

小尺寸平面源的误差分析^{*}

曾小东 梁昌洪 安毓英

(西安电子科技大学技术物理系, 西安 710071)

(1996 年 11 月 18 日收到; 1996 年 12 月 23 日收到修改稿)

基于 Helmholtz 方程的严格远场解, 讨论了大发散角光辐射远场振幅和相位对于源包络扰动的依赖关系, 并推导了远场振幅、相位误差公式. 结果表明, 远场振幅和相位误差必须用源的“误差面积”来描述; 在远场主要辐射区(即傍轴区), 振幅和相位对于源包络扰动不敏感, 而在远轴区较敏感.

PACC: 0620D; 0650

1 引 言

在光学的许多理论和实际工作中, 常常需要根据源模型计算远场分布, 或根据远场测量值估计源分布, 即反源问题. 不论正问题或反问题, 作为定量计算, 误差估计都是重要的. 当源的尺度可以和波长相比拟时, 辐射场一般具有较大的发散角. 譬如半导体激光器以及使用大数值孔径透镜强烈聚焦的场合. 这时波的传播特性不能用傍轴光学准确描述. 以往讨论源-远场关系大多基于傍轴光学理论^[1-3], 这对于有较大发散角情况下的定量计算是不适用的. 另外, 由于源振幅的扰动而产生的远场误差还没有一种恰当的描述方法. 因为许多实际光源可用平面源(同相源)来描述, 如半导体激光器输出端面附近的场、聚焦透镜焦平面的场分布等, 而且任意源分布均可表示为不同方向平面源的叠加, 所以平面源具有基本的意义. 本文根据 Helmholtz 方程的远场严格解, 讨论远场振幅及相位误差相对于源振幅包络扰动的依赖关系.

2 远场分布和源分布的依赖关系

设单色标量波可表示为 $\phi(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$, 则其空间变化部分满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + k^2 u(\mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

方程(1)的远场严格解可由源分布表示^[4],

$$u(x, y, z) = \frac{iz}{\lambda r} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x', y') \exp\left[-\frac{ik}{r}(xx' + yy')\right] dx' dy', \quad (2)$$

^{*} 国家自然科学基金及国家教育委员会优秀青年教师基金资助的课题.

其中 $u(x, y, z)$ 是远场观测点处的复振幅, $s(x', y')$ 是位于原点附近, x - y 平面上的源场分布(对于平面源, 可设 $s(x', y') > 0$), $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $k = 2\pi/\lambda$. 这里的远场是指 r 远大于波长和源尺度. (2) 式与傍轴光学的主要区别在于积分号前的因子 z/r^2 . 这一因子保证了任意源分布 $s(x', y')$, 即使是 δ 函数, 在确定的 z 处场振幅随着横向距离增大而趋于零, 这是能量守恒的基本要求. 为了讨论问题方便(但不失一般性), 我们把(2)式简化成二维问题, 即只考虑 x - z 平面. 则(2)式化为

$$u(x, z) = \frac{iz}{\lambda r} \frac{\exp(ikr)}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \exp\left[-\frac{ik}{r}xx'\right] dx'. \quad (3)$$

这时 $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$. 对于确定的 z , 即在垂直于 z 轴的平面上, 可以把(3)式记为

$$u(\omega) = G(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \exp(-i\omega x') dx', \quad (4)$$

其中 $\omega = kx/r$. (4) 式是分析远场误差的基本关系式.

