

自对偶引力的局部对称性与约束

马永革 梁灿彬

(北京师范大学物理系 北京 100875)

(1996 年 11 月 11 日收到)

在 Ashtekar 形式下, 广义相对论的相空间被嵌入到复 $SU(2)$ Yang-Mills 理论的相空间里. 将一般场论中分析局部对称性与约束的方法推广到复的场论, 从自对偶 Palatini 形式的位形空间构造出 Ashtekar 形式的相空间, 进而讨论了位形空间上的局部对称性与相空间上的约束的关系.

PACC: 0420

1 引 言

Ashtekar 新变量理论为引力的正则量子化开辟了前所未有的途径^[1-3]. 在 Ashtekar 的复正则形式中^[4], 位形变量是 $SL(2, \mathbb{C})$ 联络 $A_{\mu M}^N$, 动量变量是密度化的复 $SU(2)$ 焊接形式 $\tilde{\sigma}_N^a M$. 从数学结构上, 可以把 $A_{\mu M}^N$ 看作复 $SU(2)$ Yang-Mills 联络, 而把 $\tilde{\sigma}_N^a M$ 看作它的共轭电场. 这样, 广义相对论的相空间就被嵌入到复 Yang-Mills 理论的相空间里.

在 Einstein 引力理论的正则量子化过程中, 一个主要的困难在于, 相空间上的约束不具有李代数的结构^[5]. 不久前, Lee 和 Wald^[6] 建立起一套分析拉氏场论的局部对称性与约束的方法, 揭示出上述困难的根源在于, Einstein 理论位形空间上场非依赖的非空间微分同胚对称性不能投影到相空间上. 那么, 这种困难在 Ashtekar 理论中能得到某种程度的克服吗? 另一方面, 文献[6]在实场论基础上提出的方法, 对复的场论是否仍然有效? 以上正是本文要回答的两个基本问题. 新变量使广义相对论的约束成为多项式, 如何从几何上阐明该形式下的约束与对称性的关系? 与原几何动力学描述有何不同? 这些问题也会在本文的讨论中得到澄清. 从而使我们对新变量导致理论上改变的实质以及新理论对量子化的效用有一个更深入的认识.

本文将文献[6]的方法推广到复的场论; 依据推广的理论, 由自对偶 Palatini 形式的位形空间构造出 Ashtekar 的相空间; 进而讨论新变量理论的局部对称性与约束的关系. 本文符号的使用与文献[6]一致.

2 局部对称性与约束关系的理论向复场论的推广

文献[6]对场论作了如下一般性的设定:

(1) 时空 M 是整体双曲的, 故有拓扑 $R \times \Sigma$; 类空柯西面 Σ 可定向, 且为紧致或 Σ 上的场满足渐近条件. (2) 场位形 ϕ 可看作是从 M 到另一有限维流形 M' 的映射. (3) 在 M' 内一点的一个邻域内, 可以选择 M' 的坐标系, 使 ϕ 能局域地表示成 M 上某点的标量函

数的一个集合 ϕ^a ; 选定 M 上的导数算符 ∇_μ 和与其适配的体元 ϵ , 当 ∇_μ 作用于 ϕ^a 时, 把 ϕ^a 看作标量函数. (4) 作用量 $S: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 取形式 $S[\phi] = \int_M \mathcal{L}$, 其中 $\mathcal{F}$ 为位形空间, 拉氏密度 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^a, \nabla_\mu \phi^a, \dots, \nabla_{(\mu_1} \dots \nabla_{\mu_k)} \phi^a; \gamma^b)$, γ^b 为非动力学背景场.

为将文献[6]中的方法推广到复的场论, 必须对上述一般性的设定作如下修改:

(1) Σ 不要求类空. (2) $\phi: M \rightarrow M'$, M' 可以是复流形(因而 $\mathcal{F}$ 也可以是复的). (3) ϕ 可以局域地表示成 M 上某点的复标量函数. (4) 作用量可以是复的: $S: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$.

经这样修改之后的场论, 场变量是实流形上的复场, 作用量是复的. 仍然沿用文献[6]中辛势流密度 θ^μ 和辛流密度 ω^μ 的定义式(2.12)和(2.19). 由于现在定义的 θ^μ 和 ω^μ 是复的, 依照文献[6]的定义, 泛函 θ 和 ω 也是复取值的. 由 θ 和 ω 同样可定义复的 θ_A 和准辛形式 ω_{AB} . 与文献[6]的结果一样, 可由 $(\mathcal{F}, \omega_{AB})$ 构造出 (Γ, Ω_{AB}) 作为相空间(见文献[6]中图 1).

仍可使用文献[6]中对 $\mathcal{F}$ 上的局部对称性的定义, 但须将 M 上定义的张量场都推广为复的. 接下来文献[6]中出现的定义式和公式都可保持形式不变, 其中 Noether 流 J^μ 和 Noether 荷 Q 都成为复的. 可以验证, 文献[6]中得到的所有结果, 在这种复的形式下仍然成立. 因此, 我们认为文献[6]中的方法可以推广到复的场论.

