

声光双稳系统的自控制反馈 耦合驱动混沌同步

刘金刚¹⁾²⁾ 沈 柯²⁾ 周立伟¹⁾

1) (北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

2) (长春光机学院理学院, 长春 130022)

(1996 年 6 月 3 日收到; 1996 年 12 月 17 日收到修改稿)

首先从理论上提出自控制反馈耦合驱动混沌同步化方案, 数值地分析了双 Bragg 型声光双稳系统混沌输出同步化条件, 使用最大条件 Lyapunov 指数作为同步化判据. 发现通过适当比例的耦合驱动可以使两组混沌系统达到同步的混沌输出, 引入自控制反馈可以加速达到同步化的速度并减小所需的最小耦合强度, 在噪声的影响下同样可以实现混沌的同步. 最后做了实验验证.

PACC: 0545

1 引 言

混沌同步化的研究是近年来十分活跃的领域, 它对深入研究非线性动力学中混沌的机制和特性有所推动, 在应用领域 (特别是保密通讯中^[1-3]) 也有巨大的潜力. 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了被称之为 Pecora-Carroll 法 (简称 P-C 法) 的混沌同步化方案, 针对 Lorenz 系统等经典模型做了数值验证, 并且在电路实验中获得了混沌的同步输出^[4-6]. 其他学者在这方面也得到不少结果^[7-13], 其中 Roy 和 Thornburg^[12] 实现了 Ar^+ 激光双路抽运的单棒 YAG 激光系统的混沌光同步输出, Sugawara 等^[13] 研究了两个被动调 Q 的 CO_2 激光系统混沌同步. 由 P-C 法实现混沌同步要求把动力系统分为两个子系统, 分别作为驱动和响应子系统, 然后复制一个相同的响应子系统, 如果响应子系统的所有条件 Lyapunov 指数全为负, 它们将给出完全相同的混沌输出, 而不论它们的初始状态是否相同 (但要在同步吸引域内).

现在的问题是, P-C 同步化方法只适用于多变量、可分解而且能复制的动力学系统, 对以单变量延时非线性微分方程描述的系统不再适用. 而包括光学双稳系统在内的延时非线性方程具有相当丰富的动力学行为, 尤其是光学双稳系统在光电子及信息科学等应用领域占有特殊的重要地位. 因此, 深入研究光学双稳系统混沌的同步将具有广泛的理论意义和应用价值.

本文以 Bragg 型声光双稳系统的混沌为例, 提出自控制反馈耦合驱动的方法实现混沌同步. 自控制反馈可以加速同步化并减小所需的最小耦合强度, 由噪声干扰判定法得到

了同步化稳定性的验证. 利用最大条件 Lyapunov 指数作为混沌同步化的判定标准, 给出同步化实现与耦合强度及反馈强度的定量关系, 找到了稳定同步的区域, 指出不规则混沌同步化窗口的存在. 最后给出实验结果.

2 同步原理

Bragg 声光双稳系统的动力学方程为^[14]

$$\tau_0 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \pi \{ A - \lambda \sin^2 [x(t - \tau_d) - x_b] \}, \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 是系统状态变量; λ 与入射光强及放大器的放大倍数有关, 是决定系统运行状态的分叉参数; A, x_b 分别是放大器和驱动源偏压; τ_0, τ_d 是系统响应时间及延时时间. 对一定的参数条件及较长的延时 ($\tau_d \gg \tau_0$), 方程(1)将给出混沌解.

从方程(1)可以看出, 这里无法进行子系统的分解来应用 P-C 法实现混沌同步. 下面我们构造这样的两个相同系统 S_1 和 S_2 , 使 S_1 的输出变量以一定的比例耦合到 S_2 中的延时项, 总系统的动力学方程为

$$\tau_{01} \frac{dx_1(t)}{dt} + x_1(t) = \pi \{ A_1 - \lambda_1 \sin^2 [x_1(t - \tau_{d1}) - x_{b1}] \}, \quad (2)$$

$$\tau_{02} \frac{dx_2(t)}{dt} + x_2(t) = \pi \left\{ A_2 - \lambda_2 \sin^2 \left[\frac{x_2(t - \tau_{d2}) + k \cdot x_1(t - \tau_{d1})}{1 + k} - x_{b2} \right] \right\}, \quad (3)$$

其中 k 为耦合因子. S_1 相当于驱动系统, S_2 相当于响应系统, S_2 的状态不影响 S_1 即为单向耦合而非互耦合.