3 远场误差

3.1 远场振幅误差

对于定量计算, 更有用的是相对误差, 因此这里讨论远场振幅的相对误差. 设 $s(x')$ 和 $s_0(x')$ 是两个相差不大的源振幅包络, 它们产生的远场分别为

$$u(\omega) = G(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \exp(-i\omega x') dx', \quad (5)$$

$$u_0(\omega) = G(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(x') \exp(-i\omega x') dx'. \quad (6)$$

于是远场振幅的绝对误差为

$$\begin{aligned} \Delta A &= \left| |u| - |u_0| \right| \leq |u - u_0| \\ &= |G(\omega)| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [s(x') - s_0(x')] \exp(-i\omega x') dx' \right| \leq |G(\omega)| \int_{-\infty}^{+\infty} |s(x') - s_0(x')| dx'. \end{aligned} \quad (7)$$

远场振幅的相对误差为

$$\epsilon = \frac{\Delta A}{A(\omega)} = \frac{\left| |u| - |u_0| \right|}{|u|} \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(x') - s_0(x')| dx'}{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \exp(-i\omega x') dx' \right|}. \quad (8)$$

若记

$$\Delta S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(x') - s_0(x')| dx',$$

$$S = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') dx' \right|,$$

则

$$\epsilon \leq \frac{\Delta S}{A(\omega)} = \frac{A(0)}{A(\omega)} \frac{\Delta S}{A(0)} = \frac{A(0)}{A(\omega)} \frac{\Delta S}{S}. \quad (9)$$

这表明,只要源“相对误差面积” $\Delta S/S$ 足够小,远场主要辐射区的振幅相对误差就足够小.如在 $\omega=0$ 处, $\epsilon \leq \Delta S/S$;在 $A(\omega)=0.1A(0)$ 处, $\epsilon \leq 10\Delta S/S$.只有在振幅 $A(\omega)$ 很小处,才有可能 ϵ 较大.由(9)式可以得出几个十分有意义的结论.

1) 刻划远场误差不能以源的“局部”误差(如最大误差等)为标准,必须以“总体”误差,即“相对误差面积”为标准.在源的某些地方,即使有很大的“局部”误差,只要“相对误差面积”足够小,对远场就不会产生大的影响.

2) 既然在主要辐射区远场对源振幅包络的变化不敏感,那么对于大多数远场应用,如传播问题、衍射问题等,源模型的选择就有很大的灵活性.特别是对于一些具有很复杂分布的源,可用相对简单的函数(只要与真实源函数的“相对误差面积”很小)来代替真实分布,这给实际工作带来了很大方便.

3) 仅利用远场的近轴数据不可能精确“反源”,要想准确估计源分布,必须利用远轴数据,即远场小幅值区域的数据.

作为例子,我们计算了两个不同的源(见图1).

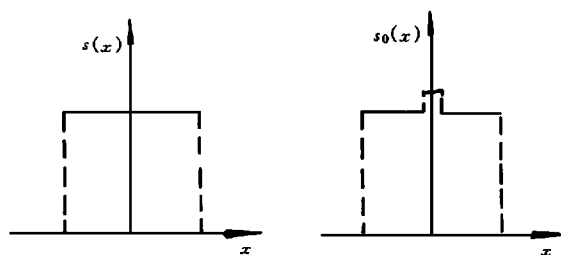


图1 源函数 $s(x)$ 和 $s_0(x)$ 示意图

$$s(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (10)$$

$$s_0(x) = \begin{cases} 1.2, & -0.1 \leq x \leq 0.1, \\ 1.0, & -1.0 \leq x \leq -0.1, \quad 0.1 \leq x \leq 1.0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

的远场数据 $u(\omega)$ 和 $u_0(\omega)$ 示于图2,这两个源的“相对误差面积” $\Delta S/S=2\%$. 尽管源最大相对误差已达20%,但从图2可以看出,在主要辐射区误差是很小的,只在 u 很小处才有明显的相对误差.

