

混沌信号在子值域中的特性分析

袁 坚 肖先赐

(电子科技大学电子工程系, 成都 610054)

(1997 年 1 月 27 日收到)

针对 Kent 映射产生的子值域时间序列, 利用模糊延迟重构方法, 从相关维数、最大 Lyapunov 指数及可预测性等几个方面进行了分析. 研究发现, 子值域时间序列同样表现出混沌序列的性质, 但与原来的动力系统相比存在着一定的差异. 这一差异随着子值域大小的变化而变化.

PACC: 0545

1 引 言

混沌是一种非线性的、确定的低维动力系统的复杂行为. 已有多种利用时间序列的数值算法能够有效地定量说明混沌的动力学特性. 例如各种计算维数、Kolmogorov 熵及 Lyapunov 特征指数的算法等. 维数体现了动力系统的复杂性; 熵和特征指数则表征了混沌达到的水平. 混沌信号区别于随机的噪声主要表现在混沌信号可以通过重构体现在嵌入空间的一个低维流形上, 并且重构的轨迹是可以预测的.

从一个混沌系统观测到的时间序列一般都是指在所有可能的序列值构成的值域上的序列, 也就是说观测函数是吸引子所在流形上的光滑函数. 由这样的时间序列进行的重构才能反应原来动力系统的特性. 若是把值域比作观察动力系统的窗口, 那么由所有可能的序列值构成的值域便是一个能完整观察到动力系统的窗口. 如果观察窗口仅是由完整值域的一个子域——子值域构成, 则观察得到的序列也仅是完整值域下的时间序列的一个子集. 从这一缩小的窗口已不能观察到原来动力系统真正的形象, 或许完全是一个走样的东西. 由于原有动力系统及子值域的不同, 这一新的序列所反映的动力系统本身及其与原来动力系统之间的关系非常复杂, 也难以统一表述.

在实际工程问题中, 面对一个混沌系统, 由于观测手段的限制而只能在某一子值域内观测到信号, 或者在子值域内观测的信号才能保证较好的精度. 这就不得不正视这一问题: 子值域中的时间序列具有什么样的动力学特性, 其可预测性如何?

子值域上的时间序列已不是一个均匀抽样的时间序列, 不考虑抽样的不均匀性就无法真正体现其动力学特性. 用一种称作模糊延迟重构的方法进行重构, 对抽样不均匀的时间序列分析仍然可用均匀抽样时间序列的处理方法^[1]. 子值域上的动力学特点与原有动力系统表现出一定的差异. 这一差异随着子值域大小的变化而变化. 这一特点在解决具体工程问题时具有一定的指导意义.

2 模糊延迟重构与混沌信号分析

2.1 模糊延迟重构

数据的非均匀抽样问题常常被忽视.理想的均匀抽样往往难以做到,但一般总认为它的影响远不及测量噪声的影响,而在获得长时间连续的观测值遇到困难时,这一问题便显得突出了.

在近似理想抽样的前提下,可以进行均匀插值.而存在稀少的抽样或噪声影响较大时,利用插值增加数据量就会导致退化.在这样的条件下直接使用各种重构方法也会产生噪声增强^[1].模糊延迟重构^[1]作为一种改进的延迟重构方法,可以利用原有序列产生重构.

设观测到的序列为 $y(t)$,在均匀抽样条件下,用延迟重构产生的状态矢量为

$$\mathbf{Y}_i = [y(t_i) \ y(t_i - \tau) \ y(t_i - 2\tau) \cdots y(t_i - (m-1)\tau)], \quad (1)$$

其中 τ 为延迟时间, m 为嵌入维数.相应的重构轨迹为

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_0 \ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \cdots \ \mathbf{Y}_i \ \mathbf{Y}_{i+1} \ \cdots], \quad (2)$$

其中 i 为正整数.

当抽样不均匀时,可用模糊延迟重构方法进行重构.这时(1)式中的 τ 不再是一个常量,而是在一定的区间变动,即 $\tau \in (\tau_0 - \delta\tau, \tau_0 + \delta\tau]$,这时 τ 相应地可以在 $2\delta\tau$ 范围内变动.在重构状态矢量时,我们就以这一可适当变化的延迟时间,依次找到状态矢量中的元素,从而产生类似(1)式的状态矢量.如图1所示,在搜寻下一个延迟量时,尽量选取延迟时间接近 τ_0 的序列值.用这一模糊重构方法同样会得到与(2)式相同形式的重构轨迹.基于这一重构,可以像均匀抽样下的重构一样,进行动力学特性分析.