当某一时刻引入耦合使 $k > 0$, 则 S_1 的混沌轨道开始影响 S_2 的混沌特性, 下面我们先数值地证明, 当 k 足够强时, S_2 的轨道将最终落在 S_1 的混沌轨道上而实现了两个系统的混沌同步.

设 $\tau_{01} = \tau_{02} = 0.5 \mu s$, $\tau_{d1} = \tau_{d2} = 2.85 \mu s$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.9$, $A_1 = A_2 = 0.5$, $x_{b1} = x_{b2} = \pi/4$, 初值条件取为 $x_1^0(0) - x_1^0(\tau_d) = 0.6$; $x_2^0(0) - x_2^0(\tau_d) = 1.5$, 数值求解(2), (3)式, 取 $k = 0.5$, 则响应系统与驱动系统将逐渐趋于同步, 如图 1(a), (b)所示.

为使同步化尽快到达, 我们引入自控制反馈作用于可调参数, 在方程(3)中加入控制项, 使其变成

$$\tau_{02} \frac{dx_2'(t)}{dt} + x_2'(t) = \pi \left\{ A_2 - k^f [x_1(t - \tau_{d1}) - x_2'(t - \tau_{d2})] - \lambda_2 \sin^2 \left[\frac{x_2'(t - \tau_{d2}) + k \cdot x_1(t - \tau_{d1})}{1 + k} - x_{b2} \right] \right\}, \quad (4)$$

则适当地控制强度 k^f 可以使两系统更快地进入同步. 例如当 $k^f = 0.2$, $k = 0.5$ 时 x_2' 的波形如图 1(c)所示. 变量差 $\delta x, \delta x'$ 标志了同步化效果, 见图 1(d), (e), 可见通过加入适当强度的自控制反馈可以减少同步达到所需的时间. 图 1 中, 耦合驱动在 $t = 0$ 开始实施.

对于实际系统, 噪声是不可避免的, 而且产生严格相同的两个系统也不可能. 因此, 实际中必须考虑噪声及系统参数的偏差. 为此, 在方程(2), (3), (4)的状态变量上加入相对强度为 5% 的随机噪声, 使系统参数具有 5% 的相对偏离, 以相同初始条件求解(2), (3),

(4)式,适当的 k 和 k^f 仍然可以实现混沌的同步,如图 2 所示 $k=0.6$, $k^f=0.2$ 时的同步波形.图 2 中 $200\mu\text{s}$ 以后的波形没有给出,我们计算至 $t=100\text{ s}$,没有发现分离.在 δx (或 $\delta x'$) 稳定下来后,计算求得 δx (或 $\delta x'$) 的摆动幅度是未加同步措施时的 10% 以下.因此可以看出,在上面较强的噪声及系统偏差情况下,这种方法的同步效果非常好.

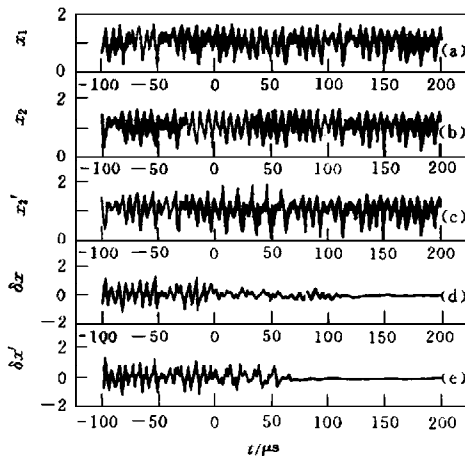


图 1 同步化混沌的波形 (其中 $k=0.5$, $k^f=0.2$)
(a), (b), (c) 分别是驱动信号波形和未加及施加反馈项的响应波形, (d), (e) 是两种同步情况下的同步化差值, 自控制反馈耦合驱动于 $t=0$ 时刻施加

