

量子不变量理论与离子在 联合量子阱中的运动*

高孝纯 高 隽 符 建

(浙江大学物理系, 杭州 310027)

(1995年2月13日收到)

运用推广了的量子不变量理论研究时间演化算符的对角化问题, 证明了时间演化算符的对角化与相因子之间存在着紧密的联系. 作为一个例子, 研究了离子在联合量子阱中的量子运动及其经典对应, 并讨论了离子运动的稳定性.

PACC: 0635; 3280

1 引 言

近年来, Berry 相因子^[1]及其非绝热推广——Aharonov-Anandan 相因子(AA 相因子)^[2]引起了人们广泛的兴趣, 它们不仅与近代物理中的许多重要问题^[3-6]有关, 而且不断在实验中得到证实^[7-9]. 在文献[10]中, Anandan 指出, 从原则上讲, 量子系统的任意的非循环演化的研究都可归结为循环演化和 AA 相因子的研究. 这个结论与时间演化算符 $\hat{U}(t_2, t_1)$ 总可以对角化的事实紧密联系, 而本文的研究结果将表明此事实与量子不变量的研究密切相关.

量子不变量理论是由 Lewis 和 Riesenfeld 首先提出的^[11], 它特别适用于含时系统的研究^[12, 13]. 在文献[14]中, 我们求得了不变量的形式解, 引入了基本不变量的概念, 推广了 Lewis 和 Riesenfeld 的工作. 这一推广使我们有可能找到不变量的完全集、建立不变量表, 用不变量理论研究高维和无穷维量子系统^[15]. 在本文中, 我们首先运用推广了的量子不变量理论研究时间演化算符的对角化, 证明时间演化算符的对角化与相因子之间存在着紧密的联系. 然后, 作为一个例子, 我们具体研究了一个三维问题——离子在联合量子阱中的量子运动及其经典对应, 并讨论了离子运动的稳定性.

2 含时系统时间演化算符的对角化

考虑一个一维的含时系统, 其哈密顿量为 $\hat{H}(t)$. 系统的厄密不变量 $\hat{I}(t)$ 满足

$$\partial \hat{I}(t) / \partial t - (i/\hbar) [\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0. \quad (1)$$

$\hat{I}(t)$ 的本征方程为

* 国家自然科学基金、高等学校博士学科点专项基金和浙江省自然科学基金资助的课题.

$$\hat{I}(t) |\lambda_n, t\rangle = \lambda_n |\lambda_n, t\rangle, \quad \partial \lambda_n / \partial t = 0. \quad (2)$$

利用 Lewis-Riesenfeld 量子不变量理论^[11], 可以证明系统含时 Schrödinger 方程:

$$i\hbar \partial |\Psi(t)\rangle_S / \partial t = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle_S \quad (3)$$

的特解 $|\lambda_n, t\rangle_S$ 与 $\hat{I}(t)$ 的本征态 $|\lambda_n, t\rangle$ 相差一个相因子 $\exp[i\varphi_n(t)]$, 于是方程(3)的通解可写为

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_n C_n \exp[i\varphi_n(t)] |\lambda_n, t\rangle, \\ \varphi_n(t) = \int_0^t \langle \lambda_n, t' | i\partial / \partial t' - \hat{H}(t') / \hbar | \lambda_n, t' \rangle dt', \\ C_n = \langle \lambda_n, 0 | \Psi(0) \rangle. \quad (4)$$

在文献[14]中, 我们推广了 Lewis-Riesenfeld 不变量理论^[11], 证明了: 1) 方程(1)的形式解为

$$\hat{I}(t) = \hat{U}(t) \hat{I}(0) \hat{U}^+(t), \quad (5)$$

其中 $\hat{U}(t) = \hat{P} \{ \exp[-i\hbar^{-1} \int_0^t \hat{H}(t') dt'] \}$ 是系统的时间演化算符. $\hat{I}(0)$ 可以任意选择, 因此 $\hat{I}(t)$ 既可以是厄密的, 也可以是非厄密的. 2) 对于一维系统, 存在两个基本不变量 $x(t) = \hat{U}(t) x \hat{U}^+(t)$, $\hat{p}(t) = \hat{U}(t) \hat{p} \hat{U}^+(t)$. 任意不变量 $\hat{I}(t) = \hat{U}(t) \hat{I}(0) \hat{U}^+(t)$ 均可表示为 $x(t)$ 和 $\hat{p}(t)$ 的幂次项的和, 只要 $\hat{I}(0)$ 可以表示为 x 和 $\hat{p}$ 的幂次项的和. 3) 在某些情形下, 可以用一个非厄密的不变量从 Schrödinger 方程的一个解构造出解的完全集. 4) 通过选择一个相互对易的不变量的完全集, 可以将上述概念推广到高维和无穷维情形.

下面我们用推广了的量子不变量理论来研究 $\hat{U}(t)$ 的对角化问题. 对于任意选择的时间 T , 时间演化算符 $\hat{U}(T) = \hat{P} \{ \exp[-i\hbar^{-1} \int_0^T \hat{H}(t) dt] \}$ 必定可以表示成坐标算符 x 和动量算符 $\hat{p}$ 的函数, 将其写为

$$\hat{U}(T) = \exp[i\hat{f}(x, \hat{p})], \quad (6)$$

其中 $\hat{f}(x, \hat{p})$ 是一个厄密算符. 选取 $\hat{I}(0) = \hat{f}(x, \hat{p})$, 则

$$\begin{aligned} \hat{I}(T) &= \hat{U}(T) \hat{I}(0) \hat{U}^+(T) \\ &= \exp[i\hat{f}(x, \hat{p})] \hat{f}(x, \hat{p}) \exp[-i\hat{f}(x, \hat{p})] \\ &= \hat{f}(x, \hat{p}) \\ &= \hat{I}(0). \end{aligned} \quad (7)$$

