

量子玻色流体中的压缩玻色子对数态^{*}

刘文森

(山西大学物理系, 太原 030006)

马桂荣 张九安

(河北师范大学物理系, 石家庄 050091)

梁九卿

(山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(1996 年 11 月 11 日收到; 1997 年 3 月 20 日收到修改稿)

导出参量相关的 Bogoliubov 么正变换的封闭性表达式, 在原粒子数表象中对角化量子玻色流体的约化 Hamiltonian. 将两模辐射场的非经典特性的表述推广到与流体的相互作用机制相应的量子玻色场, 从波动和粒子统计的角度确认 Hamiltonian 本征态是非经典的压缩玻色子对数态.

PACC: 4250; 0365; 0540

1 引 言

近年来, 随着量子光场的压缩态被广泛研究并为实验证实^[1], 人们的兴趣自然转向寻找其他可能的玻色场的压缩态. 我们把注意力首先集中到量子玻色流体. 在基于这种流体的传统超流理论中^[2], 系统的能谱和基态借助 Bogoliubov^[3]正则变换, 在所谓准粒子数表象中由对角化约化 Hamiltonian 确定, Hamiltonian 本征态是准粒子数态. 准粒子或元激发的概念于是被引入理论中, 以致在低温下凝聚玻色流体的全部热力学特性都归之于准粒子或元激发的行为. 然而, 准粒子并非真实的个别的电子或原子, 元激发只是系统粒子合作运动量子力学描述的手段^[2]. 是否存在问题的另外的表述方式, 它可使我们抛弃传统的准粒子或元激发的概念, 而把系统的特性描写成玻色子特殊的量子场态性质的体现呢? 我们知道, 在量子光学的非简并参量过程中^[4-6], 个别的输出模: 信号模和闲置模, 显示出各向同性和相位不敏感的 Gauss 涨落, 类似于通常的混沌场或热 Bose-Einstein 场的涨落. 然而, 这两个输出模的叠加构成的复合两模态却具有压缩涨落. 复合场的这种非经典特性是信号模和闲置模之间的量子关联的结果. 在凝聚玻色流体中, 超流动性的机理认为是起因于遵守动量守恒的成对玻色子的排斥相互作用^[2,3], 若把散射后具相反动量的玻色场模当作两不同的输出模, 它们的叠加构成系统复合的两模玻色态, 我们就可能找到与量子光学中非简并参量过程的对应, 从而从新的观点, 动量相反的两个经典玻色模之

^{*} 国家自然科学基金及山西省自然科学基金资助的课题.

间的量子关联产生量子压缩玻色态,其小于玻色真空态的场的一个正交分量的涨落导致超流动性,正如光的压缩态中电磁场的一个正交分量的噪声可低于真空水平的特性提供了实现低损耗光通讯^[7]和超灵敏引力波检测^[8,9]的机理一样,来替代旧的准粒子理论.

2 Bogoliubov 么正变换

对具有动量 $\mathbf{p}$ 和 $-\mathbf{p}$ 模的玻色子湮没算符 $a_{\mathbf{p}}$ ($a_{-\mathbf{p}}$) 和产生算符 $a_{\mathbf{p}}^+$ ($a_{-\mathbf{p}}^+$), Bogoliubov 么正变换写成

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}}^+ &= u_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^+, & U_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ U_{\mathbf{p}}^+ &= u_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}^+ - v_{\mathbf{p}}^* a_{-\mathbf{p}}, \\ U_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}}^+ &= u_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+, & U_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^+ U_{\mathbf{p}}^+ &= u_{\mathbf{p}}^* a_{-\mathbf{p}}^+ - v_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (1)$$

与通常的 Bogoliubov 正则变换式^[2,3]比较,这里未写出等式左端的准粒子算符.式中 $U_{\mathbf{p}}$, $u_{\mathbf{p}}$ 和 $v_{\mathbf{p}}$ 是对应动量 $\mathbf{p}$ 和 $-\mathbf{p}$ 模的么正算符和复变换系数,后者满足

$$|u_{\mathbf{p}}|^2 - |v_{\mathbf{p}}|^2 = 1. \quad (2)$$

今假定 $U_{\mathbf{p}}$, $u_{\mathbf{p}}$ 和 $v_{\mathbf{p}}$ 是某个实参量 x 的函数,将(1)式中各式对 x 微分,整理后得到

