力学性质和几何性质. 在小于 $2d_A + 1$ 的情况下重构时, 延迟时间对嵌入性质有什么影响, 这一问题以往很少有人研究. 本文将证明, 如果 T 选择不当, 会改变重构的拓扑性质.

延迟重构中还有一个重要问题, 是如何选择“好”的重构变量. 在实际的复杂系统中, 往往有多个可测量变量, 用哪个变量进行延迟重构更经济且如实地反映原系统的行为, 这一问题目前很少有人讨论. 本文研究了不同变量对重构的影响, 发现条件 Lyapunov 指数可用来衡量变量的“好坏”.

本文从已知方程的动力系统出发, 计算了系统中各变量延迟重构变换的雅可比行列式, 以雅可比行列式是否为零作为判定重构变换是否为嵌入的判据, 用来研究上述因素对重构拓扑性质的影响.

* 国家基础性研究重大项目“非线性科学”和国家自然科学基金、地震科学联合基金及中国工程物理研究院基金资助的课题.

为在实际时间序列重构中利用已有的结果,我们提出了从时间序列本身计算雅可比行列式的方法,用于确定重构参数.

2 雅可比行列式的计算

考虑 3 个变量的自治方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z), \frac{dy}{dt} = g(x, y, z), \frac{dz}{dt} = h(x, y, z). \quad (1)$$

方程组(1)定义于 3 维区域中,设等号右边函数足够光滑.解方程组(1),舍去过渡过程,得到各变量的时间序列 $(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, n$. 先讨论 x 变量. 设延迟时间为 T , 重构矢量为 $(x(t), x(t+T), x(t+2T)) \equiv (x, x(T), x(2T))$, 重构变换为 $(x, y, z) \mapsto (x, x(T), x(2T))$, 变换的雅可比行列式为

$$J_x(x, y, z; T) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 & \frac{\partial x}{\partial y} = 0 & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x(T)}{\partial x} & \frac{\partial x(T)}{\partial y} & \frac{\partial x(T)}{\partial z} \\ \frac{\partial x(2T)}{\partial x} & \frac{\partial x(2T)}{\partial y} & \frac{\partial x(2T)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(T)}{\partial y} & \frac{\partial x(T)}{\partial z} \\ \frac{\partial x(2T)}{\partial y} & \frac{\partial x(2T)}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

设 $J_x(x, y, z; T)$ 为连续函数. $J_x(x, y, z; T)$ 是否等于零, 作为判定重构变换拓扑是否改变的判据.

数值计算(2)式时,需求解方程组(1)及其线性化方程组. 将(2)式写成

$$J_x(x, y, z; T) = \begin{vmatrix} \frac{\delta x(T)}{\delta y} & \frac{\delta x(T)}{\delta z} \\ \frac{\delta x(2T)}{\delta y} & \frac{\delta x(2T)}{\delta z} \end{vmatrix},$$

其中 $\delta x(T)$ 和 $\delta x(2T)$ 是(1)式的线性化方程组

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z, \\ \frac{d\delta y}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial z} \delta z, \\ \frac{d\delta z}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial x} \delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \delta y + \frac{\partial h}{\partial z} \delta z \end{aligned} \quad (3)$$

的解, δ 表示对初值的变分. 为便于计算,取初值 $\delta y(0) = 1, \delta x(0) = \delta z(0) = 0$ 时,得行列式元 $\frac{\delta x(T)}{\delta y} = \delta x(T) \big|_{\delta y(0)=1}$ 和 $\frac{\delta x(2T)}{\delta y} = \delta x(2T) \big|_{\delta y(0)=1}$; 再取初值 $\delta x(0) = \delta y(0) = 0, \delta z(0) = 1$, 得行列式元 $\frac{\delta x(T)}{\delta z} = \delta x(T) \big|_{\delta z(0)=1}$ 和 $\frac{\delta x(2T)}{\delta z} = \delta x(2T) \big|_{\delta z(0)=1}$, 因此有

$$J_x(x, y, z; T) = \begin{vmatrix} \delta x(T) \big|_{\delta y(0)=1} & \delta x(T) \big|_{\delta z(0)=1} \\ \delta x(2T) \big|_{\delta y(0)=1} & \delta x(2T) \big|_{\delta z(0)=1} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

