

原子偶极矩的高阶压缩

董传华

(上海大学基础部, 上海 200072)

(1995 年 6 月 9 日收到)

由高阶测不准关系给出了物理量的高阶基本量子涨落, 并由此定义了原子偶极矩的高阶压缩. 以光场初态是迭加态的双光子 J-C 模型为例进行了讨论.

PACC: 4250

1 引 言

光场的压缩效应早已有了许多研究. 最近, 原子偶极矩的压缩问题又引起了人们的注意. 在文献中提出了不少能实现原子偶极矩压缩的实验方案^[1,2], 建立了原子偶极矩压缩和光场压缩之间的关系^[3]. 这些压缩效应都限于二阶压缩. 因此在 Hong 和 Mandel 提出光场的高阶压缩后^[4]我们很自然地要研究一下原子偶极矩的高阶压缩.

Hong 和 Mandel 定义光场态的高阶压缩为: 在所讨论的光场态中光场振幅的两个正交分量之一的 K 阶矩小于它在相干态中的 K 阶矩. 这定义仅适用于光场, 不能用于原子偶极矩. 原子偶极矩的压缩是以测不准关系为准则的. 原子偶极矩通常可以写成实部和虚部(分别对应于色散和吸收部分). 如果其中一个分量在某个态中的涨落小于它在该态中由海森堡测不准关系决定的基本量子涨落, 那么就称该分量被压缩^[5]. 这是目前各文献中关于原子偶极矩二阶压缩的定义. 我们的目的就是把这一定义推广到高阶, 并以偶极矩的高阶基本量子涨落作为判断准则.

本文首先导出高阶测不准关系, 给出高阶基本量子涨落, 并由此定义原子偶极矩的高阶压缩. 然后对原子偶极矩的高阶压缩作计算, 并以光场初态是迭加态的双光子 J-C 模型作为例子进行讨论. 为了使讨论更加切合实际情况, 在我们的例子中包含了 Stark 位移的影响.

2 高阶测不准关系和高阶压缩的定义

任意两个可观察量可由两个厄密算符 A 和 B 表示. 它们在态 $|\Psi\rangle$ 中的涨落受到海森堡测不准关系的限制, 即

$$\langle(\Delta A)^2\rangle_{\Psi}\langle(\Delta B)^2\rangle_{\Psi} \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle_{\Psi}|^2, \quad (1)$$

其中 $\frac{1}{2} |\langle[A, B]\rangle_{\Psi}|$ 为 A 或 B 在态 $|\Psi\rangle$ 中的(二阶)基本量子涨落. 它反映了涨落的量子

力学极限. 应注意到如果对易式 $[A, B]$ 不是一个 C 数, 那么这基本量子涨落就是一个与态有关的量.

现在考虑厄密算符 F 和 G , 并按下式构成一个态 $|\varphi\rangle$

$$|\varphi\rangle = (F + i\lambda G) |\Psi\rangle, \quad (2)$$

其中 λ 为实参量. 由于 $\langle\varphi|\varphi\rangle$ 是非负的, 所以有下列不等式

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle F^2 \rangle_\Psi + \lambda^2 \langle G^2 \rangle_\Psi - i\lambda \langle [G, F] \rangle_\Psi \geq 0. \quad (3)$$

(3)式左边是关于 λ 的二次式, 所以(3)式要求下列不等式成立,

$$|\langle [G, F] \rangle_\Psi|^2 - 4\langle F^2 \rangle_\Psi \langle G^2 \rangle_\Psi \leq 0. \quad (4)$$

进一步令 $G \equiv (A - \langle A \rangle_\Psi)^{k/2}$, $F \equiv (B - \langle B \rangle_\Psi)^{k/2}$, 其中 k 为偶数. 由此就得到了可观察量 A 和 B 在态 $|\Psi\rangle$ 中所满足的高阶(偶数阶)测不准关系

$$\langle (\Delta A)^k \rangle_\Psi \langle (\Delta B)^k \rangle_\Psi \geq \frac{1}{4} |\langle [(\Delta A)^{k/2}, (\Delta B)^{k/2}] \rangle_\Psi|^2, \quad (5)$$

这里 $\frac{1}{2} |\langle [(\Delta A)^{k/2}, (\Delta B)^{k/2}] \rangle_\Psi|$ 就是 A 或 B 在态 $|\Psi\rangle$ 中的 k 阶基本量子涨落. 如果 $k=2$, 则(5)与(1)式一致. 如果 A 或 B 在态 $|\Psi\rangle$ 中的 k 阶矩小于它在该态中的 k 阶基本量子涨落, 即

$$\langle (\Delta A)^k \rangle_\Psi < \frac{1}{2} |\langle [(\Delta A)^{k/2}, (\Delta B)^{k/2}] \rangle_\Psi|. \quad (6)$$

我们就称 A (或 B) 在态 $|\Psi\rangle$ 中被压缩到 k 阶. 若 $k=2$, 那么这一定义就成为一般的二阶压缩的定义.