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, U_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}}^+ \right] &= \frac{\partial u_{\mathbf{p}}}{\partial x} a_{\mathbf{p}} - \frac{\partial v_{\mathbf{p}}}{\partial x} a_{-\mathbf{p}}^+, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, U_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ U_{\mathbf{p}}^+ \right] &= \frac{\partial u_{\mathbf{p}}^*}{\partial x} a_{\mathbf{p}}^+ - \frac{\partial v_{\mathbf{p}}^*}{\partial x} a_{-\mathbf{p}}, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, U_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} U_{\mathbf{p}}^+ \right] &= \frac{\partial u_{\mathbf{p}}}{\partial x} a_{-\mathbf{p}} - \frac{\partial v_{\mathbf{p}}}{\partial x} a_{\mathbf{p}}^+, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, U_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}^+ U_{\mathbf{p}}^+ \right] &= \frac{\partial u_{\mathbf{p}}^*}{\partial x} a_{-\mathbf{p}}^+ - \frac{\partial v_{\mathbf{p}}^*}{\partial x} a_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3)$$

将(1)式代入(3)式,再以 $u_{\mathbf{p}}(u_{\mathbf{p}}^*)$ 和 $v_{\mathbf{p}}(v_{\mathbf{p}}^*)$ 分别乘相应等式,作适当运算后得到

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, a_{\mathbf{p}} \right] &= g_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}}^* a_{-\mathbf{p}}^+, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, a_{\mathbf{p}}^+ \right] &= g_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}^+ - f_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}}, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, a_{-\mathbf{p}} \right] &= g_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} - f_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}^+, \\ \left[\frac{\partial U_{\mathbf{p}}}{\partial x} U_{\mathbf{p}}^+, a_{-\mathbf{p}}^+ \right] &= g_{\mathbf{p}}^* a_{-\mathbf{p}}^+ - f_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p}} &\equiv f_{\mathbf{p}}(x) = u_{\mathbf{p}}(x) \frac{\partial v_{\mathbf{p}}^*(x)}{\partial x} - v_{\mathbf{p}}^*(x) \frac{\partial u_{\mathbf{p}}(x)}{\partial x}, \\ g_{\mathbf{p}} &\equiv g_{\mathbf{p}}(x) = u_{\mathbf{p}}^*(x) \frac{\partial u_{\mathbf{p}}(x)}{\partial x} - v_{\mathbf{p}}(x) \frac{\partial v_{\mathbf{p}}^*(x)}{\partial x} = -g_{\mathbf{p}}^*(x). \end{aligned} \quad (5)$$

展开(4)式中各对易式,并以算符 $a_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}}^+)$ 和 $a_{-\mathbf{p}}(a_{-\mathbf{p}}^+)$ 分别乘各展开式,经适当相消后产生

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ + \frac{1}{2} \left(a_p^+ \frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ a_p + a_{-p}^+ \frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ a_{-p} - a_p \frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ a_p^+ - a_{-p} \frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ a_{-p}^+ \right) \\ = f_p a_p a_{-p} - f_p^* a_p^+ a_{-p}^+ + g_p (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p} + 1). \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式给我们以启示:假定算符 $(\partial U_p / \partial x) U_p^+$ 与该式等号右端成比例,即

$$\frac{\partial U_p}{\partial x} U_p^+ = k [f_p a_p a_{-p} - f_p^* a_p^+ a_{-p}^+ + g_p (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p} + 1)], \quad (7)$$

式中 k 是一个待定的比例常数.把(7)式代入(6)式,容易验证: $k = -1$.由此导出

$$U_p \equiv U_p(x) = \exp [F_p^* a_p^+ a_{-p}^+ - F_p a_p a_{-p} + i G_p (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p} + 1)], \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} F_p &\equiv F_p(x) = \int_{x_0}^x f_p(x') dx', \\ G_p &\equiv G_p(x) = i \int_{x_0}^x g_p(x') dx', \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $F_p(x_0) = G_p(x_0) = 0$ 和 $U_p(x_0) = 1$, 或等价地, $u_p(x_0) = 1$ 和 $v_p(x_0) = 0$. 同时, U_p 的么正性要求 $F_p(x)$ 必须是 x 的复函数, 而 $G_p(x)$ 是 x 的实函数. 如果定义

$$L_+ \equiv a_p^+ a_{-p}^+, \quad L_- \equiv a_{-p} a_p, \quad L_0 \equiv \frac{1}{2} (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p} + 1). \quad (10)$$

