第 46 卷 第 7 期 1997 年 7 月
1000-3290/97/46(7)/1249-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.46, No.7, July, 1997

与一个非局域对称有关的 Kaup-Kupershmidt 方程新的精确解

韩 平
(舟山师范专科学校物理系,舟山 316004)
楼森岳
(宁波师范学院物理系,宁波 315211;中国科学院理论物理研究所,北京 100080)
(1996 年 9 月 23 日收到)

利用 Kaup-Kupershmidt(KK)方程的一个非局域对称,可在两种不同的方法上找到方程新的精确解.首先,用标准的展开近似得到 KK 方程有限的 Lie-Bäcklund 变换和单孤子解.其次,把一些局域对称与这个非局域对称组合起来,给出其群不变解,进而可求得新的孤子解.

PACC: 0340; 0220

1 引 言

对称理论的研究在物理学、化学、数学等领域起着非常重要的作用,在可积模型的研究中更是如此.对称包括局域对称和非局域对称两种,它在非线性偏微分方程解的结构中起着重要作用[1].在对称变换下,一个对称能找到其群不变解,因此用这些对称,能够容易地由经典李群法[1]和非经典李群法[2]得到非线性偏微分方程的约化,由此求得该方程的解.对非线性偏微分方程,我们可用递推算子 Φ 及其逆递推算子 Φ^{-1} 不断地作用于一个已知的对称后,得到一系列无穷多对称.近几年来一些著名的方程,其逆递推算子 Φ^{-1} 已被找到,如 KdV 方程[3]、mKdV 方程[4]、AKNS 方程[5]、KK 方程[6]和 Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera(CDGSK)方程[7].把逆递推算子 Φ^{-1} 作用于平凡对称后,并取 $D^{-1}0\equiv\int^x 0\,\mathrm{d}x=$ 常数,可得到大量的非局域对称[3,4,6,7].本文将利用 KK 方程的非局域对称及相应的 Lie-Bäcklund 变换,给出方程新的孤子解.

2 KK 方程的有限 Lie-Bäcklund 变换及新的孤子解

KK 方程[8]为

$$u_t = K_0(u) = u_{xxxxx} + 10\,uu_{xxx} + 25\,u_x u_{xx} + 20\,u^2 u_x. \tag{1}$$

利用其最简单的一个非局域对称[6]:

$$M_0 = Dg^2, \tag{2}$$

式中 $D=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $DD^{-1}=D^{-1}D=1$, $g\equiv\exp(D^{-1}f)$.赝势 $f(x,t)$ 满足下面的 Riccati

方程：

$$f_x = -\frac{1}{2}f^2 - u, \tag{3}$$

$$f_t = -\left(\frac{1}{2}u_{xx} + 2u^2\right)f^2 + (u_{xxx} + 8uu_x)f - u_{xxxx} - 8u_x^2 - 9uu_{xx} - 4u^3. \tag{4}$$

当 $f(x, t)$满足自洽条件 $f_{xt} = f_{tx}$时，正是 KK 方程(1).

下面对非局域对称 M_0 作变换，由文献[9]知

$$\delta^u \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon} = Dg^2 = 2g^2 f. \tag{5}$$

这相当于对 u 作无穷小变换，$u \to u + \varepsilon\delta^u$，$\varepsilon$ 是无穷小参量.由(3)式：

$$\delta_x^f = -f\delta^f - \delta^u \qquad (f \to f + \varepsilon\delta^f),$$

得

$$\delta^f = -\frac{2}{3}g^2 = -\frac{2}{3}\exp(2D^{-1}f), \tag{6}$$

再引入赝势 $w(x, t)$，且令

$$w_x = f \quad (w \to w + \varepsilon\delta^w), \tag{7}$$

则 $\delta_x^w = \delta^f$，即

$$\delta^w = -\frac{2}{3}D^{-1}g^2 \equiv -\frac{2}{3}p, \tag{8}$$

式中赝势 $p(x, t)$满足：

$$p_x = g^2 = \exp(2w), \tag{9}$$

$$\delta_x^p = 2g^2\delta^w \qquad (p \to p + \varepsilon\delta^p),$$

$$\delta^p = -\frac{2}{3}p^2. \tag{10}$$

这样对于 M_0 的变换由 u 及 f, w, p 三个赝势组成封闭.