3 原子偶极矩的高阶压缩

考虑一个两能级原子, 其激发态和基态分别是 $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$. 用 $|e\rangle, |g\rangle$ 可以构成原子的升算符 σ_+ , 降算符 σ_- 和反转算符 σ_3 , 即 $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ 和 $\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, 它们满足下列对易关系:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3, \quad [\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm. \quad (7)$$

慢变化的偶极矩算符的色散和吸收分量可以写成

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_+ e^{-i\omega_0 t} + \sigma_- e^{i\omega_0 t}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2i}(\sigma_+ e^{-i\omega_0 t} - \sigma_- e^{i\omega_0 t}), \quad (8)$$

ω_0 为原子跃迁频率. σ_1 和 σ_2 服从对易关系

$$[\sigma_1, \sigma_2] = \frac{i}{2}\sigma_3,$$

σ_1 和 σ_2 的 k 阶测不准关系为

$$\langle (\Delta\sigma_1)^k \rangle_\Psi \langle (\Delta\sigma_2)^k \rangle_\Psi \geq \frac{1}{4} |\langle [(\Delta\sigma_1)^{k/2}, (\Delta\sigma_2)^{k/2}] \rangle_\Psi|^2, \quad (10)$$

σ_1 (或 σ_2) 的 k 阶压缩条件就是

$$\langle (\Delta\sigma_j)^k \rangle_\Psi \langle \frac{1}{2} | \langle [(\Delta\sigma_1)^{k/2}, (\Delta\sigma_2)^{k/2}] \rangle_\Psi |, (j = 1 \text{ 或 } 2) \quad (11)$$

对 $k=2$, 这一条件就是文献中常见的原子偶极矩二阶压缩的定义^[5]

$$\langle (\Delta\sigma_j)^2 \rangle_\Psi < \frac{1}{4} | \langle \sigma_3 \rangle_\Psi | \quad (j = 1 \text{ 或 } 2). \quad (12)$$

由 σ_+ , σ_- 和 σ_3 的定义, 有

$$\sigma_j^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \text{ 为偶数}), \sigma_j^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma_j, \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (13)$$

$$[\sigma_1^m, \sigma_2^n] = \begin{cases} 0 & (m \text{ 和 } n \text{ 都是偶数或其中之一是偶数}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n-1} i\sigma_3 & (m \text{ 和 } n \text{ 都是奇数}) \end{cases} \quad (14)$$

利用(13)式, 计算 $\langle (\Delta\sigma_j)^k \rangle_\Psi$

$$\langle (\Delta\sigma_j)^k \rangle_\Psi = \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{i=2,4,\dots}^k (C_k^i - C_k^{i-1}) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \langle \sigma_j \rangle_\Psi^i. \quad (15)$$

由(14)式, 得到

$$\langle [(\Delta\sigma_1)^{k/2}, (\Delta\sigma_2)^{k/2}] \rangle_\Psi = 2i \langle \sigma_3 \rangle_\Psi 2^{-k} \sum_u C_{k/2}^u 2^u \langle \sigma_1 \rangle_\Psi^u \sum_v C_{k/2}^v 2^v \langle \sigma_2 \rangle_\Psi^v, \quad (16)$$

如果 $k/2$ 为偶数, 则 u 和 v 取奇数, 如果 $k/2$ 为奇数, 则 u 和 v 取偶数. 对 $k=2, 4, 6$, 具体写出(15)和(16)式

$$k=2 \quad \langle (\Delta\sigma_j)^2 \rangle_\Psi = \frac{1}{4} - \langle \sigma_j \rangle_\Psi^2, \quad (17a)$$

$$\langle [(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2)] \rangle_\Psi = \frac{i}{2} \langle \sigma_3 \rangle_\Psi; \quad (17b)$$

$$k=4 \quad \langle (\Delta\sigma_j)^4 \rangle_\Psi = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \langle \sigma_j \rangle_\Psi^2 - 3 \langle \sigma_j \rangle_\Psi^4, \quad (18a)$$