容易表明, 这些算符满足对易式

$$[L_-, L_+] = 2L_0, \quad [L_0, L_{\pm}] = \pm L_0. \quad (11)$$

因此, $\{L_+, L_-, L_0\}$ 构成 $SU(1, 1)$ 李代数的生成元^[10]. 利用已知的因子化公式, U_p 的正规有序形式有

$$\begin{aligned} U_p &\equiv u_p^{-1} \exp \left[-\frac{v_p}{u_p} a_p^+ a_{-p} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{u_p} - 1 \right)^k}{k!} (a_p^+)^k a_p^k \right] \\ &\times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{u_p} - 1 \right)^l}{l!} (a_{-p}^+)^l a_{-p}^l \right] \exp \left[\frac{v_p^*}{u_p} a_p a_{-p} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

另一方面, 如果我们直接利用么正算符(8)式作变换(1)式, 计算表明

$$\begin{aligned} u_p(x) &= \cosh \Omega_p(x) - \frac{i G_p(x)}{\Omega_p(x)} \sinh \Omega_p(x), \\ v_p(x) &= \frac{F_p^*(x)}{\Omega_p(x)} \sinh \Omega_p(x). \end{aligned} \quad (13)$$

这里 $\Omega_p(x) = [|F_p(x)|^2 - G_p^2(x)]^{1/2}$. 可见(5), (9)和(13)式生成关于 $F_p(x)$ 和 $G_p(x)$, 或者 $u_p(x)$ 和 $v_p(x)$ 耦合的微分-积分方程组, 要直接求解它们是困难的, 但在具体的物理问题中, 当利用变换(1)式实施体系 Hamiltonian 的对角化时, 如果适当地选取参量 x , 这些方程的自洽解不难找到. 这意味着我们能够得到关于变换式以及 U_p , u_p 和 v_p 的一组封闭性表达式.

3 约化 Hamiltonian 的对角化

在低温下, 当把微扰矩阵元用 $p=0$ 的值代换, 并把算符 a_0 和 a_0^+ 当 C-数处理后, 满足动量守恒的成对碰撞粒子构成的凝聚玻色流体的约化 Hamiltonian^[2]具有形式

$$H = \frac{2\pi\hbar^3 a N}{mV} \left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p^2} \right) + \frac{2\pi\hbar^2 a N}{mV} \sum_{p \neq 0} (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + 2a_p^+ a_p) + \sum_{p \neq 0} \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p, \quad (14)$$

式中 N 和 V 分别为系统总粒子数和容积, m 为粒子质量, $a = mu_0/(4\pi\hbar)$ 是散射长度; 其中 $u_0 = \int u(|x|) d^3x$, 而 $u(|x|)$ 表示成对玻色子之间的排斥势. 现对(14)式施行么正变换, 要求经变换的 Hamiltonian 在原粒子数表象中呈对角形式, 即

$$U H U^+ = E_0 + \sum_{p \neq 0} \mathcal{E}(p) a_p^+ a_p, \quad (15)$$

式中 $U = \prod_p U_p$ 是总么正算符, $\mathcal{E}(p)$ 和 E_0 是系统能级和基态能量. 利用(8)和(1)式直接计算, 结果中令非对角项为零产生

$$\left(\frac{p^2}{2m} + my^2 \right) u_p^* v_p - \frac{my^2}{2} (u_p^{*2} + v_p^2) = 0. \quad (16)$$

这里 $y = [4\pi\hbar^2 a N / (m^2 V)]^{1/2}$. 结合(16)和(2)式解得

$$u_p = \left(\frac{1+q}{2q} \right)^{1/2}, \quad v_p = \left(\frac{1-q}{2q} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

这里我们已定义

$$q = (1-r^2)^{1/2}, \quad r = \frac{my^2}{p^2/(2m) + my^2}, \quad (18)$$

式中 r 和 q 都是实量, 因此 u_p 和 v_p 是 r 的实函数. 由于 r (通过 y 和 a) 联系着玻色子对之间的相互作用, $u_p|_{r=0}=1$ 和 $v_p|_{r=0}=0$ 物理上对应相互作用为零时的理想玻色子系统的情况, 因此选取 r 作参量 x 和 $r=0$ 作积分下限是适宜的. 在此选取下, 由(5), (17)和(9)式给出

$$F_p(r) = \frac{1}{2} r {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; r^2\right), \quad G_p(r) = 0. \quad (19)$$

这里 ${}_2F_1$ 是 Gauss 超几何函数^[11]. 于是从(8)和(13)式分别得到

$$U_p(r) = \exp\{F_p(r)[a_p^+ a_{-p}^+ - a_{-p} a_p]\}, \quad (20)$$

$$u_p = \cosh F_p(r), \quad v_p = \sinh F_p(r). \quad (21)$$

而(17)–(21)式的自洽性可以从它们满足如下恒等式得到证实:

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{1/2} = \frac{1}{4} \ln \frac{1+r}{1-r}. \quad (22)$$