为计算行列式(4)中的元素,以吸引子上某点 (x, y, z) 作为方程组(1)的初值,以 Δt 作为共同步长,联立求解方程组(1)和方程组(3).求解过程中方程组(1)不断给方程组(3)提供 (x, y, z) 值,从方程组(3)可解出 $\delta x(T)|_{\delta y(0)=1}$, $\delta x(2T)|_{\delta y(0)=1}$ 和 $\delta x(T)|_{\delta z(0)=1}$, $\delta x(2T)|_{\delta z(0)=1}$, 将结果代入(4)式,得到在 (x, y, z) 点的雅可比行列式 $J_x(x, y, z; T)$.

$J_x(x, y, z; T)$ 是个局域量,随空间的点变化.为反映出吸引子重构的整体行为,在相空间上对 $J_x(x, y, z; T)$ 取平均.从吸引子上等时间间隔地选取 N 个点 (x_l, y_l, z_l) , $l = 1, 2, \dots, N$, 作为方程组(1)的 N 个初值,计算出 N 个(4)式后,再取算术平均和绝对值平均

$$\langle J_x(T) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N J_x(x_l, y_l, z_l; T), \quad (5)$$

$$\langle |J_x(T)| \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N |J_x(x_l, y_l, z_l; T)|, \quad (6)$$

式中 $|\cdot|$ 表示取绝对值, $\langle \cdot \rangle$ 表示求平均.为严格地描述重构的拓扑变化,定义函数

$$S_x(T) = \frac{\langle |J_x(T)| \rangle - \langle J_x(T) \rangle}{\langle |J_x(T)| \rangle}, \quad (7)$$

函数 $\langle J_x \rangle$, $\langle |J_x| \rangle$ 和 $S_x(T)$ 描述了重构变换的整体行为:当 $\langle |J_x| \rangle \neq 0$ 并 $S_x = 0$ 时,重构是嵌入,重构好;当 $\langle J_x \rangle \neq 0$ 并 $S_x \neq 0$ 时,重构的拓扑改变,重构差;当 $\langle |J_x| \rangle = 0$ 时,不能进行重构.

对方程组(1)中的 y 变量和 z 变量的时间序列作同样讨论,相应地可求出与式(5)~(7)类似的函数 $\langle J_y(T) \rangle$, $\langle |J_y(T)| \rangle$, $S_y(T)$ 和 $\langle J_z(T) \rangle$, $\langle |J_z(T)| \rangle$, $S_z(T)$. 本文的任务是从数值上计算出这些函数,利用它们去分析各变量的时间序列在重构中的拓扑性质.

3 数值结果与分析

以 Rössler 方程

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + (x - c)z \quad (8)$$

为例进行讨论,式中参数 $a = 0.15$, $b = 0.20$, $c = 10.0$; 初条件 $x(0) = 10$, $y(0) = z(0) = 0$; 时间步长为 $\Delta t = \frac{\pi}{100} \approx 0.0314$, 以 $193.3\Delta t$ 作为平均轨道时间单位 orbit. 积分时舍去前面 2×10^3 步过渡过程,积分出 8×10^4 个点的吸引子,作出 (x, y, z) 空间相图(见图1). 方程组(8)的线性化方程为

$$\frac{d\delta x}{dt} = -\delta y - \delta z, \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta x + a\delta y, \quad \frac{d\delta z}{dt} = z\delta x + (x - c)\delta z. \quad (9)$$

3.1 x 变量计算

方程组(9)的初条件取 $\delta y(0) = 1$, $\delta x(0) = \delta z(0) = 0$ 和 $\delta x(0) = \delta y(0) = 0$,