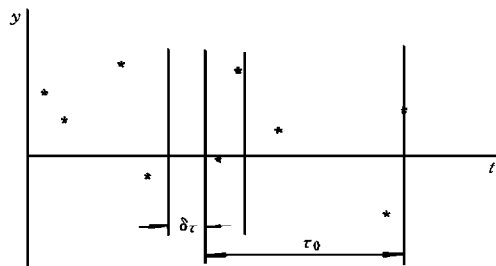


图1 模糊延迟重构示意图

对于选取 τ_0 和 $\delta\tau$,从互信息的角度会有比较好的理解^[1].利用互信息估计延迟时间的方法^[2],考虑 $\delta\tau$ 的影响,即可找到合适的 τ_0 和 $\delta\tau$.一般可在选出 τ_0 后,选择 $\delta\tau$ 尽量接近而不大于 τ_0 为佳^[1].详细讨论可参阅文献[1].

2.2 混沌信号分析

维数体现出动力系统的复杂程度, Lyapunov 指数则表征了动力系统的稳定性.下面仅就相关维数和最大 Lyapunov 指数的计算及预测模型进行简单论述.

相关维数的定义为

$$D_c = -\lim_{r \rightarrow 0} [\ln C_m(r) / \ln r], \quad (3)$$

其中 $C_m(r)$ 为相关累积量,

$$C_m(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}^N H\{\|Y_i - Y_j\|\}, \quad (4)$$

其中 N 为重构轨迹的长度, $H\{\cdot\}$ 为 Heaviside 函数, 符号 $\|\cdot\|$ 为范数. 计算相关维数的算法称作 Grassberger-Procaccia 算法^[3]. 为了避免同一条轨迹上的邻近点引起虚假的维数估计, 这里采用的是一种改进的 Grassberger-Procaccia 算法^[4].

Rosenstein 等人提出的计算最大 Lyapunov 指数的方法, 对嵌入维数、延迟时间、数据长度和噪声的变化表现出较好的鲁棒性^[5]. 这里选用这一方法计算最大 Lyapunov 指数 λ_1 . 设 $d(t)$ 表示相邻两点 (不在同一轨迹上) 的距离, 则

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t}, \quad (5)$$

其中 C 为初始分岔. 对重构轨迹上的某一点 Y_j 而言, $C_j = d_j(0) = \min \|Y_j - Y_{\hat{j}}\|$. C_j 为第 j 个点与最接近它的点 $\hat{j}$ (非同一轨道上) 间的距离, 则

$$d_j(i) = C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)} \quad (6)$$

表示 $i\Delta t$ 时刻的分岔, 则 $\ln d_j(i) - i\Delta t$ 曲线的斜率便体现出了 λ_1 , 即

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{i\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle, \quad (7)$$

其中 $\langle \rangle$ 代表对所有 j 的平均.

动力系统的重构其实是一个反问题, 亦即通过动力系统的状态, 反过来去构造系统的模型, 即建立

$$Y_{i+1} = F(Y_i) \quad (8)$$

中的函数 F . 进而可以写作

$$y(t + \tau) = F_1[y(t), y(t - \tau), \dots, y(t - (m - 1)\tau)]. \quad (9)$$

这就变成了一个预测模型的构造问题. 对于非均匀抽样, 相应的延迟用模糊延迟替代. 构造一个函数 $\hat{F}_1$ 逼近 F_1 有许多方法^[6], 而神经网络所具有的高度非线性的拓扑结构, 使其成为混沌系统建模的理想工具^[7]. 在此选择利用 B-P 算法训练的多层感知器构造 F_1 .

3 Kent 映射在子值域上的动力学特性分析

Kent 映射^[8]定义为

$$x(i+1) = \begin{cases} x(i)/a & 0 \leq x(i) < a, \\ [1 - x(i)]/(1-a) & a \leq x(i) \leq 1, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $0 < a < 1$, $0 \leq x(i) \leq 1$. 产生的序列在 $[0, 1]$ 区间均匀分布^[8], 这里选择 $a = 0.2$ ^[9].