对照(20)式与量子光场的双模压缩算符^[1,6]

$$S(z) = \exp(za_1^+ a_2^+ - z^* a_1 a_2), \quad (23)$$

这里 $a_1(a_1^+)$ 和 $a_2(a_2^+)$ 是光场的第一(第二)个模的湮没和产生算符, $z = |z|e^{i\theta}$ 是复参量, 其中 $|z|$ 常称作压缩参量. (20) 式表明, 若把 $a_p(a_p^+)$ 和 $a_{-p}(a_{-p}^+)$ 当作量子玻色场中两个不同模的算符, r 通过实函数 $F_p(r)$ 扮演压缩参量的角色, 我们可以期望 $U_p(r)$ 将起着量子玻色场中的压缩算符的作用.

比较(15)式经变换后的两端, 其对角部分给出

$$\mathcal{E}(p) = \left[p^2 y^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (24)$$

$$E_0 = \frac{1}{2} N m y^2 + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[\mathcal{E}(p) - \frac{p^2}{2m} - m y^2 + \frac{m^2 y^4}{p^2} \right]. \quad (25)$$

(24) 和 (25) 式以及由它们推论出的体系的热力学与准粒子理论的结果完全相同^[2], 但 Hamiltonian 本征态现在明确地为

$$|\Phi_{\{n_p, n_{-p}\}}(r)\rangle = U^+(r) |\{n_p, n_{-p}\}\rangle = \prod_p U_p^+(r) |n_p, n_{-p}\rangle, \quad (26)$$

这里 $|\{n_p, n_{-p}\}\rangle = |n_{p_1}, n_{p_2}, \dots; n_{-p_1}, n_{-p_2}, \dots\rangle$ 是多模玻色子对数态, 其中 $n_p = n_{-p}$ 是对应单粒子数态 $|n_p\rangle$ ($|n_{-p}\rangle$) 的占据数. 与量子光场的压缩数态^[12,13]对照, (26) 式可看作由多个对应不同的动量对 $(p, -p)$ 的压缩玻色子对数态

$$\begin{aligned} |r; n_p, n_{-p}\rangle &\equiv U_p(r) |n_p, n_{-p}\rangle \\ &= \exp[F_p(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+)] |n_p, n_{-p}\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

的直接乘积. 在态(27)式中, 玻色子对数 $(n_{p'}, n_{-p'})$ 的分布有

$$\begin{aligned} P_{(n_{p'}, n_{-p'}); (n_p, n_{-p})}(r) &= |\langle n_{p'}, n_{-p'} | U_p^+(r) | n_p, n_{-p} \rangle|^2 \\ &= \frac{2q}{1+q} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{(n_{p'}+n_{-p'})} \left| {}_2F_1 \left(-n_{p'}, -n_{-p'}; 1, -\frac{2q}{1-q} \right) \right|^2, \end{aligned} \quad (28)$$

这里超几何函数的收敛性^[11]要求 $|2q/(1-q)| < 1$, 即 $0.94 < r < 1$. 由(18)式可见, 在凝聚态或低激发态, 当粒子动能 $p^2/(2m) \rightarrow 0$, 且玻色子对相互作用势足够大时 (u_0 和 y 足够大), 这个条件无疑能够满足.

系统的基态对应所有占据数为零的情况, 即

$$|\Phi_{\{0,0\}}(r)\rangle = U^+ |\{0,0\}\rangle = \prod_p U_p^+ |0,0\rangle. \quad (29)$$

(29) 式可称之为压缩玻色子对真空态. 这时, 分布函数(28)式可化成较简单的形式

$$\begin{aligned} P_{(n_{p'}, n_{-p'}); \{0,0\}}(r) &= \frac{2q}{1-q} \left(\frac{1-q}{1+q} \right)^{n_{p'}} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_{p'}!}{l! (n_{p'}-l)!} \left(-\frac{2q}{1-q} \right)^l \right|^2 \\ &= \frac{2q(1-3q)^{2n_{p'}}}{(1+q)^{(n_{p'}+1)}(1-q)^{n_{p'}}}. \end{aligned} \quad (30)$$

图 1 给出了分布函数 $P_{(n_{p'}, n_{-p'}); \{0,0\}}(r)$ 随玻色子对数 $(n_{p'}, n_{-p'})$ 和压缩参量 r 变化的曲面图. 我们看到, 仅当 $n_{p'} = n_{-p'} = 0$ 时, 即在普通真空态, 在允许的 r 取值范围内有较大的分布概率, 随 $n_{p'}$ 增大概率迅速减小. 但当 $r \rightarrow 1$ 时 (即 $p^2/(2m) \rightarrow 0$ 和 $u(|x|)$ 足够大), 在这个态中仍可找到动量不为零的粒子对. 表明系统的基态绝不同于普通的玻色真空态.