这就是说, 对于任意选择的时间 T , $\hat{U}(T)$ 的存在唯一性保证了 $\hat{I}(t)$ (满足条件 $\hat{I}(0) = \hat{I}(T)$) 的存在唯一性. 选取此 $\hat{I}(t)$ 的本征态 $|\lambda_n, t\rangle$ 作为基, 从(4)式可以看出: 1) 在不变量 $\hat{I}(T)$ 表象中, 时间演化算符 $\hat{U}(T)$ 被对角化了, 其对角元为相因子 $\exp[i\varphi_n(T)]$, 其中的几何部分 $\exp[i\varphi_n^{(g)}(T)]$ 就是 AA 相因子; 2) $|\Psi(t)\rangle_S$ 的一般演化的研究可归结为 $|\lambda_n, t\rangle (|\lambda_n, 0\rangle = |\lambda_n, T\rangle)$ 的循环演化和相因子 $\exp[i\varphi_n(t)]$ 的研究. 必须强调的是 $\hat{I}(t) [\hat{I}(0) = \hat{I}(T)]$ 的本征能谱可以是连续的或间断的或部分连续、部分间断的.

当系统的哈密顿量为如下二次形式时,

$$\hat{H}(t) = [A(t)x^2 + B(t)(x\hat{p} + \hat{p}x) + C(t)\hat{p}^2]/2, \quad (8)$$

利用 Baker-Haustorf-Campbell^[16]公式可以证明 $\hat{I}(0)$ 也是二次的,

$$\begin{aligned} \hat{I}(0) = \hat{I}(T) &= \hat{f}(x, \hat{p}) \\ &= [ax^2 + b(x\hat{p} + \hat{p}x) + c\hat{p}^2]/2. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $ac - b^2 > 0$ 时, $\hat{I}(0)$ 是正定的, 它具有间断的本征谱; 当 $ac - b^2 \leq 0$ 时, $\hat{I}(0)$ 是半负定的, 具有连续的本征谱. 必须指出的是, 当 $ac - b^2 \leq 0$ 时, 我们可以构造另一个不变量 $\hat{I}_1(t)$, 使 $\hat{I}_1(0) = [a_1x^2 + b_1(x\hat{p} + \hat{p}x) + c_1\hat{p}^2]/2$, $a_1c_1 - b_1^2 > 0$, 当然此不变量不会满足 $\hat{I}_1(0) = \hat{I}_1(T)$, 因为方程

$$\hat{I}(0) = \hat{I}(T) \quad (10)$$

的解是唯一的. 我们在第四节中将看到, 以上讨论与离子在量子阱中运动的稳定性问题有密切的联系.

哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 具有周期 T_0 的情形 [$\hat{H}(t) = \hat{H}(t + T_0)$] 特别值得注意. 此时我们可以构造一个满足 $\hat{I}(0) = \hat{I}(nT_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) 的不变量, 而对于其他的 $T \neq T_0$, 则一般不可能构造一个不变量使它满足 $\hat{I}(0) = \hat{I}(nT)$ ($n = 1, 2, \dots$). 当 $T = T_0$ 时, 方程(3)的特解 $|\lambda_n, t\rangle_S = \exp[i\varphi_n(t)] |\lambda_n, t\rangle$ 被称为含时 Schrödinger 方程(3)的准周期解^[17] [$\varphi(t)$ 为 Floquet 指数]. 在第四节中我们将看到, 此准周期解与离子在联合量子阱中运动的稳定性有关.

在某些物理上感兴趣的情形中, 对 $\hat{I}(t)$, 有可能找到一个依赖于时间的幺正变换 $\hat{V}(t)$, 使得 $\hat{I}_V = \hat{V}^\dagger(t)\hat{I}(t)\hat{V}(t)$ 不依赖于时间. $\hat{I}_V$ 的本征方程为

$$\hat{I}_V |\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle, \quad |\lambda_n\rangle = \hat{V}^{-1} |\lambda_n, t\rangle. \quad (11)$$

注意, (11)式中的 λ_n 与(2)式中的相同. 在这个幺正变换下, $\hat{H}(t)$ 变为 $\hat{H}_V(t)$:

$$\hat{H}_V(t) = \hat{V}^\dagger(t)\hat{H}(t)\hat{V}(t) - i\hbar\hat{V}^\dagger(t)\partial\hat{V}(t)/\partial t. \quad (12)$$

很容易证明此幺正变换保证: 与 $\hat{H}_V(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程的特解 $|\lambda_n, t\rangle_{SV}$ 与 $\hat{I}_V$ 的本征态 $|\lambda_n\rangle$ 仅仅相差一个相因子 $\exp[i\varphi_n(t)]$, 即

$$|\lambda_n, t\rangle_{SV} = \exp[i\varphi_n(t)] |\lambda_n\rangle. \quad (13)$$

值得强调的是此相因子与(4)式中的完全相同. 将 $|\lambda_n, t\rangle_{SV}$ 代入与 $\hat{H}_V(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程:

$$i\hbar\partial |\lambda_n, t\rangle_{SV}/\partial t = \hat{H}_V(t) |\lambda_n, t\rangle_{SV}, \quad (14)$$

可得

$$-\hbar\dot{\varphi}_n(t) |\lambda_n\rangle = \hat{H}_V(t) |\lambda_n\rangle. \quad (15)$$

这表明 $\hat{H}_V(t)$ 与 $\hat{I}_V$ 的区别仅为一个依赖于时间的相乘的 c 数. 因此, 只要能找到幺正变换 $\hat{V}(t)$, 那么含时 Schrödinger 方程(3)的求解就转化为较为简单的方程(14)的求解.