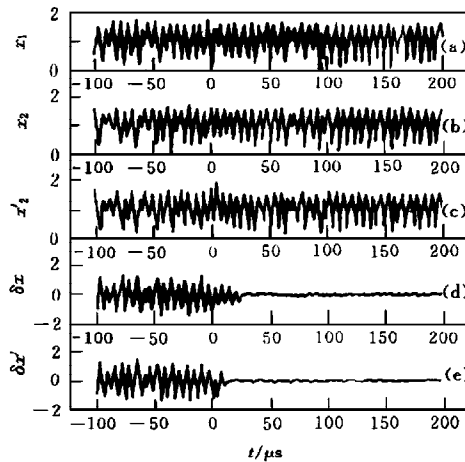


图 2 有噪声及系统偏差时的同步化波形 (其中 $k=0.6$, $k^f=0.2$) 噪声幅度及系统偏差都为 5%, (a) — (e) 的意义同图 1, $t=0$ 时施加自控制反馈耦合驱动

3 同步方法的 Lyapunov 指数分析

下面从 Lyapunov 指数分析的角度来讨论同步化原则. 由于讨论的单变量延时微分方程相当于无穷维自治微分系统, 因此其条件 Lyapunov 指数有无穷多个, 导致求解无穷阶本征矩阵的本征值来获得所有条件 Lyapunov 指数相当复杂. 为此, 我们使用最大条件 Lyapunov 指数来作为混沌同步化的判定依据, 将会看到这种方法是有效且方便的.

分析长延时微分系统最方便的方法是用迭代模型, 这将使求解最大条件 Lyapunov 指数大为简化. (2), (4) 式的迭代方程为

$$x_{1, n+1}(t') = \pi \{ A - \lambda \sin^2 [x_{1, n}(t') - x_b] \}, \quad (5)$$

$$x_{2, n+1}(t') = \pi \left\{ A - k^f [x_{1, n}(t') - x_{2, n}(t')] - \lambda \sin^2 \left[\frac{x_{2, n}(t') + k \cdot x_{1, n}(t')}{k+1} - x_b \right] \right\}, \quad (6)$$

其中 $0 \leq t' \leq \tau_d$. 由 (6) 式的变分方程可得系统 S_2 的最大条件 Lyapunov 指数, 记为 MCLE :

$$\text{MCLE} = \sup_{0 \leq t' \leq \tau_d} \left\{ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \ln \left| \pi \cdot k^f - \frac{\pi \cdot \lambda}{k+1} \sin \left[2 \frac{x_{2,n}(t') + k \cdot x_{1,n}(t')}{k+1} - 2x_b \right] \right| \right\}. \quad (7)$$

同时求解(5), (6), (7)式就可以得到 MCLE, 它标志响应系统在驱动系统的耦合驱动下其轨道本征方向指数收缩或分离程度的平均值中最大的一个, 由它的正负可以作为混沌能否同步的判据.

当(7)式 $k^f=0$, $k=0$ 时, 得到的是驱动系统(或响应系统)的最大 Lyapunov 指数(记为 MLE). 图 3 给出了 $k^f=0$, A 和 x_b 取值与上节相同条件下的同步进程和 Lyapunov 指数. 其中 $k=0.65$, (a) 为 $\lambda=0.9$ 时响应变量和驱动变量之差, (b) 为分叉图, (c) 为 Lyapunov 指数, 图中曲线 1 为未加同步措施时系统的 MLE, 曲线 2 为未加自控制反馈时耦合驱动下的 MCLE, 它在 $\lambda=0.9$ 处为负值, 因此实现了混沌同步.

为分析混沌同步可否实现与耦合强度的关系, 作 MCLE 与 k 的关系曲线, 示于图 4 (a) ($k^f=0$, $\lambda=0.9$), 可得到近似直线的曲线, MCLE=0 处是可实现同步化的最小耦合强度 $k_{\min}$. 对所有 λ 分叉参数作一族这样的曲线, 就可以把 $k_{\min}$ 与 λ 的关系曲线作出, 如图 4(b). 可见, 不同的分叉参数 λ 对应有不同的 $k_{\min}$ 值, 但总体趋势是 λ 越大要求 $k_{\min}$ 越大, 其中在周期 3 窗口 $k_{\min}$ 降至 0, 说明周期状态的同步不需要保持耦合. 根据此曲线可以确定不同程度的混沌(由 λ 标志)实现同步所需的最小耦合强度.

