

晶格原子与光场相互作用体系的 元激发——能级激元^{*}

段路明 郭光灿

(中国科学技术大学物理系, 合肥 230026)

(1996 年 7 月 18 日收到; 1996 年 12 月 24 日收到修改稿)

对光场与窄能带晶体的强耦合体系可引进一种新型的元激发——能级激元, 得出了该元激发的能谱, 并分析了其一些性质.

PACC: 4250; 7820

1 引 言

在处理光与固体相互作用时, 传统的做法多对光场采用经典描述^[1,2]或者把固体当作一个经典介质^[3,4]. 对这类现象的描述, 有些必须采用全量子理论, 超荧光便是一个例子. 本文将用全量子理论来分析量子光场对晶格原子的激发. 结果发现, 在强耦合条件下系统可引进一种新型的元激发——能级激元. 该元激发的引入, 将会给分析光与晶体强耦合体系的性质提供很大的便利. 本文考虑原子间距较大的晶体, 此时原子间相互作用很弱, 也就是通常所说的类晶气体^[5], 实验上已经制备出这种类型的晶体^[6]. 该晶体能带很窄, 各原子外层电子可近似用原子能级来描述. 通常关心光场引起两能级间电子的跃迁, 此时可采取两能级近似. 当晶体一个格点原子上电子被光场激发到上能级, 它可以通过辐射光子回到下能级, 而辐射出的光子又可被其他原子上的电子吸收而跃迁到上能级. 本文表明这种作用过程必然导致一种整体元激发, 即能级激元. 我们用全量子理论来描述该系统, 得出了系统能级激元的结构, 并分析了一些统计性质.

2 光场与晶体的耦合模——能级激元

对很窄能带的晶体各格点原子能级基本独立, 而两能级原子体系与辐射场相互作用的哈密顿量为^[7]

$$H = \hbar \left[\omega \sum_i S_i^z + \sum_k \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_i \sum_k g_k (a_k^\dagger S_i^- e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} + \text{h.c.}) \right], \quad (1)$$

其中 $\sum_i$ 为对晶格格点求和; $\sum_k$ 为对光场模式求和; 晶体中波矢 $\mathbf{k}$ 须满足周期性条件, 即

^{*} 国家自然科学基金及国家攀登计划资助的课题.

$\mathbf{k} = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i \mathbf{b}_i}{N_i}$, $\mathbf{b}_i$ 为倒格矢, n_i 为整数, N_i 为沿 $\mathbf{b}_i$ 方向的格点数, $N = N_1 N_2 N_3$ 为总格点数. 对尺度远大于光波波长的晶体, $\mathbf{k}$ 近似连续. 式中 $\hbar\omega = E_A - E_F$ 为两能级能量差; $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|c$ 为 $\mathbf{k}$ 模光频率; $g_{\mathbf{k}}$ 为 $\mathbf{k}$ 模光场与 $\mathbf{l}$ 格点原子的耦合常数, 因各格点原子相同, 故 $g_{\mathbf{k}}$ 不依赖于 $\mathbf{l}$; $S_l^{\pm}$, S_l^z 为自旋 $1/2$ 的自旋算符; $a_{\mathbf{k}}$ 为 $\mathbf{k}$ 模光湮没算符. 该哈密顿量亦用于描述超辐射.

现在我们来分析此体系基态及低激发态特性. 显然系统基态为光场处于真空态且所有原子处于下能级, 即在 S_l^z 为 $-1/2$ 的本征态. 为分析其激发态特性, 引入如下变形的 Holstein-Primakoff 变换^[8], 该变换在铁磁理论中常用.

$$S_l^+ = b_l^+ (\sqrt{1 - b_l^+ b_l}), \quad (2)$$

$$S_l^- = (\sqrt{1 - b_l^+ b_l}) b_l, \quad (3)$$

$$S_l^z = b_l^+ b_l - \frac{1}{2}. \quad (4)$$

由 $S_l^{\pm}$, S_l^z 的对易式, 易证 b_l^+ , b_l 满足标准玻色算符对易式

$$[b_l, b_{l'}^+] = \delta_{ll'}. \quad (5)$$

S_l^z 的本征值为 $-1/2, 1/2$ 的本征态分别对应粒子数 $b_l^+ b_l$ 的本征值为 $0, 1$ 的本征态.