下面我们把本节发展的形式理论用于研究一个具体的物理问题——离子在量子阱中的运动及其稳定性.

3 离子在联合量子阱中的量子运动研究

在历史上, 量子阱的诞生为原子测量学开辟了一个新纪元, Paul, Dehmelt 和 Ramsey

由于在量子阱研究中作出的杰出贡献而获得了 1989 年度的诺贝尔奖金^[18,19]. 因此, 研究离子在量子阱中的运动是很有意义的. 在文献[20]中, 作者研究了离子在 Paul-Penning 联合量子阱中的运动. 但事实上, 他们并没有得到正确的结果¹⁾, 而且他们也没有讨论离子运动的稳定性问题.

在本节中, 我们将运用与不变量相联系的么正变换方法研究离子在 Paul-Penning 联合阱中的运动. 在联合阱中, 所加的外磁场为 $B = (0, 0, B_0)$. 这是一个三维问题, 必须通过选择一个相互对易的不变量的完全集来研究. 离子的哈密顿量为 ($\hbar = c = 1$)

$$\begin{aligned}\hat{H}(t) &= \hat{H}_3(t) + \hat{H}_{12}(t), \\ \hat{H}_3(t) &= \hat{p}_3^2/(2\mu) + [\mu k_1(t)x_3^2]/2, \\ \hat{H}_{12}(t) &= (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2)/(2\mu) + \mu k_2(t)(x_1^2 + x_2^2)/2 \\ &\quad - qB_0(x_1\hat{p}_2 - x_2\hat{p}_1)/(2\mu),\end{aligned}\quad (16)$$

其中 μ 和 q 分别为离子的质量和电荷, $k_1(t)$ 和 $k_2(t)$ 是有效的劲度系数, 它们之间的关系是^[20,21]

$$k_2(t) = -k_1(t)/2 + (qB_0/\mu)^2/4, \quad (17)$$

当 B_0 足够大时, $k_1(t)$ 和 $k_2(t)$ 可以一直保持为正. 否则, 在某一段时间间隔内 $k_1(t)$ 或 $k_2(t)$ 可能为负.

描述离子运动的是含时 Schrödinger 方程

$$i\partial |\psi(t)\rangle_S / \partial t = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle_S. \quad (18)$$

显然, 我们应该在柱坐标系 ($x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $x_3 = x_3$) 中分离变量^[20]. 在柱坐标系中, (16)式中的哈密顿量及(18)式的 $|\psi(t)\rangle_S$ 可分别写为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{12}(t) &= -[\partial^2/\partial \rho^2 + (1/\rho)\partial/\partial \rho + (1/\rho^2)\partial^2/\partial \varphi^2]/(2\mu) \\ &\quad + [\mu k_2(t)/2]\rho^2 + [iqB_0/(2\mu)]\partial/\partial \varphi, \\ |\psi(t)\rangle_S &= |\psi(t)\rangle_3 |\psi(t)\rangle_{12} \\ &= |\psi(t)\rangle_3 |\psi(t)\rangle_\rho |\psi\rangle_\varphi.\end{aligned}\quad (19)$$

此时, Schrödinger 方程(18)变为

$$i\partial |\psi(t)\rangle_3 / \partial t = \hat{H}_3(t) |\psi(t)\rangle_3, \quad (20)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_\rho |\psi\rangle_\varphi = \hat{H}_{12}(t) |\psi(t)\rangle_\rho |\psi\rangle_\varphi. \quad (21)$$

从(19)和(21)式可以看出, 算符 $\hat{L}_3 = -i\partial/\partial \varphi$ 是一个运动常数, 它的本征方程是

$$\hat{L}_3 |\psi\rangle_\varphi = m |\psi\rangle_\varphi, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots). \quad (22)$$

因此 $\hat{L}_3$ 可以用整数 m (磁量子数)来代替. 我们选择 $\hat{L}_3$ 作为相互对易的不变量完全集的第一个. $\hat{L}_3$ 的本征函数为

1) 在文献[20]中, (15)式中的 $\hat{H}_{12}$ 与(14)式中离子的哈密顿量 $\hat{H}_{12}$ 并不相等, 因此, (15)式下面得到的解不是离子运动的解.

$$\langle \varphi | \psi \rangle_{\varphi} = (2\pi)^{-1/2} \exp(im\varphi), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23)$$

于是方程(21)变为

$$i \partial | \psi_m(t) \rangle_{\rho} / \partial t = \hat{H}_{12m}(t) | \psi_m(t) \rangle_{\rho}, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{H}_{12m}(t) = & - [\partial^2 / \partial \rho^2 + (1/\rho) \partial / \partial \rho - m^2 / \rho^2] / (2\mu) \\ & + (\mu k_2 / 2) \rho^2 - qB_0 m / (2\mu). \end{aligned} \quad (25)$$

(16)式中的轴向哈密顿量 $\hat{H}_3(t)$ 是文献[14]研究的广义含时谐振子的一种特殊情形,因此可以用文献[14]的结果来解方程(20). 离子轴向运动的正定不变量 $\hat{E}(t)$ 和我们所要找的么正变换 $\hat{R}(t)$ 分别为

$$\begin{aligned} \hat{E}(t) = & (1/2) \{ (1/A_0^2 + \mu^2 \dot{A}_0^2) x_3^2 + A_0^2 \hat{p}_3^2 - \mu A_0 \dot{A}_0 (x_3 \hat{p}_3 + \hat{p}_3 x_3) \}, \\ \hat{R}(t) = & \exp \{ i r [\sin \chi (x_3^2 - \hat{p}_3^2) + \cos \chi (x_3 \hat{p}_3 + \hat{p}_3 x_3)] / 4 \}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $A_0(t)$ 是下列辅助方程的实数解

$$\mu \ddot{A}_0(t) + \mu k_1 A_0(t) = 1 / [\mu A_0^3(t)], \quad (27)$$

$r(t)$ 和 $\chi(t)$ 由下式定义:

$$\begin{aligned} \cosh r = & (1/2) [1/(A_0^2) + A_0^2 + \mu^2 \dot{A}_0^2], \\ \exp(i\chi) \sinh r = & (1/2) [1/(A_0^2) - A_0^2 + \mu^2 \dot{A}_0^2] + i\mu A_0 \dot{A}_0. \end{aligned} \quad (28)$$