$$\langle [(\Delta\sigma_1)^2, (\Delta\sigma_2)^2] \rangle_\Psi = 2i \langle \sigma_1 \rangle_\Psi \langle \sigma_2 \rangle_\Psi \langle \sigma_3 \rangle_\Psi; \quad (18b)$$

$$k=6 \quad \langle (\Delta\sigma_j)^6 \rangle_\Psi = \frac{1}{64} + \frac{9}{16} \langle \sigma_j \rangle_\Psi^2 - \frac{5}{4} \langle \sigma_j \rangle_\Psi^4 - 5 \langle \sigma_j \rangle_\Psi^6, \quad (19a)$$

$$\langle [(\Delta\sigma_1)^3, (\Delta\sigma_2)^3] \rangle_\Psi = \frac{i}{32} (1 + 12 \langle \sigma_1 \rangle_\Psi^2) (1 + 12 \langle \sigma_2 \rangle_\Psi^4) \langle \sigma_3 \rangle_\Psi. \quad (19b)$$

4 双光子 J-C 模型中原子偶极矩的高阶压缩

考虑在无损耗腔内频率为 ω 的单模场通过双光子跃迁与一个两能级原子的作用. 这双光子跃迁是通过一个中间的中继能级实现的. 如果这中间的中继能级与原子的上能级及下能级的耦合强度是可以相比的, 那么由于对中间中继能级的虚跃迁而引起的上、下两能级的 Stark 位移将是值得注意的^[6].

描写这样一个包括 Stark 效应在内的系统的哈密顿量为^[7]

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_3 + a^\dagger a (\beta_2 | e \rangle \langle e | + \beta_1 | g \rangle \langle g |) + \Gamma (a^{+2} \sigma_- + a^2 \sigma_+). \quad (20)$$

β_1 和 β_2 分别为基态和激发态的动态 Stark 位移参量, Γ 为有效双光子耦合常数, 其中已令 $\hbar=1$. 考虑共振情况下, 即 $\omega_0=2\omega$. H 的本征态和本征值分别为

$$|\Psi_n^+\rangle = |n, e\rangle \sin(\theta_n) + |n+2, g\rangle \cos(\theta_n), \quad (21a)$$

$$|\Psi_n^-\rangle = |n, e\rangle \cos(\theta_n) - |n+2, g\rangle \sin(\theta_n). \quad (21b)$$

$$E_n^\pm = \omega(n+1) + \lambda_n^\pm, \quad (22)$$

其中 $|n, e\rangle$ 表示场中有 n 个光子而原子处于激发态所构成系统的态, 并且令 $r = (\beta_1/\beta_2)^{1/2}$.

$$\lambda_n^\pm = \Gamma \frac{n(1+r^2) + 2r^2}{2r} \pm \Omega_n, \quad \sin(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta_n/\Omega_n)^{1/2}. \quad (23)$$

$$\Omega_n = [\Gamma^2(n+1)(n+2) + \eta_n^2]^{1/2}, \quad \eta_n = \frac{\Gamma}{2r}[n(1-r^2) - 2r^2],$$

初始场可以表示为福克态的迭加, $|F(0)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$. 因此这系统的初态为 $|\Psi(0)\rangle = \sum_n C_n |n, g\rangle$, 其中 $|n, g\rangle$ 可以用 H 的本征态来表示

$$|n, g\rangle = \cos(\theta_{n-2}) |\Psi_{n-2}^+\rangle - \sin(\theta_{n-2}) |\Psi_{n-2}^-\rangle. \quad (24)$$

利用(22)式及 $H|\Psi_n^\pm\rangle = E_n^\pm |\Psi_n^\pm\rangle$, 可以得到在共振激发情况下系统的态为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp(-iHt) |\Psi(0)\rangle \\ &= \exp[it(\omega + \Gamma/r)] \sum_n C_n \exp\{-i[\omega + \Gamma(1+r^2)/(2r)]nt\} \\ &\quad \times (A_n |n-2, e\rangle + B_n |n, g\rangle), \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= -i \sin(2\theta_{n-2}) \sin(\Omega_{n-2}t), \\ B_n &= \cos(\Omega_{n-2}t) - i \cos(2\theta_{n-2}) \sin(\Omega_{n-2}t). \end{aligned} \quad (26)$$

如果初始场为双光子迭加态 $|F(0)\rangle = C_0|0\rangle + C_2|2\rangle$, C_0 和 C_2 之间的相位差为 ϕ , 那么(25)式的求和中只有 $n=0, 2$ 两项, 其他各项都是零. 在这种情况下, 可以得到 $\langle\sigma_j\rangle$ 的封闭形式的表达式而不必象文献[6]中那样借助于大 n 近似. 对 $n=0, 2$, 有