将变换(2), (3), (4)式代入哈密顿量(1)式, 则哈密顿量完全用玻色算符表示出来. 对于低激发态, 晶体中处于上能级原子数远小于格点数 N , 因而每个原子处于上能级的概率 $\langle b_l^+ b_l \rangle \ll 1$, 在该近似下, 系统哈密顿量简化为

$$H = \hbar \left[-\frac{1}{2} N\omega + \omega \sum_l b_l^+ b_l + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \sum_l \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^+ b_l e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l} + \text{h.c.}) \right]. \quad (6)$$

引入变换

$$c_{\mathbf{k}} = N^{-\frac{1}{2}} \sum_l b_l e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_l}, \quad (7)$$

利用晶格求和关系式^[8]

$$\frac{1}{N} \sum_l e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_l} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (8)$$

得 $c_{\mathbf{k}}$ 仍满足玻色对易关系

$$[c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (9)$$

将变换(7)式代入哈密顿量(6)式, 得

$$H = \hbar \left[-\frac{1}{2} N\omega + \sum_{\mathbf{k}} [\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \omega c_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}} \sqrt{N} (a_{\mathbf{k}}^+ c_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^+)] \right]. \quad (10)$$

变换(7)式揭示出能级的激发不是固定在某单个原子上, 而是以一种波的形式在晶体中存在, 这是一种集体激发, 可称为能级波. 哈密顿量(10)式表明, $\mathbf{k}$ 模能级波与 $\mathbf{k}$ 模光场发生耦合, 而不同 $\mathbf{k}$ 的能级波与光场没有相互作用.

为求出系统的元激发能谱, 需进一步将哈密顿量对角化. 引入如下变换,

$$\alpha_{\mathbf{k}} = (\cos \theta_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}} + (\sin \theta_{\mathbf{k}}) c_{\mathbf{k}}, \quad (11)$$

$$\beta_{\mathbf{k}} = -(\sin \theta_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{k}} + (\cos \theta_{\mathbf{k}}) c_{\mathbf{k}}, \quad (12)$$

显然 α_k 和 β_k 仍满足标准玻色对易子

$$[\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger] = [\beta_k, \beta_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (13)$$

将变换(11), (12)式代入哈密顿量(10)式, 并选择 θ_k 满足

$$\tan(2\theta_k) = \frac{2\sqrt{N}g_k}{\omega_k - \omega}, \quad (14)$$

此时非对角项被消去, 哈密顿量简化为

$$H = \hbar \left[-\frac{1}{2} N\omega + \sum_k [\Omega_k^+ \alpha_k^\dagger \alpha_k + \Omega_k^- \beta_k^\dagger \beta_k] \right], \quad (15)$$

其中

$$\Omega_k^+ = \omega_k \cos^2 \theta_k + \omega \sin^2 \theta_k + \sqrt{N}g_k \sin(2\theta_k), \quad (16)$$

$$\Omega_k^- = \omega_k \sin^2 \theta_k + \omega \cos^2 \theta_k - \sqrt{N}g_k \sin(2\theta_k). \quad (17)$$

由此可见, 晶体中存在两支非简并的光场能级耦合模式. 其色散关系即 $\Omega_k^\pm$ 与 k 的关系由(16), (17)式给出.

3 能级激元的一些性质

一般情况下, (16), (17)式给出的能级激元的色散关系比较复杂, 我们考虑两种较简单情况.