$\hat{E}(t)$ 是我们所选的相互对易的不变量完全集的第二个. 么正变换 $\hat{R}(t)$ 将 $\hat{E}(t)$ 和 $\hat{H}_3(t)$ 分别变为 $\hat{E}_R$, $\hat{H}_{3R}(t)$,

$$\begin{aligned} \hat{E}_R = & \hat{R}^+(t) \hat{E}(t) \hat{R}(t) = (\hat{a}^+ \hat{a} + 1), \\ \hat{H}_{3R}(t) = & \hat{R}^+(t) \hat{H}_3(t) \hat{R}(t) - i \hat{R}^+(t) \partial \hat{R}(t) / \partial t \\ = & \{ 1 / [\mu A_0^2(t)] + \dot{\eta}(t) \} (\hat{a}^+ \hat{a} + 1), \\ \hat{a} = & [(2)^{-1/2}] (x_3 + i \hat{p}_3), \\ \hat{a}^+ = & [(2)^{-1/2}] (x_3 - i \hat{p}_3), \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\eta(t)$ 定义为

$$\eta(t) = -\tan^{-1} \{ \mu A_0(t) \dot{A}_0(t) / [A_0^2(t) + 1] \}. \quad (30)$$

于是我们得到轴向含时 Schrödinger 方程(20)的解 $|\psi_k(t)\rangle_3 (k = 0, 1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} |\psi_k(t)\rangle_3 = & \exp[i\beta_k(t)] \hat{R}(t) |k\rangle \\ = & \exp[i\beta_k(t)] |k, t\rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} |k\rangle = & (1/\sqrt{k!}) (\hat{a}^+)^k |0\rangle, \quad \hat{E}_R |k\rangle = (k + 1/2) |k\rangle; \\ |k, t\rangle = & \hat{R}(t) |k\rangle = (1/\sqrt{k!}) [\hat{b}^+(t)]^k |0, t\rangle, \\ \hat{b}^+(t) = & \hat{a}(t) \hat{a}^+ \hat{R}^+(t) \\ = & [(2)^{-1/2}] \exp[i\eta(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \{x_3/A_0(t) - i[A_0(t)\hat{p}_3 - \mu A_0(t)x_3]\}, \\
\hat{b}(t) &= \hat{R}(t)a\hat{R}^+(t) \\
&= [(2)^{-1/2}]\exp[-i\eta(t)] \\
& \times \{x_3/A_0(t) + i[A_0(t)\hat{p}_3 - \mu A_0(t)x_3]\}, \\
\hat{E}(t) &= [\hat{b}^+(t)\hat{b}(t) + 1], \hat{E}(t)|k, t\rangle = (k + 1/2)|k, t\rangle. \quad (32)
\end{aligned}$$

相 $\beta_k(t)$ 可以分为两部分:几何部分 $\beta_k^{(g)}(t)$ 和动力学部分 $\beta_k^{(d)}(t)$

$$\begin{aligned}
\beta_k(t) &= \beta_k^{(g)}(t) + \beta_k^{(d)}(t) \\
&= -(k + 1/2) \left\{ \int_0^t dt' / [\mu A_0^2(t')] + \eta(t) - \eta(0) \right\}; \\
\beta_k^{(d)}(t) &= -(1/2)(k + 1/2) \int_0^t [\mu k_1 A_0^2 + \mu \dot{A}_0^2 + 1/(\mu A_0^2)] dt', \\
\beta_k^{(g)}(t) &= (1/2)(k + 1/2) \int_0^t [\mu k_1 A_0^2 + \mu \dot{A}_0^2 - 1/(\mu A_0^2)] dt', \\
& - (k + 1/2)[\eta(t) - \eta(0)]. \quad (33)
\end{aligned}$$

注意, (32) 式中的 $|k\rangle$ 可以在 x_3 表象解出

$$\begin{aligned}
\langle x_3 | k \rangle &= [1/(2^k k! \sqrt{\pi})]^{1/2} (-1)^k \exp(x_3^2/2) \\
& \times d^k [\exp(-x_3^2)] / dx_3^k. \quad (34)
\end{aligned}$$

下面我们用么正变换的方法研究离子的径向运动. 选择正定的不变量 $I_m(t)$ 作为相互对易的不变量完全集的第三个:

$$\begin{aligned}
I_m(t) &= (1/4) \{ [1/A^2(t) + \mu^2 \dot{A}^2(t)] R_1 + A^2(t) R_2 \\
& - \mu A(t) \dot{A}(t) R_3 \}, \quad (35)
\end{aligned}$$

它满足方程

$$\partial I_m(t) / \partial t - i[I_m(t), \hat{H}_{12m}(t)] = 0. \quad (36)$$

(35) 式中的 $A(t)$ 是下列辅助方程的实数解

$$\mu \ddot{A}(t) + \mu k_2 A(t) = 1/[\mu A^3(t)], \quad (37)$$

R_1, R_2, R_3 定义为

$$\begin{aligned}
R_1 &= \rho^2, R_2 = -[\partial^2 / \partial \rho^2 + (1/\rho) \partial / \partial \rho - m^2 / \rho^2], \\
R_3 &= -2i(1 + \rho \partial / \partial \rho), \quad (38)
\end{aligned}$$