图 2(a) 从左至右为嵌入维数 m 分别等于 1, 3, 5, 8, 12, 15 时计算 Kent 映射相关维数的 $\ln C_m(r) - \ln(r/r_0)$ 曲线, 其中 r/r_0 为归一化相对距离, 其斜率反应出相关维数的大小, 可以得到相关维数 $D_c \approx 1.0$. 图 2(b) 为估计最大 Lyapunov 指数的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线, 从其斜率可得到 $\lambda_1 \approx 0.45$.

在一个子值域 $[0.0, 0.25]$ 上观察, 得到一个非均匀抽样的序列, 图 3(a)所示为该序列的一个片段. 用该序列的 5000 个数据, 嵌入维数分别为 $m=2, 4, 6, 8, 10$, 延迟时间 $\tau=15$, $d\tau$ 取 10 时进行模糊延迟重构, 相应用改进的 Grassberger-Procaccia 算法^[4]计算相关

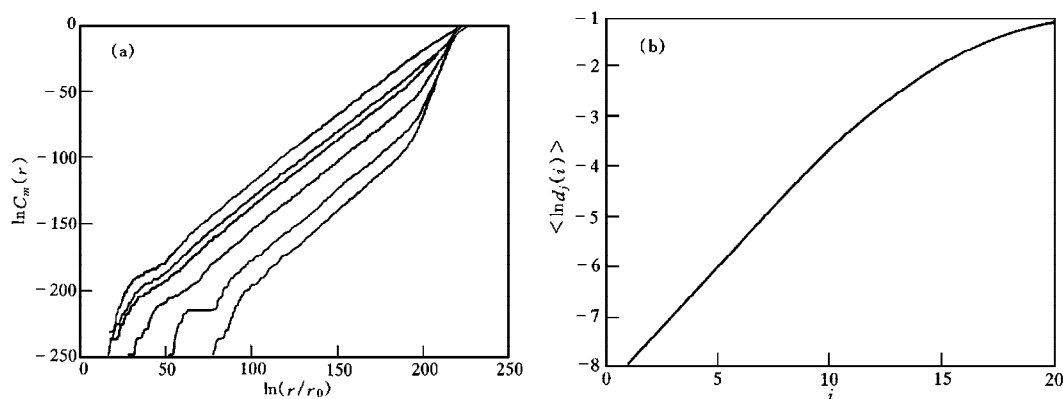


图 2 估计相关维数的 $\ln C_m(r) - \ln(r/r_0)$ 曲线(a)和估计最大 Lyapunov 指数的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线(b)

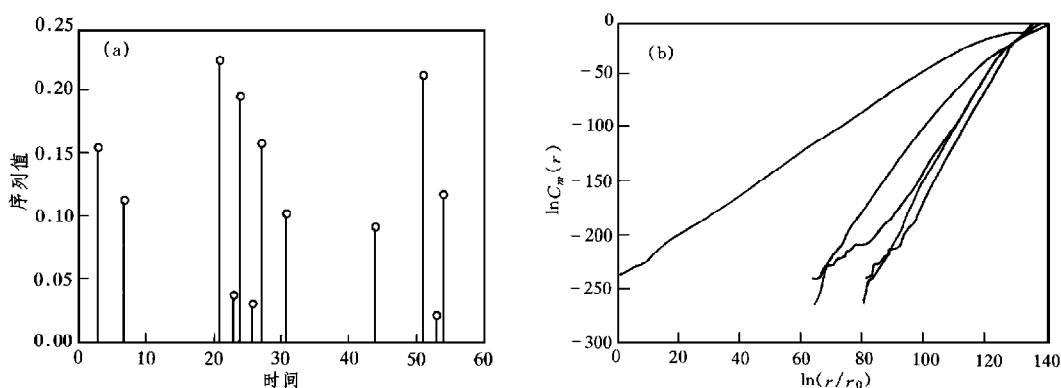


图 3 子值域 $[0.0, 0.25]$ 上序列片段(a)和估计子值域 $[0.0, 0.25]$ 上序列的相关维数(b)

维数, 图 3(b)从左至右为嵌入维数相应增大的 $\ln C_m(r) - \ln(r/r_0)$ 曲线. 由图 3(b)可看出相关维数收敛到一定数值, 可得到 $D_c \approx 4.5$. 这一数值显然较之原来动力系统的维数有较大的增长, 表现出完全不同的动力学特点. 在同样大小的子值域 $[0.0, 0.25]$, $[0.25, 0.50]$, $[0.50, 0.75]$ 和 $[0.75, 1.0]$ 上, 嵌入维数 $m=6$ 时计算的相关维数, 如图 4(a)所示. 4 个相同大小的子值域上的序列表现出基本相同大小的相关维数. 这一特点可以从 Kent 映射在值域上均匀分布的特性来理解. 同样, 从这 4 个子值域上序列所估计到的最大 Lyapunov 指数也接近一致, 如图 4(b)所示, 所得最大 Lyapunov 指数 λ_1 约为 $0.9-1.1$, 较之原来系统最大 Lyapunov 指数有所增大.