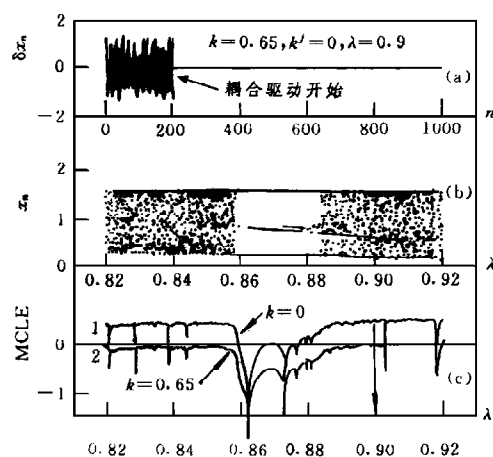


图 3 $k^f=0$, $k=0.65$ 时混沌同步及 Lyapunov 指数 (a) 为 δx_n ; (b) 为分叉图; (c) 中曲线 1 为 MLE, 曲线 2 为 MCLE

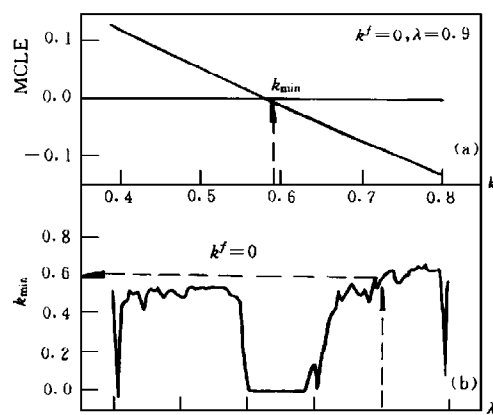


图 4 最小耦合强度曲线 (a) 为 MCLE- k 曲线; (b) 为 $k_{\min}$ - λ 曲线

以上是 $k^f=0$ 的情况. 当 $k^f \neq 0$ 时就比较复杂, 因为 k 和 λ 为定值时 MCLE- k^f 曲线不再是单调的规则曲线, 而是不规则 V 字形曲线, 如图 5 曲线 1 所示. 曲线 1 与 MCLE=0 有两个特殊交点 $k_{\min}^f$ 和 $k_{\max}^f$, 当 $k_{\min}^f < k^f < k_{\max}^f$ 时始终有 MCLE<0, 故可以实现稳定的同步. 当 k 增大(或减小)时, 曲线 V 字型开口缩小(增大)并下移(上升), 由于左半支的特殊形状导致 $k_{\min}^f$ 随 k 变化的不规则, 而右半支形状规则导致 $k_{\max}^f$ 变化的规则性. 这样, 作

$k_{\min}^f, k_{\max}^f$ 与 k 的关系曲线即得可以稳定地实现同步的区域, 我们称之为稳定同步区¹⁾, 图 6(a) 中上下两条曲线之间为 $\lambda=0.9$ 时的稳定同步区. 若对不同 λ 作出所有稳定同步区, 则可以求得三维的稳定同步空间.

在稳定同步区下边界附近, 对某些范围的 $k, k^f < k_{\min}^f$ 时仍然有同步化的可能, 如 $k=0.34$ 时 $k^f=0.385-0.40$ 可实现混沌同步, 这里我们称其为同步化窗口, 图 5 中给出了曲线 1 上 M 点同步化窗口的放大图, 在图 6(a) 中就相当于稳定同步区外的一些岛屿 (图中未画出). 一般而言, 实际应用中应选择稳定同步区, 必要时可以考虑在同步窗口工作.

这种含自控制反馈的耦合驱动混沌同步方案有较大优点, 它不仅明显减小无反馈的耦合同步所需的最小耦合强度, 而且有些情况下可以不需要耦合驱动, 如图 6 中 $k=0$ 时仍有一定范围 (k^f 轴上 q, w 两点之间) 的 k^f 可以实现同步; 当只用反馈的办法不能实现混沌同步时 (如图 6(b), λ^* 处), 引入适当的耦合驱动可以达到同步 (例如, $\lambda=1.2, k=0$ 时无法实现混沌同步, 见图 5 中曲线 2; 引入 $k=0.34$ 的耦合驱动, 曲线 2 变为曲线 3, 对应 $\text{MCLE} < 0$ 的 k^f 能够实现同步). 这一点十分重要, 在实际应用中将带来很大方便.