它们构成一个代数

$$\begin{aligned}
[R_1, R_2] &= 2iR_3, \quad [R_2, R_3] = -4iR_2, \\
[R_3, R_1] &= -4iR_1. \quad (39)
\end{aligned}$$

我们用 $A(t)$ 来构造么正变换 $\hat{Q}(t)$,

$$\begin{aligned}
\hat{Q}(t) &= \exp\{[i\sigma(t)\sin\delta(t)/4][R_1 - R_2] \\
& + [i\sigma(t)\cos\delta(t)/4]R_3\}, \quad (40)
\end{aligned}$$

其中 $\sigma(t)$, $\delta(t)$ 定义为

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= 2\cosh^{-1}\{(1/2)[\mu^2\dot{A}^2(t) + A^{-2}(t) + A^2(t) + 2]^{1/2}\}, \\ \delta(t) &= \tan^{-1}\{2\mu A(t)\dot{A}(t)/[A^{-2}(t) - A^2(t) + \mu^2\dot{A}^2(t)]\}.\end{aligned}\quad (41)$$

利用(39)式中 $\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3$ 构成的代数, 很容易证明(40)式中的 $\hat{Q}(t)$ 将 $\hat{I}_m(t)$ 变为

$$\hat{I}_{mQ} = \hat{Q}^+(t)\hat{I}_m(t)\hat{Q}(t) = (\hat{K}_1 + \hat{K}_2)/4, \quad (42)$$

它是不依赖于时间的. 根据(12)式, 这时(25)式中的径向哈密顿量 $\hat{H}_{12m}(t)$ 变为

$$\hat{H}_{12mQ}(t) = \hat{Q}^+(t)\hat{H}_{12m}(t)\hat{Q}(t) - i\hat{Q}^+(t)\partial\hat{Q}(t)/\partial t. \quad (43)$$

利用(39)式中的代数, 我们首先求得方程(43)等号右边的第一项:

$$\begin{aligned}\hat{Q}^+(t)\hat{H}_{12m}(t)\hat{Q}(t) &= \{\mu k_2[\cosh(\sigma/2) - \sinh(\sigma/2)\cos\delta]^2/2 + \sinh^2(\sigma/2)\sin^2\delta/(2\mu)\}\hat{K}_1 \\ &+ \{\sin^2\delta/2 + [\cosh(\sigma/2) + \sinh(\sigma/2)\cos\delta]^2/(2\mu) + \mu k_2\sinh^2(\sigma/2)\}\hat{K}_2 \\ &+ \{\mu k_2[\cosh(\sigma/2) - \sinh(\sigma/2)\cos\delta]/2 \\ &+ [\cosh(\sigma/2) + \sinh(\sigma/2)\cos\delta]/(2\mu)\}\sinh(\sigma/2)\sin\delta\hat{K}_3 \\ &- qB_0 m/(2\mu),\end{aligned}\quad (44)$$

(43)式等号右边第二项较之等号右边第一项更为复杂, 必须同时利用(39)式中的代数和 Baker-Haustorf-Campbell^[16]公式来求, 经过繁复的计算可得

$$\begin{aligned}-i\hat{Q}^+(t)\partial\hat{Q}(t)/\partial t &= [\dot{\sigma}\sin\delta - \delta(\cosh\sigma - 1) + \sinh\sigma\cos\delta\dot{\delta}]\hat{K}_1/4 \\ &+ [-\dot{\sigma}\sin\delta - \delta(\cosh\sigma - 1) - \sinh\sigma\cos\delta\dot{\delta}]\hat{K}_2/4 \\ &+ [\dot{\sigma}\cos\delta - \sinh\sigma\sin\delta\dot{\delta}]\hat{K}_3/4.\end{aligned}\quad (45)$$

利用(43), (44), (45)式以及 $A(t)$ 是辅助方程(37)的解的事实, 我们最终得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_{12mQ}(t) &= (1/4)\{2/[\mu A^2(t)] + 2\dot{\tau}(t)\}(\hat{K}_1 + \hat{K}_2) \\ &- qB_0 m/(2\mu),\end{aligned}\quad (46)$$

其中 τ 定义为

$$\tau(t) = -\tan^{-1}\{\mu A(t)\dot{A}(t)/[1 + A^2(t)]\}. \quad (47)$$

从(42)和(46)式很清楚地看出 $\hat{H}_{12mQ}(t)$ 与 $\hat{I}_{mQ}$ 仅仅相差一个依赖于时间的数 $\{2/[\mu A^2(t)] + 2\dot{\tau}(t)\}$ 以及一个附加的常数 $[-qB_0 m/(2\mu)]$. $\hat{I}_{mQ}$ 的本征态满足

$$\hat{I}_{mQ}|m, n\rangle = [n + (|m| + 1)/2]|m, n\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (48)$$

我们可以在 ρ 表象中求解 $|m, n\rangle$

$$\langle\rho|m, n\rangle = D_{mn}e^{-\rho^2/2}\rho^{|m|}F(-n, |m| + 1, \rho^2), \quad (49)$$