$\delta z(0) = 1$. 又在 8×10^4 个点的吸引子上, 每隔 40 步取一个点, 共取 $N = 2 \times 10^3$ 个点, 作为方程组(8)的初值, 与(9)式联立求解, 计算出 $J_x(x_l, y_l, z_l; T)$, $l = 1, 2, \dots, 2000$, 代入(5)–(7)式, 最后计算出函数 $\langle J_x(T) \rangle$, $\langle |J_x(T)| \rangle$ 和 $S_x(T)$. 图 2(a)中曲线(1), (2), (3)分别为 $\langle |J_x| \rangle - T$, $\langle |J_x| \rangle - T$ 和 $S_x - T$ 曲线. 从图 2(a)可见, 对任意的延迟时间 T , 都有 $|\langle J_x \rangle| < \langle |J_x| \rangle$ 和 $S_x(T) \neq 0$, 表明系统中总存在

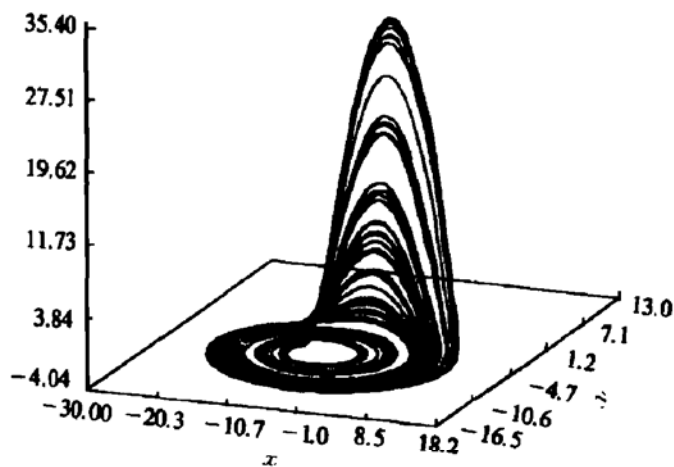
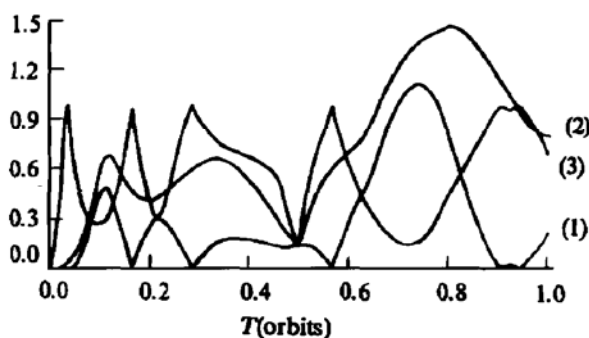


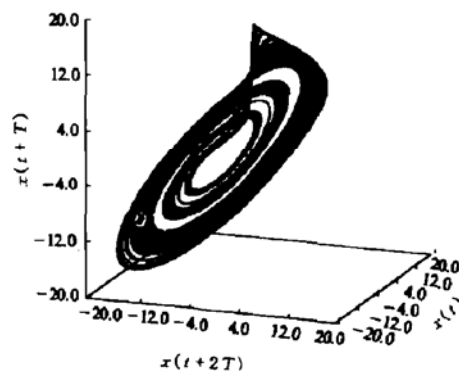
图 1 Rössler 吸引子 (x, y, z) 空间相图

一些点, 使 $J_x(x, y, z; T) = 0$, 改变了重构的拓扑. 这种奇异性是由于重构吸引子的轨道在相空间中相交, 将原空间中不同的两个点压缩成一个点, 使重构不是嵌入.