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_2 = -i \left(\frac{2}{2+r^2} \right)^{1/2} \sin(\Gamma \sqrt{2+r^2}t), \\ B_0 &= \exp(-i \frac{\Gamma}{r}t), \quad B_2 = \cos(\Gamma \sqrt{2+r^2}t) - i \frac{r}{\sqrt{2+r^2}} \sin(\Gamma \sqrt{2+r^2}t), \end{aligned} \quad (27)$$

利用(27)式, 可以导出 $\langle\sigma_j\rangle$ ($j=1, 2, 3$) 如下

$$\langle\sigma_3\rangle = |C_2|^2 \left[\frac{2-r^2}{2+r^2} \sin^2(\Gamma \sqrt{2+r^2}t) - \cos^2(\Gamma \sqrt{2+r^2}t) \right] - |C_0|^2, \quad (28a)$$

$$\langle\sigma_1\rangle = |C_0 C_2| \sqrt{\frac{2}{2+r^2}} \sin(\Gamma \sqrt{2+r^2}t) \sin(\phi - \Gamma r t), \quad (28b)$$

$$\langle\sigma_2\rangle = |C_0 C_2| \sqrt{\frac{2}{2+r^2}} \sin(\Gamma \sqrt{2+r^2}t) \cos(\phi - \Gamma r t). \quad (28c)$$

为了量度偶极矩的 k 阶压缩, 引入一个压缩参量

$$S_j^{(k)} = \langle (\Delta\sigma_j)^k \rangle_\Psi - \frac{1}{2} | \langle [(\Delta\sigma_1)^{k/2}, (\Delta\sigma_2)^{k/2}] \rangle_\Psi |, \quad (j = 1 \text{ 或 } 2) \quad (29)$$

把(28)式代入(17)–(19)式中就可得到原子偶极矩的 2 阶、4 阶和 6 阶压缩参量. 偶极矩存在 k 阶压缩的条件可写作 $S_j^{(k)} < 0$. 如果不考虑 Stark 位移, 那么(28)式就简化为^[1]

$$\langle \sigma_3 \rangle = 2 |C_2|^2 \sin^2(\sqrt{2}\Gamma t) - 1, \quad (30a)$$

$$\langle \sigma_1 \rangle = |C_0 C_2| \sin(\sqrt{2}\Gamma t) \sin \phi, \quad (30b)$$

$$\langle \sigma_2 \rangle = |C_0 C_2| \sin(\sqrt{2}\Gamma t) \cos \phi. \quad (30c)$$

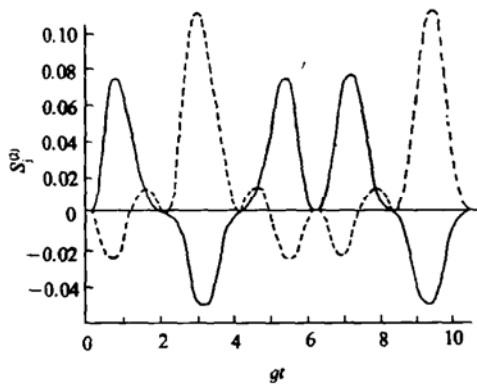


图 1 以双光子选加态作为初始场并包括 Stark 位移情况下原子偶极矩二阶压缩参量 $S_1^{(2)}$ 随时间的演化 其中 $r=0.5$, $\phi=0$, $|C_0|^2=3/4$