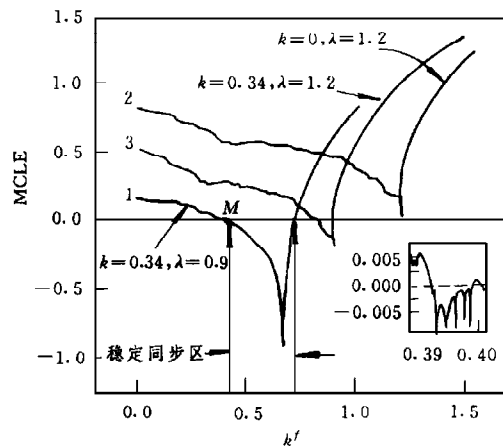


图 5 MCLE- k^f 曲线 曲线 1 为 $\lambda=0.9, k=0.34$; 曲线 2 和曲线 3 为 $\lambda=1.2, k$ 分别为 0 和 0.34

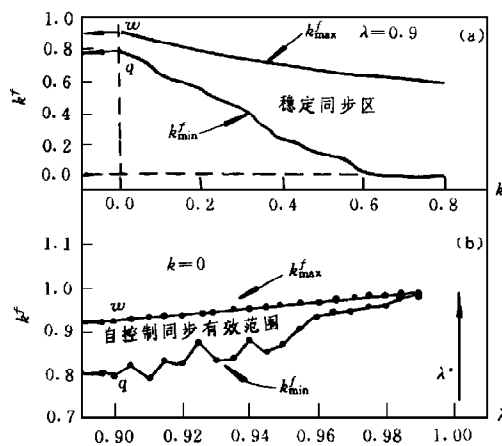


图 6 稳定同步区 (a) 为 $\lambda=0.9$, (b) 为 $k=0$ 无耦合时自控制同步有效范围 k^f - λ 图

4 实验结果

为验证以上的理论分析, 我们给出实验结果. 图 7 是实验原理示意图.

装置中包括上下完全相同的驱动和响应系统及中间的同步装置, 驱动和响应系统为典型的 Bragg 型声光双稳系统^[14]. 它们通过隔离取样后再按上述的同步原理作用于响应系统, 开关 K_1 打开, K 接通至响应系统一侧时二者将各自独立地工作, 把它们调整在相同参数状态的混沌区后闭合 K 到同步装置一侧, 把放大器 10, 12 的倍数调整在 0.8 及

1) 这里的同步稳定区及下述的同步化窗口, 是指控制参数空间而言, 不同于讨论初值空间同步化问题的同步区域概念^[15].

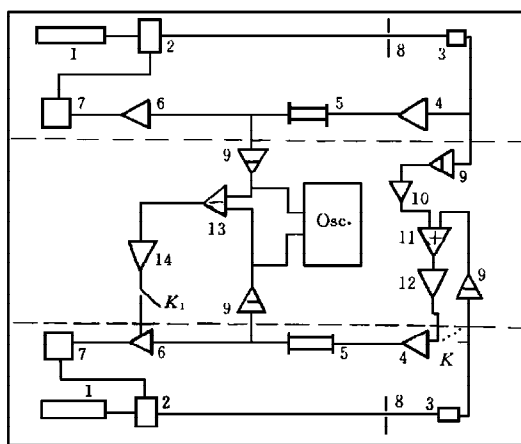


图7 实验装置示意图 1 He-Ne 激光器;2 声光调制器;3 光电接收器;4,6,10,12,14 放大器;5 延时线;7 超声驱动源;8 光阑;9 隔离取样器;11 加法器;13 减法器;K 耦合控制开关;K₁自控制反馈控制开关;Osc. 示波器