$$\widetilde{M}_0 = \left(2f\exp(2w),\ -\frac{2}{3}\exp(2w),\ -\frac{2}{3}p,\ -\frac{2}{3}p^2\right)^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

式中右上角 T 指的是基的变换，为了获得(11)式的有限 Lie-Bäcklund 变换，可以归结为解下列方程：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\varepsilon} = 2\tilde{g}^2\tilde{f}; \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{f}}{\mathrm{d}\varepsilon} = -\frac{2}{3}\tilde{g}^2; \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{w}}{\mathrm{d}\varepsilon} = -\frac{2}{3}\tilde{p}; \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}\varepsilon} = -\frac{2}{3}\tilde{p}^2, \tag{12}$$

$$(\tilde{u}, \tilde{f}, \tilde{w}, \tilde{p})\Big|_{\varepsilon=0} = (u, f, w, p). \tag{13}$$

求解(12)式后，u 及三个赝势的有限 Lie-Bäcklund 变换可以写成

$$\tilde{u} = u + 6\varepsilon f\exp(2w)\frac{1}{3+2\varepsilon p} - 6\varepsilon^2\exp(4w)\frac{1}{(3+2\varepsilon p)^2},$$

$$\tilde{f} = f - 2\varepsilon\exp(2w)\frac{1}{3+2\varepsilon p},$$

$$\tilde{w} = w + \ln\frac{3}{3+2\varepsilon p},$$

$$\tilde{p} = \frac{3p}{3+2\varepsilon p}. \tag{14}$$

这样可从初解出发利用有限的 Lie-Bäcklund 变换,得到新的孤子解.例如,取 u 的平凡解 $u=-\frac{1}{2}k^2$,由(3)式特殊地取赝势 $f=k$,再根据(7)和(9)式,可得到其他两个赝势 $w=k(x+k^4t)$, $p=\frac{1}{2k}\exp[2k(x+k^4t)]$,把上面的 u, f, w, p 代入(14)式,即可得到 KK 方程新的孤子解.

$$\tilde{u}=-\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k^2\operatorname{sech}^2(kx+k^5t+x_0)\qquad\left(x_0=\frac{1}{2}\ln\frac{\varepsilon}{3k}\right),\tag{15}$$

式中 ε 和 k 是任意常数.

3　KK 方程的对称与群不变解及约束

对于一高维的可积模型,利用对称约束,可得到相应的群不变解[1,10]和低维的可积模型,而 1+1 维的非线性偏微分方程经过约束,可得到相对应的常微分方程,这样为求解偏微分方程提供了一种新的方法.下面利用这种方法把 KK 方程的一个最简单的非局域对称 $\widetilde{\mathrm{M}}_0$ 和两个局域对称 u_x, u_t 组合起来,通过解约束方程 $\sigma=0$,能够给出相应的群不变解.

约束方程

$$\sigma=a_1\begin{pmatrix}u_x\\f_x\\w_x\\p_x\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}u_t\\f_t\\w_t\\p_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2f\exp(2w)\\-\frac{2}{3}\exp(2w)\\-\frac{2}{3}p\\-\frac{2}{3}p^2\end{pmatrix}=0,\tag{16}$$

式中 a_1 和 a_2 是常数,解(16)式实际上等价于解下面的特征方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{2f\exp(2w)}=\frac{\mathrm{d}f}{-\frac{2}{3}\exp(2w)}=\frac{\mathrm{d}w}{-\frac{2}{3}p}=\frac{\mathrm{d}p}{-\frac{2}{3}p^2}=\frac{\mathrm{d}x}{-a_1}=\frac{\mathrm{d}t}{-a_2}.\tag{17}$$