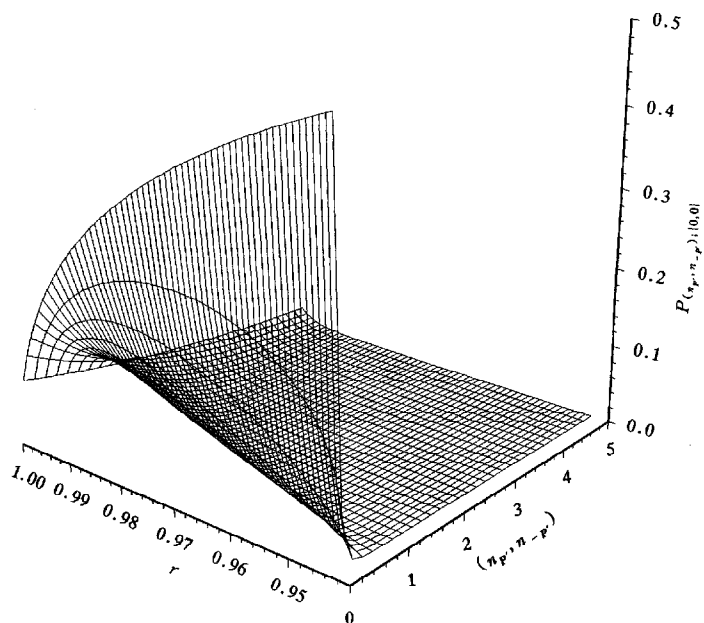


图1 分布函数 $P_{(n_p, n_{-p}); |0, 0\rangle}(r)$ 与玻色子对数 (n_p, n_{-p}) 和压缩参量 r 的关系

4 本征态的非经典特性

量子光场存在三种非经典效应, 即压缩态、光子反聚束和亚泊松分布^[1]. 逻辑上, 可以把对光场的非经典效应的判据推广到静质量不为零的无自旋玻色场. 为此, 我们把量子玻色流体中遵守动量守恒的碰撞玻色子对用彼此独立的两个标量玻色场算符描写^[14] (这里取 $\hbar = c = 1$),

$$\Phi_1(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} (a_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{p}}t)} + a_{\mathbf{p}}^+ e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{p}}t)}), \quad (31)$$

$$\Phi_2(\mathbf{x}, t) = \sum_{-\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} (a_{-\mathbf{p}} e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{p}}t)} + a_{-\mathbf{p}}^+ e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{p}}t)}), \quad (32)$$

这里 $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{-\mathbf{p}} = (p^2 + m^2)^{1/2}$. 而系统总的场算符由(31)和(32)式叠加产生

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}, t) &= \Phi_1(\mathbf{x}, t) + \Phi_2(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \sum_{-\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} [\psi_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} + \psi_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{x}) e^{i\omega_{\mathbf{p}}t}], \end{aligned} \quad (33)$$

式中

$$\psi_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + a_{-\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}), \quad \psi_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}}^{(+)}(\mathbf{x}) = [\psi_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}}^{(-)}(\mathbf{x})]^+ \quad (34)$$

分别为总场算符中对应 $(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ 模的正频率和负频率的部分, 它们又各由相反方向传播

的平面波的叠加产生. 为了方便, 我们暂时限于考虑动量对 $(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ 的单模. 定义正交算符为

$$x_p = \frac{1}{2}(a_p + a_p^\dagger), \quad y_p = \frac{i}{2}(a_p - a_p^\dagger), \quad (35)$$

$$x_{-p} = \frac{1}{2}(a_{-p} + a_{-p}^\dagger), \quad y_{-p} = \frac{i}{2}(a_{-p} - a_{-p}^\dagger). \quad (36)$$

$$X_{p,-p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\psi_{p,-p}^{(-)}(\mathbf{x}) - \psi_{p,-p}^{(+)}(\mathbf{x})], \quad (37)$$

$$Y_{p,-p}(\mathbf{x}) = \frac{i}{2}[\psi_{p,-p}^{(-)}(\mathbf{x}) + \psi_{p,-p}^{(+)}(\mathbf{x})].$$

这些算符满足对易关系

$$[x_p, y_p] = [x_{-p}, y_{-p}] = [X_{p,-p}(\mathbf{x}), Y_{p,-p}(\mathbf{x})] = \frac{1}{2i}, \quad (38)$$