Rössler 系统提供了 3 个独立坐标, 而这里 x 变量的 3 维重构却不是嵌入. 为分析其原因, 先引入条件 Lyapunov 指数的概念. 考虑动力系统中的一个子系统, 不属于这个子系统的变量求导时都看成是常数, 这个子系统的 Lyapunov 指数就是条件 Lyapunov 指数, 详见文献[5]. x 变量的条件 Lyapunov 指数为零, 对应的 (y, z) 子系统有一个恒正的条件 Lyapunov 指数 ($\lambda_{(y,z)} = a > 0$), 即 (y, z) 子系统不稳定. 因而用 x 变量进行 3 维重构, 不能完全反映出 (y, z) 子系统的相关动力学行为, 做不到嵌入. 图 2(b)绘出 x 变量重构图, 延迟时间选 $T = 0.119$ (orbits), 取自 $\langle J_x \rangle$ 的第 1 极大处的值.



(a) $\langle |J_x| \rangle$, $\langle |J_x| \rangle$ 和 $S_x(T)$ 函数图 (1) 为 $\langle |J_x| \rangle$; (2) 为 $\langle |J_x| \rangle$; (3) 为 S_x



(b) x 变量重构图 $T = 0.119$ (orbits)

图 2

因 x 变量在 3 维重构时不是嵌入, 有必要考察 4 维重构的行为. 这时重构变换为 $(x, y, z) \rightarrow (x, x(T), x(2T), x(3T))$, 变换的所有可能的雅可比行列式为

$$J_1 = \frac{\partial(x, x(T), x(2T))}{\partial(x, y, z)}, \quad J_2 = \frac{\partial(x, x(T), x(3T))}{\partial(x, y, z)},$$

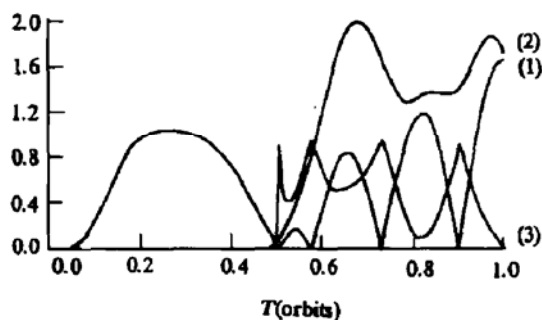
$$J_3 = \frac{\partial(x, x(2T), x(3T))}{\partial(x, y, z)}, \quad J_4 = \frac{\partial(x(T), x(2T), x(3T))}{\partial(x, y, z)},$$

其中 J_1 就是(2)式. 取 $T = 0.119$ (orbits), 在 2×10^4 个点的吸引子上找到了 280 个点使 $J_1 = 0$, 将这 280 个点分别代入 J_2 和 J_3 , 得出 $J_2 \neq 0$, 但仍有 40 个点使 $J_3 = 0$, 再将这 40 个点代入 J_4 , 得到 $J_4 \neq 0$. 当 $J_2 \neq 0$ 时, 表示 4 维重构已是嵌入, 对 J_3 和 J_4 的计算是为了确证这一结果, 即 Rössler 吸引子的 x 变量在 4 维重构时是嵌入.

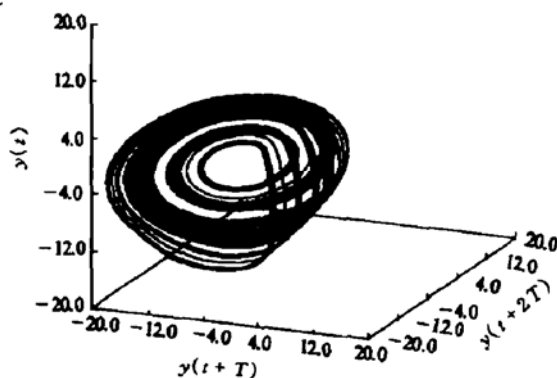
3.2 y 变量计算

y 变量的时间序列计算得到 $|\langle J_y(T) \rangle|$, $\langle |J_y(T)| \rangle$ 和 $S_y(T)$ 函数, 图 3(a) 中绘出它们的曲线. 利用图 3(a) 和数值分析发现, 在 T 的区间 $(0, 0.190)$ 内外, 重构的拓扑性质不同. 当 $T \leq 0.190$ (orbits) 时, $S_y = 0$, 重构是嵌入; 当延迟时间选得不合适, 使 $T > 0.190$ (orbits) 时, 重构不再是嵌入. 以前以为 T 的不同只改变图形的形状, 不会影响重构的拓扑, 这种看法似不全面.