3 自对偶 Palatini 场论的相空间

Ashtekar 提出哈氏形式的新变量理论后, Jacobson 和 Smolin 给出了该理论的拉氏形式——自对偶 Palatini 形式^[7]. 其作用量为

$$S[\sigma^{aMM'}, \mathcal{Q}_a] = \int \sigma \sigma^{aM}{}_{M'} \sigma^{bNM'} F_{abMN}.$$

此作用量是复的, 它是两个变量 $\mathcal{Q}_a$ 和 $\sigma^{aMM'}$ 的泛函. $SL(2, \mathbb{C})$ 联络 $\mathcal{Q}_a$ 满足 $\mathcal{Q}_a \epsilon_{MN} = 0$. 选定一个平的 $SL(2, \mathbb{C})$ 联络 ∂_a , 可定义联络 1-形式 A_{aMN} :

$$\mathcal{Q}_a \lambda_M \equiv \partial_a \lambda_M + A_{aM}{}^N \lambda_N.$$

$\sigma^{aMM'}$ 是从复四维 $(1, 1)$ 旋量空间到 M 的复化切空间的可逆线性映射. $\sigma = \sqrt{g}$ 是 $\sigma^{aMM'}$ 的行列式的逆. $F_{abMN} \equiv 2(\partial_{[a} A_{b]MN} + A_{[a|M}{}^P A_{b]PN})$ 是 A_{aMN} 的曲率. 此拉氏场论的位形空间 $\mathcal{F}$ 是所有允许的场量 $(\sigma^{aMN'}, A_{aMN})$ 的集合.

在 M 上选定(至少局域地)某个坐标系 $\{x^\mu\}$, 使相当于时间的坐标为切片 Σ_t 的参数 t , 则在 M 的复化的切空间和余切空间上, 有对应的坐标基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ 和 $\{dx^\mu\}$. 这样, $A_{aM}{}^N$ 可看作是从 M 到 $M'_1 = \mathbb{C}^4 \times \mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$ 的映射, $\mathcal{SL}(2, \mathbb{C})$ 表示群 $SL(2, \mathbb{C})$ 的李代数; $\sigma^{aMM'}$ 可看作是从 M 到 $M'_2 = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^8$ 的映射. 将体元和导数算符选为坐标体元和坐标导数算符 $\partial_a \equiv \partial_\mu (dx^\mu)_a$, ∂_μ 作用于 $A_{\mu M}{}^N$ 或 $\sigma^{\mu MM'}$ 时, 等同于作用到标量函数上, 故 ∂_a 是平的 $SL(2, \mathbb{C})$ 联络. 这样, 上述关于复场论的四条基本设定都被满足.

据文献[6]中(2.12)和(2.19)式得

$$\theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\mu \phi^a)} \delta \phi^a = 2 \sigma \sigma^{[\mu}{}^{M]}{}_{M'} \sigma^{\nu]NM'} \delta A_{\nu MN}, \quad (1)$$

$$\omega^\mu = \delta_1 \theta_2^\mu - \delta_2 \theta_1^\mu = 2 \delta_1 (\sigma \sigma^{[\mu}{}^{M]}{}_{M'} \sigma^{\nu]NM'}) \delta_2 A_{\nu MN}$$

$$- 2 \delta_2 (\sigma \sigma^{[\mu M]}_{M'} \sigma^{\nu] NM'}) \delta_1 A_{\mu MN}.$$

选定某三流形 Σ , 则

$$\begin{aligned} \omega_{AB} (\delta_1 \phi)^A (\delta_2 \phi)^B &= \int_{\Sigma} \omega^{\mu} n_{\mu} = \int_{\Sigma} [\delta_1 (2 \sqrt{h} n^{(M}_{M'} \sigma^{[\nu] N) M'}) \delta_2 A_{\mu MN} \\ &\quad - \delta_2 (2 \sqrt{h} n^{(M}_{M'} \sigma^{[\nu] N) M'}) \delta_1 A_{\mu MN}] \\ &= -i \sqrt{2} \int_{\Sigma} [(\delta_1 \tilde{\sigma}^{\mu MN}) \delta_2 A_{\mu MN} - (\delta_2 \tilde{\sigma}^{\mu MN}) \delta_1 A_{\mu MN}], \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $n^M_{M'} \equiv u_{\mu} \sigma^{\mu M}_{M'} = N n_{\mu} \sigma^{\mu M}_{M'}$, u_{μ} 是 Σ 的单位余法矢; $\tilde{\sigma}^{\mu MN} \equiv \sqrt{h} \sigma^{\mu MN} = i \sqrt{2 h} n^{(M}_{M'} \sigma^{[\nu] N) M'}$. 因为有 $n_{\mu} \tilde{\sigma}^{\mu MN} = 0$, 而 $n_{\mu} = \partial_{\mu} t$ 是 Σ 的余法矢, 所以 $\tilde{\sigma}^{\mu MN}$ 是切于 Σ 的权重为 1 的空间矢量密度, 故而 $A_{\mu MN}$ 也被限制为切于 Σ , 或称空间的. 可见, $A_{\mu MN}$ 和 $\tilde{\sigma}^{\mu MN}$ 正是 **Ashtekar** 的共轭变量.