其他对易关系为零. 利用(35)–(37)式, 与(31)–(33)式对应的场模分量可写成

$$\Phi_{1,p}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2}{\omega_p V}\right)^{1/2} [x_p \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_p t) + y_p \sin(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_p t)], \quad (39)$$

$$\Phi_{2,-p}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2}{\omega_p V}\right)^{1/2} [x_{-p} \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_p t) + y_{-p} \sin(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_p t + \pi)], \quad (40)$$

$$\Psi_{p,-p}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2}{\omega_p V}\right)^{1/2} [X_{p,-p}(\mathbf{x}) \cos \omega_p t + Y_{p,-p}(\mathbf{x}) \sin(\omega_p t + \pi)]. \quad (41)$$

因此, $x_p(x_{-p})$ 和 $y_p(y_{-p})$ 描写谐和波 $\cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_p t)$ ($\cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_p t)$) 和 $\sin(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega_p t)$ ($\sin(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \omega_p t + \pi)$) 的调制, 而 $X_{p,-p}(\mathbf{x})$ 和 $Y_{p,-p}(\mathbf{x})$ 描写两个反向平面波与谐和振动 $\cos \omega_p t$, $\sin(\omega_p t + \pi)$ 的复合调制.

对 $(\mathbf{p}, -\mathbf{p})$ 模本征态(27)式计算正交算符(35)–(37)式的方差得到

$$\langle (\Delta x_p)^2 \rangle = \langle (\Delta y_p)^2 \rangle = \frac{2\bar{n}_p + 1}{4(1 - r^2)^{1/2}}, \quad (42)$$

$$\langle (\Delta x_{-p})^2 \rangle = \langle (\Delta y_{-p})^2 \rangle = \frac{2\bar{n}_{-p} + 1}{4(1 - r^2)^{1/2}}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X_{p,-p})^2 \rangle &= \frac{2\bar{n}_p + 1}{4} \left(\frac{1 - r}{1 + r} \right), \\ \langle (\Delta Y_{p,-p})^2 \rangle &= \frac{2\bar{n}_p + 1}{4} \left(\frac{1 + r}{1 - r} \right), \end{aligned} \quad (44)$$

这里

$$\langle (\Delta O)^2 \rangle = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2,$$

$$\bar{n}_p = \langle n_p, n_{-p} | a_p^\dagger a_p | n_p, n_{-p} \rangle,$$

$$\bar{n}_{-p} = \langle n_p, n_{-p} | a_{-p}^\dagger a_{-p} | n_p, n_{-p} \rangle.$$

方差描写场的涨落, (42), (43)式表明, 单模场(39), (40)式的两个正交分量的涨落相等, 若不计 r 相关的部分, 它们正是具有平均光子数 $\bar{n}_p$ 的热场涨落^[5]; 而叠加场(41)式的涨落(44)式则与由非简并参量放大器产生的双模压缩数态^[13]的涨落有相似特性, 即场的一个正交分量涨落的减小伴随另一正交分量涨落的增大. 图 2 给出了叠加场方差

$\langle (\Delta X_{p,-p})^2 \rangle$ 随平均玻色子数 $\bar{n}_p$ 和压缩参量 r 变化的曲面图. 当 r 足够大时, 即使对大的 $\bar{n}_p$, 分量 $X_{p,-p}$ 的涨落也可大大低于普通真空态的涨落 $1/4$, 而分量 $Y_{p,-p}$ 的涨落总大于 $1/4$.