用 $T = 0.190$ (orbits) 重构的吸引子见图 3(b), 这时 $|\langle J_y \rangle| = \langle |J_y| \rangle = 0.95$, 尽管重构是嵌入, 但吸引子的伸展范围还不是极大. 当 $\langle |J_y| \rangle = 1.08$ 时, 重构的吸引子在空间伸展范围首次达到最大, 延迟时间 $T = 0.275$ (orbits) > 0.190 (orbits), 处于嵌入区之外, 重构不是嵌入. 在以往的时间序列分析中, 往往以重构图形在空间伸展到第 1 极大作为判据, 来确定延迟时间. 现在看来, 这不一定是一个好的选择标准, 因它不能保证重构是嵌入. 因此在实际的时间序列重构时, 确定延迟时间上要格外谨慎, 以避免选择不当, 引起重构拓扑的改变.



(a) $|\langle J_y \rangle|$, $\langle |J_y| \rangle$, S_y 函数图 (1) 为 $|\langle J_y \rangle|$; (2) 为 $\langle |J_y| \rangle$; (3) 为 S_y



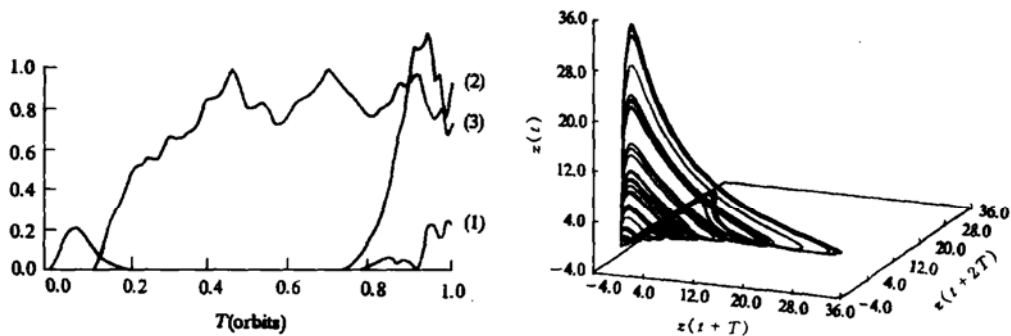
(b) y 变量重构图 $T = 0.190$ (orbits)

图 3

y 变量 3 维重构可以是嵌入, 这也可从 y 变量的条件稳定性得到验证. y 变量的条件 Lyapunov 指数为正 ($\lambda_y = a > 0$), 它含有系统的不稳定性质. 与 y 变量对应的子系统 (x, z) 的条件 Lyapunov 指数为负^[5], (x, z) 是稳定的子系统. 所以 y 变量能反映出整个 Rössler 系统的行为, 在最低的 3 维空间重构就可作到嵌入.

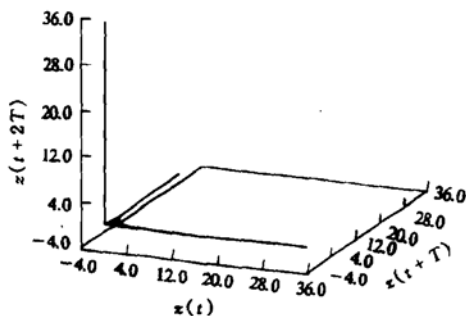
3.3 Rössler 系统的 z 变量

计算出 $| \langle J_z \rangle |$, $\langle |J_z| \rangle$ 和 S_z 曲线, 见图 4(a). 图 4(a) 中 $S_z(T) = 0$ 的区间为 $(0, 0.11)$, $\langle |J_z| \rangle$ 的第 1 极大点 $T = 0.08$ (orbits) 处于这个嵌入区内. 用 $T = 0.08$ (orbits) 重构, 可使吸引子在空间伸展到最大, 同时又是嵌入, 重构图见图 4(b). 从图 4(a) 又看到, 在区间 $(0.2, 0.7)$ 内, 有 $\langle |J_z| \rangle \approx 0$, 同时 S_z 很大, 说明在这个区间上不能进行重构. 图 4(c) 是取这个区间内某点 $T = 0.56$ (orbits) 重构的吸引子. 这个结果表明, T 的选择不合适时, 不仅会改变重构的拓扑, 甚至会破坏整个吸引子的重构.