图 3 和图 4 均示出子值域占值域 $1/4$ 时的情况. 图 5 则示出不同大小的子值域上所体现的动力学特点, 其中 i 表示子值域占值域的 $1/i$, $i=1$ 时则对应着 Kent 映射情况. 由

图 5 可看出, 随 i 的增大(子值域变小), D_c 和 λ_1 呈增长趋势, 表示所体现的动力系统变得更复杂, 更不稳定. 显然当 $i \rightarrow \infty$ 时, 会体现出真正的随机. 图 5(b) 中 $i=9$ 处出现下降, $i=10$ 处出现峰值. 这一现象尚难解释.

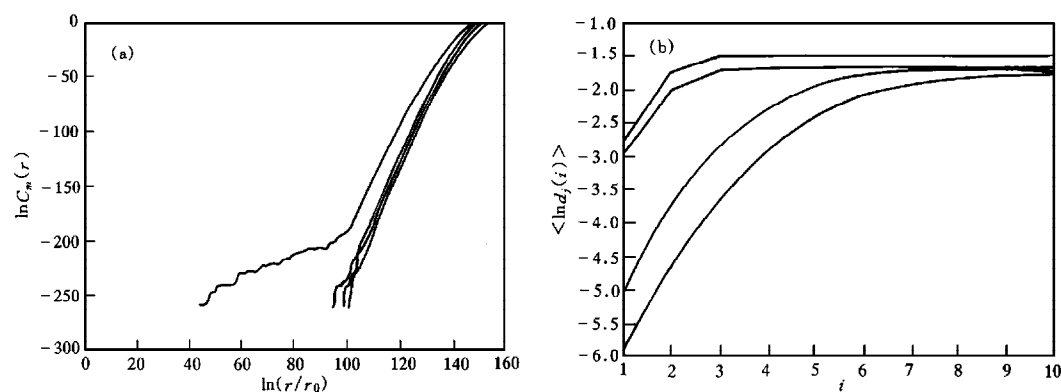


图 4 4 个相同大小的子值域上所表现的相关维数(a)和最大 Lyapunov 指数(b)