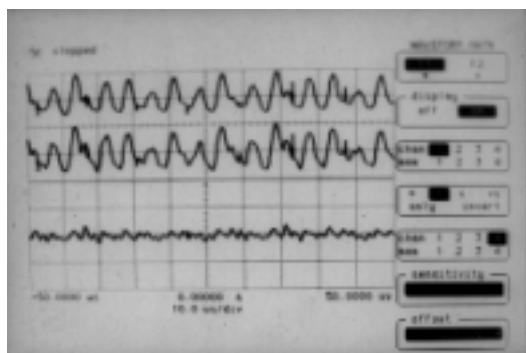


图8 混沌同步实验结果

0.5 左右(相当于 $k=0.8$)开始出现同步化趋势,若继续增加放大器 10 的倍数可出现稳定的同步。

闭合 K₁ 引入自控制反馈,把放大器 10 的倍数仍置为 0.8,当放大器 14 的倍数为 0.2 时系统已进入稳定的混沌同步.图 8 给出 HP-54503 数字示波器记录的此种情况下的同步波形照片.其中上面是两条已进入混沌同步化的波形曲线,下面是二者之差,所用刻度同为每格 4V.

从图 8 可见,混沌达到了同步,由于噪声无法消除,因此其差值不是恒为 0 的直线,而是随噪声有所起伏。

5 结论与讨论

本文提出一种新型的混沌同步方案,即自控制反馈耦合驱动混沌同步法.数值分析得出混沌同步化的条件,验证了用最大条件 Lyapunov 指数作为同步化判据的有效性,指出不规则同步化区的存在以及寻找稳定同步区和同步窗口的方法,处理过程中的数值选用带有一般性。

整套理论虽都以延时微分系统为背景,从声光双稳系统的数学模型出发展开讨论,但此混沌同步原理也适合于自治微分系统的混沌同步,甚至对超混沌的同步也可能有效。

Lyapunov 指数分析时使用了长延时近似下的迭代模型,若仍用求解延时微分方程的

办法也可以,但将占用相当多的计算时间.一般地,长延时极限近似求得的 Lyapunov 指数要稍高些,因此所需最小耦合强度 $k_{\min}$ 比实际微分方程求出的偏大些.

本结论为光电子领域混沌同步、对抗、保密通讯等的应用提供了使用光学双稳装置的理论依据.

- [1] U. Parlitz and S. Ergezinger, *Phys. Lett.*, **A188**(1994), 146.
- [2] K. M. Cuomo and A. V. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.*, **71**(1993), 65.
- [3] Young Hun Yu, Keumcheol Kwak and Tong Kun Lim, *Phys. Lett.*, **A197**(1995), 311.
- [4] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 2374.
- [5] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990), 821.
- [6] L. M. Pecora and T. L. Carroll, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **38**(1991), 453.
- [7] Toshimitsu Ushio, *Phys. Lett.*, **A198**(1995), 14.
- [8] Young Hun Yu, Keumcheol Kwak and Tong Kun Lim, *Phys. Lett.*, **A191**(1994), 233.
- [9] T. L. Carroll and L. M. Pecora, *Physica*, **D67**(1993), 126.
- [10] T. C. Newell, P. M. Alsing, A. Gavrielids *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 1647.
- [11] H. G. Winful and L. Rahman, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 1575.
- [12] R. Roy and K. S. Thornburg, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 2009.
- [13] T. Sugawara, M. Tachikawa, T. Tsukamoto *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 3502.
- [14] R. Vallee, C. Delisle and J. Chrostowski, *Phys. Rev.*, **A30**(1984), 336.
- [15] Rong He and P. G. Vaidya, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), 7387.

SELF-CONTROL FEEDBACK SYNCHRONIZATION OF CHAOS BY COUPLING-DRIVING IN ACOUSTO-OPTIC BISTABLE SYSTEM

LIU JIN-GANG^{a)b)} SHEN KE^{b)} ZHOU LI-WEI^{a)}

a)(*Department of Engineering Optics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*)

b)(*Department of Physics, Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, Changchun 130022*)

(Received 3 June 1996; revised manuscript received 17 December 1996)

ABSTRACT

The paper proposes theoretically the method of chaos synchronization by self-controlled feedback coupling-driving, and studies numerically on the condition of chaotic synchronization in two Bragg acousto-optic bistable (AOB) systems. The maximum conditional Lyapunov exponent (MCLE) are considered as the criteria of synchronization. It is found that one can gain the chaotic outputs synchronized of the two systems if one system is coupling-driven appropriately by another. When self-controlled feedback on parameter introduced, synchronization can be realized faster and the required minimum stiffness of coupling is decreased. The synchronization is also gained when the effect of noise is considered. The result of experimental test is also given.

PACC: 0545