(a) $| \langle J_z \rangle |$, $\langle |J_z| \rangle$, S_z 函数图 (1) 为 $| \langle J_z \rangle |$; (2) 为 $\langle |J_z| \rangle$; (3) 为 S_z

(b) z 变量重构图 $T = 0.08$ (orbits)



(c) z 变量重构图 $T = 0.56$ (orbits)

图 4

z 变量的条件 Lyapunov 指数为负 ($\lambda_z \doteq -c < 0$), z 变量稳定. 与 z 变量对应的 (x, y) 子系统有两个正的条件 Lyapunov 指数^[5] ($\lambda_{1(x,y)} \approx \lambda_{2(x,y)} \approx \frac{a}{2} > 0$), 表示 (x, y) 子系统不稳定. z 变量的时间序列演化行为以耗散为主, 使重构出的吸引子大部分挤压在体元为零的子空间上; 当延迟时间选在嵌入区内时, 重构的吸引子基本上分布在 $(z, z(T))$ 平面和 $(z(T), z(2T))$ 平面上 (见图 4(b)), 尽管这时是嵌入, 已失掉了原吸引子的许多性质; 在嵌入区外的一个很大区间上, 重构结果都几乎缩成了 3 个一维的线段

(见图 4(c)), 重构失败. 可见 z 变量也不是一个很好的变量.

4 讨 论

本文利用重构变换的雅可比行列式, 分析了影响重构拓扑性质的因素, 得到以下结果:

1. 重构的拓扑性质与重构变量本身的“好坏”有关. 用同一方程中不同变量的时间序列重构, 重构出的结果截然不同, 表明不同变量在系统中不是平权的. 发现重构变量的“好坏”可用条件 Lyapunov 指数来判定: Lyapunov 指数为正的变量包含了系统中的不稳定性质, 因而更能完整地反映出系统的行为, 重构时在较低的维数上就可作到嵌入, 这样的变量对延迟重构而言是“好”变量; 而条件 Lyapunov 指数非正的变量不是好变量, 在确定重构参数时要格外谨慎.

2. 重构的拓扑性质与重构参数有关, 这里主要强调与延迟时间有关. 当 T 选得合适, 重构是嵌入; 当 T 选在嵌入区之外时, 改变了重构的拓扑, 甚至不能重构.

上述这些因素, 在以前的时间序列分析方法中很少讨论, 所以未注意到它们也会改变重构的拓扑性质. 本文提醒人们在实际的时间序列重构中, 慎重处理它们, 以获得满意的重构结果.

以上我们借助已知的动力系统, 利用重构变换的雅可比行列式分析了重构的嵌入行为, 这样讨论能更简单更全面地搞清楚重构过程中的拓扑变化情况. 应该指出的是, 在无方程的情况下, 仍可利用已有的雅可比行列式的方法, 从实验数据分析重构的拓扑行为. 下面作一简要介绍.