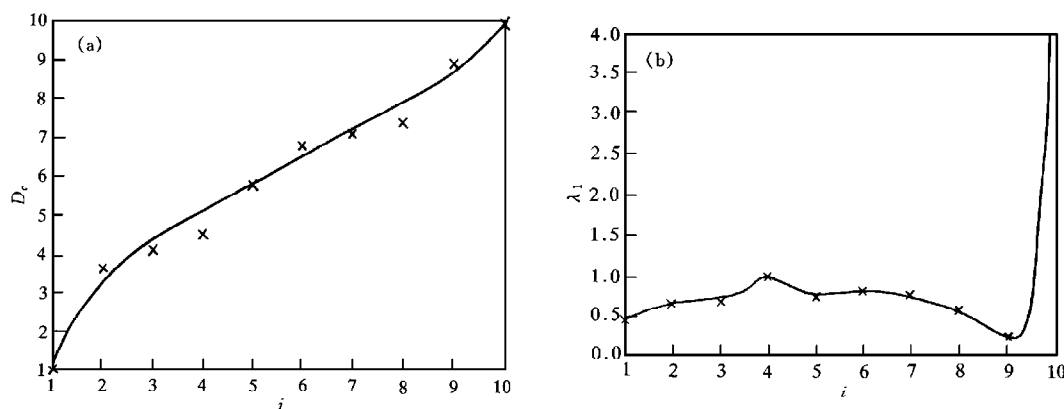


图 5 随着子值域的变化, 相关维数(a)和最大 Lyapunov 指数(b)的变化情况

对于不同的动力系统及使用不同的预测模型, 评价可预测性可能出现较大的差异. 我们仅就同样使用多层感知器作为预测模型, 达到 50% 预测准确率的条件下, 所允许的相对误差作为评价可预测性的一个标准. 图 6 所示为具有一个隐含层的多层感知器. 在这之前我们所讨论的重构都是为了使重构更多地体现原有系统的动力学性质, 而以预测为目的时, 不论维数多大, 其重构的质量必须基于序列的可预测性^[1], 重构的状态矢量作为输入. 图 6 示出嵌入维数为 3 时的情况. 隐含层神经元的选择现在尚没有很好的理论依据, 一般隐含层神经元数目选择不宜太小, 太大则浪费训练时间. 输出仅一个端子, 表示输出预测值. 对输入层和隐含层的选择, 我们经反复试验, 以具有较小的预测误差作为选择的标准.

图 7 示出预测准确率为 50% 时, 不同大小的子值域上序列的预测允许相对误差的变

化情况.可以看出,随子值域的缩小,允许的相对误差呈上升趋势,可预测性变差.这一点在具体工程问题中对选择子值域的大小有一定的指导意义.

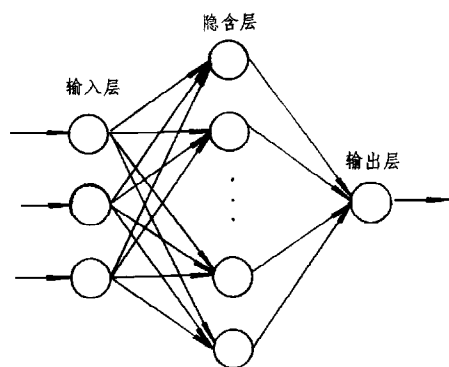


图6 多层感知器预测模型

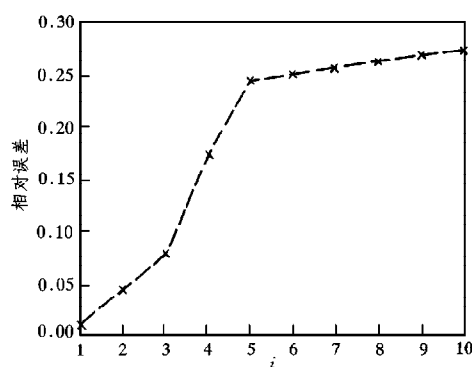


图7 子值域大小变化时相应的允许相对误差的变化情况

4 结 论

一般对混沌系统的分析都是针对其在整个值域中的时间序列而言.在一个子值域内观察到的序列仅是值域中时间序列的一个子集.这一子集表现出在时间上抽样的不均匀性.本文针对 Kent 映射产生的子值域时间序列,利用模糊延迟重构方法,从相关维数、最大 Lyapunov 指数及可预测性等几个方面进行了分析.研究发现,子值域时间序列同样表现出混沌序列的性质,但与原来的动力系统相比存在着一定的差异.这一差异随着子值域大小的变化而变化.这一特点在解决具体工程问题时有一定的指导意义.

- [1] J.L.Breedon *et al.*, *Physica*, **D58**(1992), 273.
- [2] A.M.Fraser *et al.*, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 1134.
- [3] P.Grassberger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 346.
- [4] J.Theiler, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 2427.
- [5] M.T.Rosenstein *et al.*, *Physica*, **D65**(1993), 117.
- [6] M.Casdagli, *Physica*, **D35**(1989), 335.
- [7] S.Haykin *et al.*, *Proc. IEEE*, **83**(1995), 94.
- [8] H.Sakai *et al.*, *IEEE Trans. ASSP*, **28**(5)(1980), 588.
- [9] 李文化等, *通信学报*, **17**(6)(1996), 12.

ANALYSIS OF THE TIME SERIES ON THE VALUE SUBFIELD OF CHAOTIC SIGNALS

YUAN JIAN XIAO XIAN-CI

(*Department of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054*)

(Received 27 January 1997)

ABSTRACT

Generally, dynamical analysis is just for the time series on the whole of value field. The time series on a value subfield is a subseries of the one on the whole of value field, and appears to be sampled nonuniformly in time. In this paper, by using the method of fuzzy delay coordinate reconstruction, we study the correlation dimensions, the largest Lyapunov exponents and the prediction of the time series on the value subfield of Kent-map. It is shown that the subseries behaves like some other chaotic time series, and the smaller the value subfield is, the larger the correlation dimensions and the largest the Lyapunov exponents are, and thus the poorer the characterization of prediction is.

PACC: 0545