3.2 远场相位误差

对于相位,其值在 $0-2\pi$ 间变化且有周期性,故只能讨论绝对误差,设

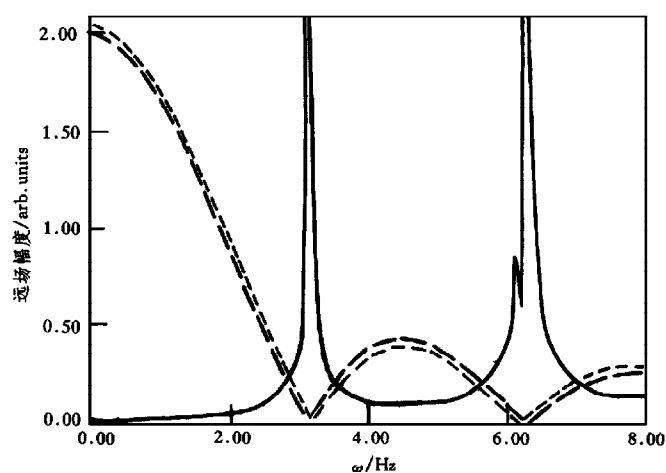


图2 远场分布与相对误差 ——对应 s ; - - -对应 s_0 ; ———是相对误差曲线

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \cos \omega x' dx', \quad (12)$$

$$b = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x') \sin \omega x' dx', \quad (13)$$

$$a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(x') \cos \omega x' dx', \quad (14)$$

$$b_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(x') \sin \omega x' dx'. \quad (15)$$

不难看出:在 $\omega=0$ 处,有 $\varphi=0$, $\varphi_0=0$.注意到 $a \approx a_0$, $b \approx b_0$, 我们有

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = |\varphi - \varphi_0| &= \left| \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{b_0}{a_0} \right| = \left| \arctan \frac{a_0 b - a b_0}{a_0 a + b_0 b} \right| \\ &\approx \left| \arctan \frac{a(b - b_0)}{a^2 + b^2} \right| = \arctan \frac{|a| |b - b_0|}{a^2 + b^2} \leq \arctan \frac{\sqrt{a^2 + b^2} |b - b_0|}{a^2 + b^2} \\ &= \arctan \left[\frac{A(0)}{A(\omega)} \frac{|b - b_0|}{A(0)} \right] \leq \arctan \left[\frac{A(0)}{A(\omega)} \frac{\Delta S}{S} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

这表明,在主要辐射区 $\Delta\varphi$ 几乎也与 $\Delta S/S$ 成正比;只要 $\Delta S/S$ 足够小,远场相位误差也足够小.只在 ω 很大,即远轴区, $\Delta\varphi$ 才可能较大.

4 结 论

小尺寸平面源的远场相对于源振幅包络的扰动是稳定的;只要源相对误差面积足够

小,远场误差也就足够小.由于积分的“磨光”作用,源的局部误差(有时可能很大)对远场主要辐射区不产生明显影响;但对远场的远轴区域可能会产生大的影响.对于大多数传播和衍射问题,远轴区域光能量只占总能量的很小部分,可忽略不计,因此对源模型的选择就有很大的灵活性.对于反源问题,要得到好的精度,必须利用远轴测量数据.

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6nd ed. (Pergamon, 1980), ch. 1.
- [2] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, 2nd ed. (Van Nostrand Reinhold, New York, 1982), ch. 2.
- [3] M. Nieto-Vesperinas, *Scattering and Diffraction in Physical Optics* (Wiley, New York, 1991), ch. 6.
- [4] X. Zeng, *Appl. Phys.*, **A57**(1993), 243.

ERROR ANALYSIS FOR THE FAR-FIELD OF A SMALL PLANE SOURCE

ZENG XIAO-DONG LIANG CHANG-HONG AN YU-YING

(*Department of Technical Physics, Xidian University, Xi'an 710071*)

(Received 18 November 1996; revised manuscript 23 December 1996)

ABSTRACT

Based on a rigorous far-field solution of the Helmholtz equation, the dependence of the far-field of the light wave with a large divergence angle on the perturbation of the source profile is discussed, and the error formulas of the far-field amplitude and phase are also given. It is shown that the far-field errors must be described by using the “error area” of the source. In the paraxial region, the far-field amplitude and phase are not sensitive to the source perturbation, but, in off-axis region, they may be sensitive.

PACC: 0620D; 0650