在共振情况下, 即 $\omega_k = \omega$ 时, $\Omega_k^\pm = \omega \pm \sqrt{N}g_k$, 光场与原子的耦合系数 $\sqrt{N}g_k$ 决定于原子的偶极矩和晶体的原子数密度. 通常 $\sqrt{N}g_k \ll \omega$, 但当原子偶极矩显著增大时(如强光场引起较大的诱导偶极矩), 光场原子的耦合很强, 此时能级激元的能级相对于原子能级发生分裂, 因而产生可观的物理效应. 能级激元的能级对称排列于原子能级的两侧, 其能级间隙为 $2\sqrt{N}g_k$.

在长波极限情况下, 即 $\omega_k = |k|c \ll \omega$, 注意到耦合系数 g_k 可分解为 $g_k = g_0 \sqrt{\omega_k}$, 其中 g_0 不依赖于 k , (16), (17)式简化为

$$\Omega_k^+ \approx \left(1 - \frac{Ng_0^2}{\omega}\right) |k|c, \quad (18)$$

$$\Omega_k^- \approx \omega + \frac{Ng_0^2}{\omega} |k|c. \quad (19)$$

其长波色散关系 $\Omega_k^\pm \propto |k|$, 因而与声子一样, 其低温比热将正比于 T^3 .

由能级激元频谱还可以分析格点原子能级下降算符的时间演化, 利用变换(7), (11), (12)式的逆变换及哈密顿量(15)式得 l 格点算符

$$b_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k [\sin(\theta_k) \alpha_k(0) e^{i(k \cdot R_l - \Omega_k^+ t)} + \cos(\theta_k) \beta_k(0) e^{i(k \cdot R_l - \Omega_k^- t)}]. \quad (20)$$

它由晶体中两组速度不同的行波构成. 设初始时, l_0 格点原子处于上能级, 其他格点原子均在下能级且光场为真空态, 则 t 时刻 l 格点原子处于上能级的概率为

$$\langle b_l^\dagger b_l \rangle = \left| \frac{1}{N} \sum_k [\sin^2(\theta_k) e^{-i\Omega_k^+ t} + \cos^2(\theta_k) e^{-i\Omega_k^- t}] e^{-ik \cdot (R_l - R_{l_0})} \right|^2. \quad (21)$$

它由许多频率不同的随时间振荡的因子叠加构成,其概率将会出现崩坍复原现象.

能级激元是一种光场与能级波的耦合模,我们可以通过控制光场的状态,将能级激元制备到各种各样的初始态.例如在初始时格点原子全部处于下能级的情况下,通过输入粒子数压缩态或正交位相分量压缩态光场,可以将能级激元制备到相应的非经典态.因此,能级激元概念的引入,为分析光场与晶体的强耦合体系的性质提供了很大的便利.

- [1] 沈元壤,非线性光学原理,顾士杰译(科学出版社,北京,1987),第1—57页.
- [2] Q. H. F. Vrehen and H. M. Gibbs, *Superfluorescence Optics*(Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, 1982).
- [3] R. J. Glanber and M. lewenstein, *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 467.
- [4] D. J. Santos and R. Loudon, *Phys. Rev.*, **A52**(1995), 1538.
- [5] 郭光灿、吴志兵,物理学报, **44**(1995), 1042; Ling Tian and Guo Guang-can, *Acta Physica Sinica* (*Overseas Edition*), **5**(1996), 15.
- [6] A. Hemmerich and T. W. hansch, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993), 410.
- [7] 郭光灿,量子光学(高等教育出版社,北京,1990),第420—422页.
- [8] 李正中,固体理论(高等教育出版社,北京,1985),第78—80页.

ENERGY-LEVEL-EXCITATIONS——THE ELEMENTARY EXCITATIONS IN THE CRYSTAL-OPTICAL-FIELD STRONG-COUPLED SYSTEM

DUAN LU-MING GUO GUANG-CAN

(*Department of Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026*)

(Received 18 July 1996; revised manuscript received 24 December 1996)

ABSTRACT

It is found that a new kind of excitations, the energy-level-excitations, exist in a narrow-band crystal which strongly couples to the optical field. The energy spectrum and some other properties of the energy-level excitations are analyzed.

PACC: 4250; 7820