其中 D_{mn} 是归一化常数, $F(-n, |m| + 1, \rho^2)$ 是合流超几何多项式. 利用(13)式, 可得与 $\hat{H}_{12mQ}(t)$ 对应的含时 Schrödinger 方程的解:

$$|m, n, t\rangle_{SQ} = \exp[i\alpha_{mn}(t)]|m, n\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\alpha_{mn}(t) = -\int_0^t \langle m, n|\hat{H}_{12mQ}(t')|m, n\rangle dt'$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \langle m, n | \hat{Q}^+(t') (i\partial/\partial t') \hat{Q}(t') | m, n \rangle dt' \\
&\quad - \int_0^t \langle m, n | \hat{Q}^+(t') \hat{H}_{12m}(t') \hat{Q}(t') dt' \\
&= -2[n + (|m| + 1)/2] \left\{ \tau(t) - \tau(0) + \int_0^t dt' / [\mu A^2(t')] \right\} \\
&\quad + \int_0^t dt' (qB_0 m) / (2\mu); \\
\alpha_{mn}^{(g)}(t) &= \int_0^t \langle m, n | \hat{Q}^+(t') (i\partial/\partial t') \hat{Q}(t') | m, n \rangle dt' \\
&= [n + (|m| + 1)/2] \left\{ \int_0^t [\mu \dot{A}^2 + \mu k_2 A^2 - 1/(\mu A^2)] dt' \right. \\
&\quad \left. - 2[\tau(t) - \tau(0)] \right\}, \\
\alpha_{mn}^{(d)}(t) &= - \int_0^t \langle m, n | \hat{Q}^+(t') \hat{H}_{12m}(t') \hat{Q}(t') dt' \\
&= -[n + (|m| + 1)/2] \int_0^t [\mu \dot{A}^2 + \mu k_2 A^2 + 1/(\mu A^2)] dt', \quad (50)
\end{aligned}$$

$\alpha_{mn}^{(g)}(t)$, $\alpha_{mn}^{(d)}(t)$ 分别称为几何相和动力学相, $(|m| + 1)/2$ 被称为 Bargmann 指数. 于是描述离子径向运动的含时 Schrödinger 方程(24)的解为

$$\begin{aligned}
|\psi_{mn}(t)\rangle_\rho &= \hat{Q}(t) |m, n, t\rangle_{SQ} \\
&= \exp[i\alpha_{mn}(t)] \hat{Q}(t) |m, n\rangle \\
&= \exp[i\alpha_{mn}(t)] |m, n, t\rangle, \quad (51)
\end{aligned}$$

其中 $|m, n, t\rangle$ 是 $\hat{I}_m(t)$ 的本征态, 对应的本征值为 $[n + (|m| + 1)/2]$

$$\hat{I}_m(t) |m, n, t\rangle = [n + (|m| + 1)/2] |m, n, t\rangle. \quad (52)$$

从(21), (31)和(51)式, 我们得到离子含时 Schrödinger 方程(18)的一般解, 它是相互对易的不变量的完全集 $\hat{E}(t)$, $\hat{I}_m(t)$ 和 $\hat{L}_3$ 的共同本征函数的组合:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle_S &= \sum C_{kmn} \exp[i\beta_k(t)] \exp[i\alpha_{mn}(t)] \\
&\quad \times |k, t\rangle |m, n, t\rangle |\psi\rangle_\varphi \\
&= \sum C_{kmn} \exp[i\beta_k(t)] \exp[i\alpha_{mn}(t)] \\
&\quad \times \hat{R}(t) |k\rangle \hat{Q}(t) |m, n\rangle |\psi\rangle_\varphi, \quad (53)
\end{aligned}$$

其中 C_{kmn} 由 $|\psi(t)\rangle_S$ 的初始条件 $|\psi(0)\rangle_S$ 决定. 值得再一次指出的是, 在 φ , x_3 和 ρ 表象中, 可以得到 $\langle\varphi|\psi\rangle_\varphi$, $\langle x_3|k\rangle$ 和 $\langle\rho|m, n\rangle$ 的具体表达式(23), (34)和(49).

对于任意选择的 T , 如果辅助方程(27)的解 $A_0(t)$ 适合循环条件

$$A_0(0) = A_0(T), \quad \dot{A}_0(0) = \dot{A}_0(T), \quad (54)$$

就有 $\hat{E}(0) = \hat{E}(T)$. 此时 $\hat{E}(t)$ 的本征态 $|k, t\rangle$ 适合循环条件

$$|k, 0\rangle = |k, T\rangle. \quad (55)$$

同样的讨论也适用于 $|m, n, t\rangle$, 有

$$|m, n, 0\rangle = |m, n, T\rangle. \quad (56)$$

当(55)和(56)式中的循环条件满足的时候, 从(53)式可以看出时间演化算符 $\hat{U}(T) = \hat{P} \left\{ \exp \left[-i \int_0^T \hat{H}(t') dt' \right] \right\}$ 被对角化了, 其对角元为相因子 $\exp[i\{\beta_k(T) + \alpha_{mn}(T)\}]$, 其中几何部分 $\exp[i\{\beta_k^{(g)}(T) + \alpha_{mn}^{(g)}(T)\}]$ 就是 AA 相因子. 于是 $|\psi(t)\rangle_s$ 的一般演化的研究就归结为 $|k, t\rangle, |m, n, t\rangle$ 的循环演化和相因子 $\exp[i\{\beta_k(t) + \alpha_{mn}(t)\}]$ 的研究. 特别地, 当 T 等于轴向哈密顿量 H_3 的周期的时候, 相应的解 $\exp[i\beta_k(t)]|k, t\rangle$ 就是轴向含时 Schrödinger 方程(20)的准周期解, 与文献[17]所得结果一致. 现在存在的问题是: 循环条件(55)和(56)式何时可以满足? 我们将在第四节中结合离子运动的稳定性研究对这个问题进行讨论.

4 离子量子运动的经典对应; 稳定性问题

在文献[21]中作者研究了离子在 Paul-Penning 联合阱的经典运动及其稳定性. 然而, 他们并未讨论离子的量子运动及其稳定性以及量子运动与经典运动的联系, 而这些问题是很值得进一步深入研究的.