不失一般性, 设原系统有 3 个变量 (x, y, z) , 以 x 变量为例讨论. 又设有两个重构子空间 $(x, x(T), x(2T))$ 和 $(x(iT), x(jT), x(kT))$, $0 \leq i < j < k \leq 2d_A$. 重构变换为 $(x, y, z) \mapsto (x, x(T), x(2T))$ 和 $(x, y, z) \mapsto (x(iT), x(jT), x(kT))$, 对应的雅可比行列式为

$$J_I = \frac{\partial(x, x(T), x(2T))}{\partial(x, y, z)}, \quad J_{II} = \frac{\partial(x(iT), x(jT), x(kT))}{\partial(x, y, z)}.$$

对实际系统, (y, z) 未知, 再考虑两个重构子空间的变换: $(x, x(T), x(2T)) \mapsto (x(iT), x(jT), x(kT))$, 这个变换的雅可比行列式为

$$J^* = J_I^{-1} \cdot J_{II} = \frac{\partial(x(iT), x(jT), x(kT))}{\partial(x, x(T), x(2T))}. \quad (10)$$

J^* 含有 J_I 和 J_{II} 的信息, 当 $J_I \neq 0$, 重构是嵌入, J^* 有限, 当 $J_I = 0$, 重构不是嵌入, J^* 发散. 所以利用 J^* 可分析重构的拓扑性质.

无方程时, (10) 式中的微分不能直接计算, 应改变 J^* 的表述形式. 设 $V(T)$ 是空间 $(x, x(T), x(2T))$ 中的一个小体积, $V'(T)$ 是空间 $(x(iT), x(jT), x(kT))$ 中的一个小体积, J^* 可表示成两个重构空间中的体元之比

$$J^* = \frac{\partial(x(iT), x(jT), x(kT))}{\partial(x, x(T), x(2T))} = \frac{dx(iT)dx(jT)dx(kT)}{dx dx(T) dx(2T)}$$

$$= \lim_{V(T) \rightarrow 0} \frac{V'(T)}{V(T)}. \quad (11)$$

利用(11)式的体元之比代替(10)式的微分计算,可求出 J^* . 计算时,在空间 $(x, x(T), x(2T))$ 中某点附近任取 3 个不共面的点,构成小体积 $V(T)$,同时这些点在空间 $(x(iT), x(jT), x(kT))$ 中有对应的点,它们又确定了小体积 $V'(T)$. 不断将 $V(T)$ 取小,得一组值 $V_1(T) > V_2(T) > V_3(T) > \dots$,同时确定了一组对应的值 $V'_1(T), V'_2(T), V'_3(T), \dots$,利用比值的序列

$$\frac{V'_1(T)}{V_1(T)}, \frac{V'_2(T)}{V_2(T)}, \frac{V'_3(T)}{V_3(T)}, \dots \quad (12)$$

来逼近(11)式中的极限过程,可数值计算出 J^* . 当(11)式存在一个极限时,(12)式趋向一个定值,表示重构是嵌入;当(11)式不存在极限时,(12)式不会趋向一个定值,重构不是嵌入. 其余的分析类似,这里不再详细讨论.

- [1] F. Takens, in *Dynamical systems and Turbulence*, Warwick, 1980, eds. by D. Rand and L. S. Young, *Lecture Notes in Mathematics* No. 898 (Springer, Berlin, 1981), p. 366.
- [2] A. M. Fraser and H. L. Swinney, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 1134.
- [3] H. D. I. Abarbanel *et al.*, *Rev. Mod. Phys.*, **65**(1993), 133.
- [4] 杨志安、陈式刚、王光瑞, *计算物理*, **12**(1995), 第 4 期.
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2374.

ANALYSIS OF TIME SERIES RECONSTRUCTION FOR DYNAMIC SYSTEM

YANG ZHI-AN^{a)} CHEN SHI-GANG^{a, b)} WANG GUANG-RUI^{a, b, c)}

^{a)} (Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088)

^{b)} (Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 10008)

^{c)} (International Center for Material Physics, Academia Sinica, Shenyang 110015)

(Received 3 April 1995)

ABSTRACT

The topological properties of the delay-time reconstruction transformation of dynamic system are analysed by means of the Jacobian of the transformation. Results show that the topological properties depend not only on the reconstructing dimension, but also on the delay time, and on the conditional stability of a time series itself. The conditional Lyapunov exponent is used to judge whether a time series is good or bad. As an example, the Rössler system is discussed.

PACC: 0540