完成(17)式的积分后,解可以写为如下形式:

$$\begin{aligned}
p&=-\frac{3a_1}{2(x+c_1)},\\
w&=\ln\frac{c_2}{x+c_1},\\
f&=-\frac{2c_2^2}{3a_1(x+c_1)}+c_3,\\
u&=-\frac{3}{2}\left[c_3-\frac{2c_2^2}{3a_1(x+c_1)}\right]^2+c_4,\\
\xi&=a_2x-a_1t,
\end{aligned}\tag{18}$$

式中 $c_i=c_i(\xi)(i=1,2,3,4)$及 $\xi=\xi(x,t)$是 5 个群不变量.把(18)式代入(1),(3),(7)

和(9)式,可发现 $c_i = c_i(\xi)(i=1,2,3,4)$满足下面的常微分方程:

$$16F_\xi^3F_{\xi\xi\xi\xi\xi} - 80F_\xi^2F_{\xi\xi}F_{\xi\xi\xi\xi} - 60F_\xi^2F_{\xi\xi\xi}^2 + 260F_\xi F_{\xi\xi}^2F_{\xi\xi\xi}$$

$$-135F_{\xi\xi}^4 + 16\frac{a_1}{a_2^5}F_\xi^3(F_\xi - 1) = 0. \tag{19}$$

$$c_1 = a_2^{-1}(F-1), \quad c_2 = \left(\frac{3}{2}a_1F_\xi\right)^{1/2},$$

$$c_3 = a_2[\ln c_2]_\xi, \quad c_4 = -a_2c_{3\xi} + c_3^2. \tag{20}$$

原则上(19)式是可以求解的,这样求得 F 后代入(20)式,分别得到 c_1, c_2, c_3, c_4,然后再代入(18)式,即得到 KK 方程的解 $u(x,t)$.

4 结 论

本文从 KK 方程的一个最简单的非局域对称 M_0 出发,用上述两种不同的方法,得到了方程新的孤子解,这种方法具有普遍性,其他类型的非线性偏微分方程也可以通过这种方法得到新的精确解,这对解非线性偏微分方程,进一步揭示新的物理规律提供了一种新的途径,并有一定的实际意义.

[1] P.J.Olver, Applications of Lie Group to Differential Equations(Springer, Berlin, 1986).

[2] G.W.Bluman and I.D.Cole, *J. Math. Meth.*, **10**(1969), 1025.

[3] S.Y.Lou, *J. Math. Phys.*, **35**(1994), 2390.

[4] S.Y.Lou, *Phys. Lett.*, **B302**(1993), 261.

[5] S.Y.Lou and W.Z.Chen, *Phys. Lett.*, **A179**(1993), 271.

[6] P.Han and S.Y.Lou, *Chin. Phys. Lett.*, **10**(1993), 257.

[7] S.Y.Lou, *Phys. Lett.*, **A175**(1993), 23.

[8] A.P.Fordy and J.Gibbous, *Phys. Lett.*, **A75**(1980), 325.

[9] 谷超豪等著,孤立子理论与应用(浙江科学技术出版社,杭州,1990),第 216 页.

[10] 李翊神等编,非线性科学选讲(中国科学技术大学出版社,合肥,1994),第 165 页.

NEW EXACT SOLUTIONS OF THE KAUP-KUPERSHMIDT EQUATION RELATED TO A NON-LOCAL SYMMETRY

HAN PING

(*Department of Physics, Zhoushan Normal College, Zhoushan* 316004)

LOU SEN-YUE

(*Department of Physics, Ningbo Normal College, Ningbo* 315211;

Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

(Received 23 September 1996)

ABSTRACT

Using a non-local symmetry of the Kaup-Kupershmidt (KK) equation, we find a new exact solution in two different ways. Firstly, using the standard prolongation approach, we obtain the finite Lie Bäcklund transformation and the single soliton solution of the KK equation. Secondly, combining some local symmetries and the nonlocal symmetry, we get the group invariant solution and obtain the new soliton solution of the KK equation.

PACC: 0340; 0220