下面我们就来讨论离子量子运动的经典对应以及有关的稳定性问题. 首先考虑离子的轴向运动, 由于在经典极限下, 坐标和动量的不确定值应该尽可能小, 因此联系量子运动和经典运动的最好渠道是相干态(一种波包). 按照 Hartley 和 Ray 的思想^[22], 我们用(31)式中的精确解以及(27)和(32)式来构造相干态 $|\zeta, t\rangle_s$ ^[23]

$$|\zeta, t\rangle_s = \exp(-|\zeta|^2/2) \sum (\zeta^k / \sqrt{k!}) \times \exp[i\beta_k(t)] |k, t\rangle, \quad (57)$$

其中 $\zeta = u + iv$ 是一个复常数. $|\zeta, t\rangle_s$ 是(32)式中的湮没算符 $\hat{b}(t)$ 的本征态,

$$\hat{b}(t) |\zeta, t\rangle_s = \zeta \exp\{-i[\theta_0(t) + \eta(t) - \eta(0)]\} |\zeta, t\rangle_s, \quad (58)$$

其中 $\theta_0(t) = \int_0^t dt' / [\mu A_0^2(t')]$, $\eta(t)$ 由(30)式定义, 经过计算, 很容易求得 x_3 和 $\hat{p}_3$ 在相干态 $|\zeta, t\rangle_s$ 的期待值. 当取 $u = 2^{-1/2}$, $v = 0$ 时, x_3 和 $\hat{p}_3$ 的期待值为

$$\begin{aligned} x_3' &= {}_s\langle \zeta', t | x_3 | \zeta', t \rangle_s \\ &= {}_s\langle \zeta', t | [2^{-1/2}] A_0 \exp(i\eta) \hat{b} | \zeta', t \rangle_s \\ &\quad + {}_s\langle \zeta', t | [2^{-1/2}] A_0 \exp(-i\eta) \hat{b}^\dagger | \zeta', t \rangle_s \\ &= A_0 \cos \theta, \\ p_3' &= {}_s\langle \zeta', t | \hat{p}_3 | \zeta', t \rangle_s \\ &= {}_s\langle \zeta', t | [(2)^{-1/2}] (e^{i\eta} \hat{b} - e^{-i\eta} \hat{b}^\dagger) / (iA_0) | \zeta', t \rangle_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + {}_S \langle \zeta', t | [(2)^{-1/2}] \mu \dot{A}_0 (e^{i\eta} \hat{b} + e^{-i\eta} \hat{b}^\dagger) | \zeta', t \rangle_S \\
 & = \mu \dot{A}_0 \cos \theta - \sin \theta / A_0,
 \end{aligned} \tag{59}$$

当取 $u = 0, v = 2^{-1/2}$ 时, x_3 和 $\hat{p}_3$ 的期待值为

$$\begin{aligned}
 x_3'' &= {}_S \langle \zeta'', t | x_3 | \zeta'', t \rangle_S \\
 &= {}_S \langle \zeta'', t | [(2)^{-1/2}] A_0 \exp(i\eta) \hat{b} | \zeta'', t \rangle_S \\
 &\quad + {}_S \langle \zeta'', t | [(2)^{-1/2}] A_0 \exp(-i\eta) \hat{b}^\dagger | \zeta'', t \rangle_S \\
 &= A_0 \sin \theta, \\
 p_3'' &= {}_S \langle \zeta'', t | \hat{p}_3 | \zeta'', t \rangle_S \\
 &= {}_S \langle \zeta'', t | [(2)^{-1/2}] (e^{i\eta} \hat{b} - e^{-i\eta} \hat{b}^\dagger) / (iA_0) | \zeta'', t \rangle_S \\
 &\quad + {}_S \langle \zeta'', t | [(2)^{-1/2}] \mu \dot{A}_0 (e^{i\eta} \hat{b} + e^{-i\eta} \hat{b}^\dagger) | \zeta'', t \rangle_S \\
 &= \mu \dot{A}_0 \sin \theta + \cos \theta / A_0.
 \end{aligned} \tag{60}$$

(59)和(60)式中的 $A_0(t)$ 是辅助方程(27)的实数解, $\theta(t) = \theta_0(t) - \eta(0)$. $A_0(t)$ 的实数性保证了 x_3' 和 x_3'' 的实数性. x_3' 和 x_3'' 是经典运动方程

$$\ddot{x}_3 + k_1 x_3 = 0 \tag{61}$$

的线性无关的两个解. (59)和(60)式体现了经典运动方程(61)的解与辅助方程(27)的解之间的关系^[24]. 当 $A_0(t)$ 适合循环条件(54)式时, 经典运动方程(61)的两个解 x_3' 和 x_3'' 具有如下性质

$$\begin{aligned}
 x_3'(0) &= A_0(0) \cos[\theta(0)], \\
 x_3'(T) &= A_0(T) \cos[\theta(T)] = A_0(0) \cos[\theta(T)]; \\
 x_3''(0) &= A_0(0) \sin[\theta(0)], \\
 x_3''(T) &= A_0(T) \sin[\theta(T)] = A_0(0) \sin[\theta(T)],
 \end{aligned} \tag{62}$$

其中 T 被称为 $A_0(t)$ 的周期〔或经典运动方程(61)的解的“周期”〕, $\theta(T)$ 与非绝热的 Hannay 角有关^[23]. 这时有 $\dot{E}(0) = \dot{E}(T)$, 但仅当 T 等于 H_3 的周期 T_0 时, 才有 $\dot{E}(0) = \dot{E}(nT_0)$ ($n=2, 3, \dots$). 因此

$$A_0(0) = A_0(T_0), \quad \dot{A}_0(0) = \dot{A}_0(T_0), \tag{63}$$

可以看成是经典运动方程解的稳定性条件^[21, 25]. 适合条件(63)式的 $A_0(t)$ 及其对应的经典解被称作是稳定的.