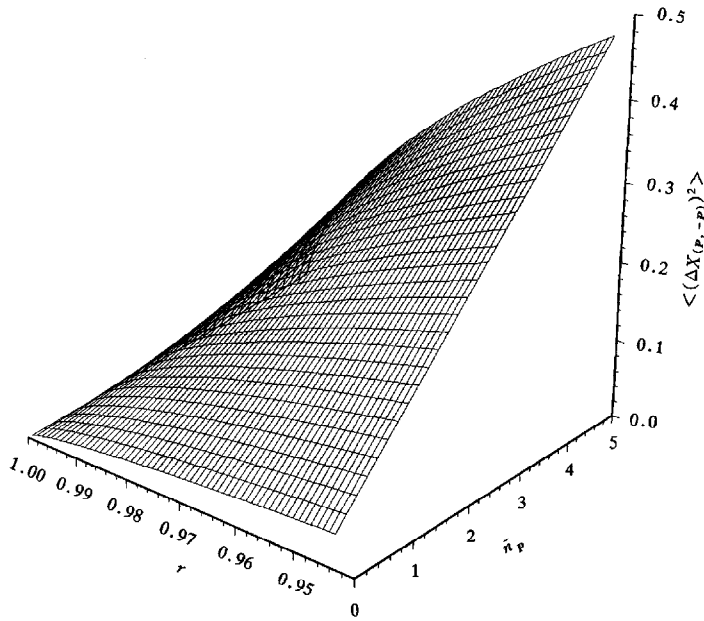


图2 方差 $\langle (\Delta X_{p,-p})^2 \rangle$ 与平均玻色子数 $\bar{n}_p$ 和压缩参量 r 的函数关系

为了从玻色子统计的角度来研究体系的非经典特性, 我们把 Lee^[15] 关于两模辐射场的非经典光子统计的判据加以推广. 同一时刻来自相同模和不同模的两玻色子之间的关联函数定义为

$$C_i^{(2)}(0) = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2, \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$C_{12}^{(2)}(0) = \langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle, \quad (46)$$

这里 $n_1 = a_p^\dagger a_p$, $n_2 = a_{-p}^\dagger a_{-p}$, $n_1^{(2)} = a_p^\dagger a_p^\dagger a_p a_p$ 和 $n_2^{(2)} = a_{-p}^\dagger a_{-p}^\dagger a_{-p} a_{-p}$. $C_i^{(2)}(0) > 0$ 或 $C_i^{(2)}(0) < 0$ 分别表示模内玻色子聚束或反聚束, 对应于玻色子的 Poisson 分布或 sub-Poisson 分布; $C_{12}^{(2)}(0) > 0$ 或 $C_{12}^{(2)}(0) < 0$ 分别表示模间玻色子聚束或反聚束. 而两模玻色场存在非经典效应的判据为

$$D_{12}^{(2)} = \langle n_1^{(2)} \rangle + \langle n_2^{(2)} \rangle - 2 \langle n_1 n_2 \rangle < 0. \quad (47)$$

相对模本征态(27)式计算有关的平均值得到

$$\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \bar{n}_p [\cosh^2 F_p(r) + \sinh^2 F_p(r)] + \sinh^2 F_p(r), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \langle n_1^2 \rangle = \langle n_2^2 \rangle = & \bar{n}_p (\bar{n}_p - 1) \cosh^2 F_p(r) + (\bar{n}_p + 1) (\bar{n}_p + 2) \sinh^2 F_p(r) \\ & + 4 \bar{n}_p (\bar{n}_p + 1) \cosh^2 F_p(r) \sinh^2 F_p(r), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \langle n_1 n_2 \rangle = & \bar{n}_p^2 \cosh^4 F_p(r) + (\bar{n}_p + 1)^2 \sinh^4 F_p(r) \\ & + (2 \bar{n}_p + 1) \cosh^2 F_p(r) \sinh^2 F_p(r). \end{aligned} \quad (50)$$

于是

$$C_1^{(2)} = C_2^{(2)} = \frac{1}{2(1-r^2)^{1/2}} \left\{ \bar{n}_p r^2 + \bar{n}_p [r^2 - 2(1-r^2)^{1/2}] + \left[1 - \frac{r^2}{2} - (1-r^2)^{1/2} \right] \right\}, \quad (51)$$

$$C_{12}^{(2)} = \frac{r^2}{4(1-r^2)} (2\bar{n}_p^2 + 2\bar{n}_p + 1), \quad (52)$$

$$D_{12}^{(2)} = \frac{1}{(1-r^2)} [-2\bar{n}_p - 1 + (1-r^2)^{1/2}]. \quad (53)$$

从(51), (52), (53)式可见, 在 r 的允许值范围内, 对任何 $\bar{n}_p$ 普遍地有 $C_{1,2}^{(2)}(0)$ 和 $C_{12}^{(2)}(0)$ 大于零, $D_{12}^{(2)}$ 小于零. 表明对两单模场总存在模内和模间玻色子的聚束和对应玻色子的 Poisson 分布, 而由此两经典单模场叠加得到的复合模场总显示非经典场的特征. 图 3 为非经典效应判据 $D_{12}^{(2)}$ 与平均玻色子数 $\bar{n}_p$ 和压缩参量 r 的依赖关系.