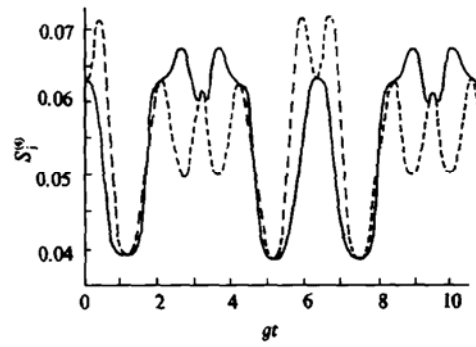


图 2 原子偶极矩的四阶压缩参量 $S_1^{(4)}$ 随时间的演化 各参数同图 1, 包括了 Stark 位移

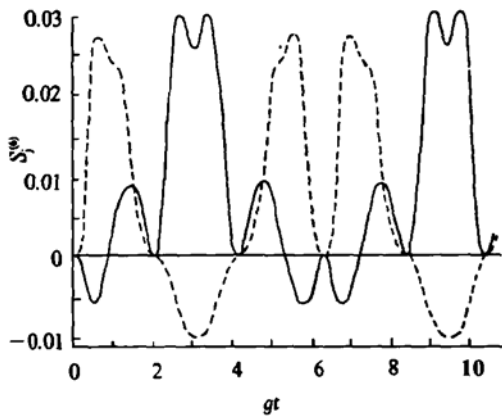


图 3 原子偶极矩的六阶压缩参量 $S_1^{(6)}$ 随时间的演化 各参数同图 1, 包括了 Stark 位移

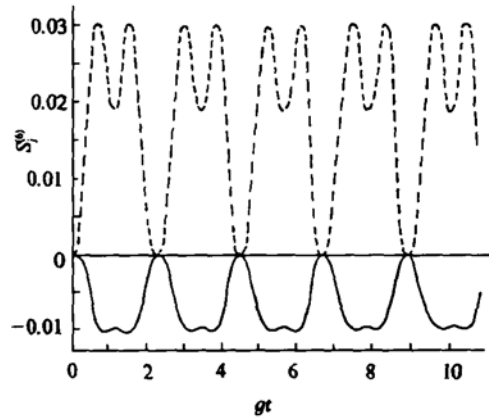


图 4 同图 3, 但不包括 Stark 位移

在图 1—3 中表示了存在 Stark 位移时 $S_j^{(k)}$ ($k=2, 4$ 和 6) 随时间的演化情况. 作为比较在图 4 中表示了不存在 Stark 位移时原子偶极矩的 6 阶压缩参量. 这些图中实线对应于 σ_1 的压缩情况 ($S_1^{(k)}$), 虚线对应于 σ_2 的压缩情况 ($S_2^{(k)}$), $r=0.5$, $\phi=0$, $|C_0|^2=3/4$. 从这些结果中可以看出在所讨论的情况中, 原子偶极矩不存在四阶压缩. 对于 $k=2, 6$, 如果考虑了 Stark 位移, 则 σ_1 和 σ_2 在同一参数条件下可以交替地表现出压缩, 但在不考虑 Stark 位移时偶极矩只有一个分量压缩 (如图 4 中的 σ_1 , 表现出 6 阶压缩). 还注意到 $S_j^{(k)}$ 随时间变化的周期性. 这周期在有 Stark 位移时比无 Stark 位移时长. 数值计算还表明随着 $|C_0|^2$ 减小, 压缩程度和压缩的持续时间都将减小.

5 结 论

本文在高阶测不准关系的基础上提出了原子偶极矩高阶压缩的定义. 在这个定义中判别高阶压缩的量是高级基本量子涨落. 这是向非经典过渡的理论极限. 如果原子偶极矩的色散分量或吸收分量的高级矩小于这理论极限, 那么该分量就表现出高阶压缩这一非经典特性. 当 $k=2$ 时, 我们的定义与文献中已有的二阶压缩的定义一致, 因此是它的自然推广. 值得注意的是基本量子涨落通常是与态有关的. 作为一个应用例子, 我们讨论了初始光场是 $|0\rangle$ 和 $|2\rangle$ 构成的迭加态, 原子处于基态的情况下双光子 J-C 模型中原子偶极矩的 2, 4 和 6 阶压缩, 并且考虑了 Stark 位移的影响. 通过例子说明了在所讨论的态中虽然原子偶极矩不存在 4 阶压缩, 但却存在 6 阶压缩. 可进一步讨论更高阶的情况.

- [1] Xiao-shen Li, D. L. Lin and Thomas F. George, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 2504.
- [2] Peng Zhou and Jin Sheng Peng, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 3331.
- [3] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Buckle and S. M. Barnett, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 2567.
- [4] C. K. Hong and L. Mandel, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 974.
- [5] M. M. Ashraf and M. S. K. Razmi, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 8121.
- [6] Tahira Nasreen and M. S. K. Razmi, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 4161.
- [7] R. R. Puri and R. K. Bullough, *J. Opt. Soc. Am.*, **B5**(1988), 2021.

HIGHER-ORDER SQUEEZING OF ATOMIC DIPOLE

DONG CHUAN-HUA

(*Department of Fundamental Courses, Shanghai University, Shanghai 200072*)

(Received 9 June 1995)

ABSTRACT

The higher-order fundamental quantum-mechanical fluctuation is given on the base of the higher-order uncertainty relation, from which the definition of higher-order squeezing for atomic dipole is introduced. As an example, we examine the second-, fourth- and sixth-order squeezing of atomic dipole in the two-photon Jaynes-Cummings model with the two-photon superposition state preparation.

PACC: 4250