仅当 $k_1(t)$ 在某一区域变化时, $A_0(t)$ 才是稳定的, 这一区域称为 $k_1(t)$ 的经典稳定区. 文献[21, 25]用数值方法讨论了 $k_1(t) = d + f \cos \Omega t$ (d, f, Ω 为常数)的经典稳定区. 而 $k_1(t)$ 的量子稳定区应选为 $k_1(t) > 0$ (对所有的 t 均成立), 以保证 $H_3(t)$ 的能量谱有下限, 文献[21, 25]中的数值结果近似地说明 $k_1(t)$ 的量子稳定区是它的经典稳定区的一部分. 在经典稳定区内, $k_1(t)$ 对于某些时间间隔可能为负, 这意味着经典稳定性并不一定保证量子稳定性. 这个结论是合理的, 因为与经典运动相联系的量子态是一些很特殊

的态,例如(57)式中的相干态.而在量子力学中,则需要考虑所有的量子态.

值得强调的是不稳定的 $A_0(t)$ 表明不可能找到一个正定的 $\hat{E}(t)$,使之满足循环条件 $\hat{E}(0) = \hat{E}(T_0)$.在这种情形中,选取任何正定的 $\hat{E}(t)$ 的本征态为基都不能使时间演化算符 $\hat{U}(T_0)$ 对角化.然而,本文所采用的与不变量相联系的么正变换方法同时适用于 $A_0(t)$ 稳定和非稳定的情形,因为用辅助方程(27)的实数解就可以构造正定的不变量 $\hat{E}(t)$,并不一定要求它满足循环条件.此正定不变量不仅提供了与 $\hat{E}(0)$ 间断本征能谱对应的初始态的完全集,而且还是研究这些态演化的有力工具.

上面详细讨论了离子轴向运动的稳定性,离子径向运动的稳定性亦可用同样的方法加以研究,此处没有必要再赘述了.

5 讨 论

1) 文献[21,25]用数值方法仅仅讨论了 $k_1(t) = d + f\cos\Omega t$ (d, f, Ω 为常数)的经典稳定区域,对于更普遍的情形,还需要作进一步的数值研究,这方面的工作正在进行之中.

2) 从第三节所得结果可以看出,相因子的几何部分与动力学部分的划分受到与不变量相联系的么正变换的影响,这意味着有必要研究此么正变换的拓扑性质^[26].

- [1] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. London Ser.*, **A392**(1984), 45.
- [2] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1593.
- [3] E. Layton, Youhong Huang and Shih-I Chu, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 42; Y. Brihaye *et al.*, *J. Phys. A*, **23**(1990), 1985.
- [4] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phase in Physics* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [5] D. Loss, P. M. Goldbart and A. V. Balatsky, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1991), 1655; D. Loss and P. M. Goldbart, *Phys. Rev.*, **B45**(1992), 13544.
- [6] C. A. Mead, *Rev. Mod. Phys.*, **64**(1992), 51; A. K. Pati and A. Joshi, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 98; Y. Brihaye *et al.*, *Phys. Rev.*, **D47**(1993), 722; S. Giller *et al.*, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 907.
- [7] G. Delacretaz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 2598; A. Tomita and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 937; A. Tycko, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 2281; T. Bitter and D. Dubbers, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 251.
- [8] D. Suter *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1218; R. Bhandari and J. Samuel, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1211.
- [9] H. Weinfurter and G. Badurek, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 1318; J. W. Zwanziger, M. Koenig and A. Pines, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 3107; A. O. Barot *et al.*, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 2581.
- [10] J. Anandan, *Phys. Lett.*, **A133**(1988), 171.
- [11] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**(1969), 1458.
- [12] S. Abe and R. Ehrhardt, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), 986.
- [13] L. Yeh, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 3587; K. H. Yeon *et al.*, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 1035.
- [14] Xiao-Chun Gao, Jing-Bo Xu and Tie-Zheng Qian, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 7016.
- [15] S. Abe, *Phys. Rev.*, **D47**(1993), 718.
- [16] J. Wei and E. Norman, *J. Math. Phys.*, (N. Y.) **4**(1963), 575.
- [17] L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 527.

- [18] Hans Dehmelt, *Rev. Mod. Phys.*, **62**(1990), 525; Wolfgang Paul, *Rev. Mod. Phys.*, **62**(1990), 531.
- [19] D. G. Shankland and A. L. Wells, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 564; R. J. Glauber, in *Foundations of Quantum Mechanics*, edited by T. D. Black *et al.* (World Scientific, Singapore, 1992).
- [20] V. N. Gheorghe and F. Vedel, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 4828.
- [21] Guo-Zhong Li and G. Werth, *Physica Scripta*, **46**(1992), 587.
- [22] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 382.
- [23] X. C. Gao, J. B. Xu and T. Z. Qian, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **204**(1990), 235.
- [24] H. R. Lewis, *J. Math. Phys.*, **9**(1968), 1976; H. R. Lewis and P. G. L. Leach, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 2371; C. J. Eliezer and A. Gray, *SIAM J. Appl. Math.*, **30**(1976), 463.
- [25] N. W. McLaughlan, *Theory and Applications of Mathieu Functions* (Dover Publications Inc., New York, 1964).
- [26] R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys.*, **3**(1988), 285; G. Giavarini *et al.*, *J. Phys.*, **A22**(1988), 3513.

QUANTUM INVARIANT THEORY AND THE MOTION OF AN ION IN A COMBINED TRAP

GAO XIAO-CHUN GAO JUN FU JIAN

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(Received 13 February 1995)

ABSTRACT

The generalized invariant theory is used to study the problem of the diagonalization of the time-evolution operator. It is shown that there is an intimate connection between the diagonalization of the time-evolution operator and the phase factors. As an illustrative example, the quantum motion of an ion in a combined trap is investigated; the classical correspondence of the quantum motion and the stability problem are then discussed.

PACC: 0365; 3280