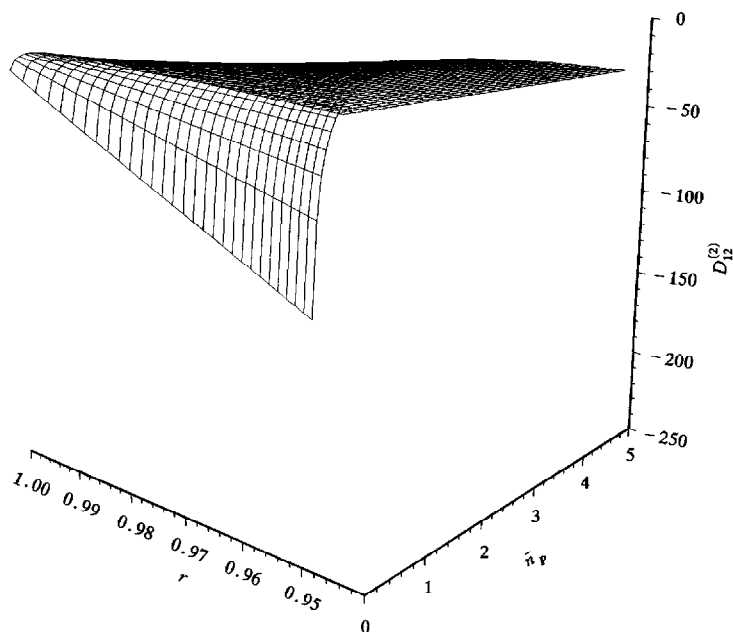


图 3 $D_{12}^{(2)}$ 对 $\bar{n}_p$ 和 r 的函数关系

最后应当指出, 在量子流体的凝聚态和低激发态粒子的动量很小, 所以场算符(31)–(33)式仅是对应的模场算符(39)–(41)式有限项的线性叠加, 因而本节关于模场的经典或非经典特性讨论的结论也适用于整个的单玻色场和叠加玻色场.

5 结 论

我们从玻色子 Bogoliubov 么正变换式和变换的正则性要求出发, 导出了关于变换式、

变换系数和施行变换的么正算符之间的参量相关的封闭性公式.利用它们对量子玻色流体约化 **Hamiltonian** 施行么正变换,并要求在原粒子数表象中对角化,从而避开了超流动性传统的准粒子概念的理论诠释.我们也把对两模辐射场的非经典特性的表述推广到量子玻色场,写出了与玻色子对相互作用机制相应的两个标量玻色场和叠加场算符,以及与这些场相联系的正交算符.详细讨论了相对 **Hamiltonian** 本征态场的正交分量的涨落、模内和模间玻色子的量子关联.确认本征态具有如量子光学的非简并参量过程的非经典态的特征,因而可合理地叫做压缩玻色子对数态,基态是压缩玻色子对真空态.在这些态中,一个正交分量的噪声可低于普通真空态的噪声这一特性,可能为量子玻色流体超流动性的机理提供一个新的论据.

- [1] R. London and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 709.
- [2] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part 2* (Pergamon, Oxford, 1980), ch. 3.
- [3] N. N. Bogoliubov, *J. Phys. USSR.*, **11**(1947), 23.
- [4] B. R. Mollow and B. J. Gluber, *Phys. Rev.*, **160**(1967), 1076, 1097.
- [5] S. M. Barnett and P. L. Knight, *J. Opt. Soc. Am.*, **B2**(1985), 467; *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 841.
- [6] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3068; B. L. Schumaker and C. M. Caves, *Phys. Rev.*, **A31**(1985), 3093.
- [7] D. Stoler, *Phys. Rev.*, **D10**(1970), 3217.
- [8] J. Gea-Bancloche and G. Leuchs, *J. Opt. Soc. Am.*, **B4**(1987), 1667.
- [9] J. N. Hollenhorst, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 1669.
- [10] M. Ban, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 5093.
- [11] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论(科学出版社, 北京, 1965), 第四章.
- [12] M. S. Kim, F. A. M. de Oliveira and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 2494.
- [13] 张云波、刘文森、苏大春, 光学学报, **16**(1996), 68.
- [14] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory, Part 1* (Pergamon, Oxford, 1971), p. 36.
- [15] C. T. Lee, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 1608.

SQUEEZED BOSON-PAIR NUMBER STATES IN QUANTUM BOSE FLUID

LIU WEN-SEN

(*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

MA GUI-RONG ZHANG JIU-AN

(*Department of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050091*)

LIANG JIU-QING

(*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006*)

(Received 11 November 1996; revised manuscript received 20 March 1997)

ABSTRACT

The closed expressions with a parameter of the Bogoliubov unitary transformation are derived. The reduced Hamiltonian of the quantum Bose fluid is diagonalized in the original particle-number representation. The manifestation of nonclassical character in the two-mode radiation is extended to the quantum Bose fluid. Finally, the eigenstates of the Hamiltonian are established to be the squeezed boson-pair number states with a nonclassical character.

PACC: 4250; 0365; 0540