由(2)式可见, 对于构成 ω_{AB} 的退化方向的场变分, $\delta \tilde{\sigma}^{\mu MN}$ 和 $\delta A_{\mu MN}$ 的空间投影在 Σ 上都为零. 因而, 退化方向的积分流形上的场位形在 Σ 上有相同的 $A_{\mu MN}$ 和 $\tilde{\sigma}^{\mu MN}$. 由 $\pi: \mathcal{F} \rightarrow \Gamma$ 得到的相空间可被认同为 $(A_{\mu MN}, \tilde{\sigma}^{\mu MN})$ 的集合, 这就是 **Ashtekar** 的相空间. 满足场方程的解位形空间 $\bar{\mathcal{F}}$ 经 π 投影为约束相空间 $\bar{\Gamma}$.

4 新变量理论的局部对称性与约束

场位形的无限小 $SL(2, \mathbb{C})$ 变换如下:

$$\hat{\delta}_1 \sigma^{\mu MM'} = \sigma^{\mu NM'} \lambda_N^M \quad (\hat{\delta}_1 \sigma^{\mu}_{MM'} = -\lambda_M^N \sigma^{\mu}_{NM'}), \quad (3)$$

$$\hat{\delta}_1 A_{\mu M}^N = \partial_{\mu} \lambda_M^N + [A_{\mu}, \lambda]_M^N = \partial_{\mu} \lambda_M^N + A_{\mu M}^P \lambda_P^N - \lambda_M^P A_{\mu P}^N, \quad (4)$$

其中 λ_N^M 是 M 上 $\mathcal{GL}(2, \mathbb{C})$ 取值的任意标量场, 故满足 $\text{Tr } \lambda = 0$. 则拉氏密度的变分为

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1 \mathcal{L} &= \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{\nu NM'} F_{\mu\nu MN} (-\sigma \sigma_{\rho QQ'}) \hat{\delta}_1 \sigma^{\rho QQ'} \\ &\quad + \sigma F_{\mu\nu MN} (\sigma^{\mu M}_{M'} \hat{\delta}_1 \sigma^{\nu NM'} + \sigma^{\nu NM'} \hat{\delta}_1 \sigma^{\mu M}_{M'}) \\ &\quad - \sigma \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{\nu}_{N}{}^{M'} \hat{\delta}_1 F_{\mu\nu M}^N \\ &= -\sigma \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{\nu NM'} F_{\mu\nu MN} \sigma_{\rho QQ'} \sigma^{\rho PQ'} \lambda_P^Q \\ &\quad - \sigma F_{\mu\nu M}^N (-\sigma^{\mu M}_{M'} \lambda_N^P \sigma^{\nu}_{P}{}^{M'} + \sigma^{\nu}_{N}{}^{M'} \sigma^{\mu P}_{M'} \lambda_P^M) \\ &\quad - \sigma \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{\nu}_{N}{}^{M'} (F_{\mu\nu M}^P \lambda_P^N - \lambda_M^P F_{\mu\nu P}^N) \\ &= -(\text{Tr } \lambda) \mathcal{L} \\ &= 0. \end{aligned}$$

可见, 令 $\alpha^{\mu} = 0$, 则 $(\hat{\delta}_1 \sigma^{\mu MM'}, \hat{\delta}_1 A_{\mu M}^N, 0)$ 满足文献[6]对 $\mathcal{F}$ 上的无限小局部对称性的定义.

$\{(\hat{\delta}_1 \sigma^{\mu MM'}, \hat{\delta}_1 A_{\mu M}^N, 0)\}$ 构成在场位形 $(\sigma^{\mu MM'}, A_{\mu M}^N)$ 的无限小对称性的一个集合, 并且它们所产生的 $\mathcal{F}$ 的切子空间是可积的. 因此, (3)和(4)式的规范变换定义了 $\mathcal{F}$ 上的一个局部对称性的李代数.

无限小微分同胚的变换为:

$$\hat{\delta}_2 \sigma^{\mu MM'} = L_{\Lambda} \sigma^{\mu MM'} = \Lambda^{\nu} \partial_{\nu} \sigma^{\mu MM'} - \sigma^{\nu MM'} \partial_{\nu} \Lambda^{\mu}, \quad (5)$$

$$\hat{\delta}_2 A_{\mu M}^N = L_A A_{\mu M}^N = \Lambda^\nu \partial_\nu A_{\mu M}^N + A_{\nu M}^N \partial_\mu \Lambda^\nu, \quad (6)$$

其中 Λ^μ 是 M 上的任意矢量场. 则

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_2 \mathcal{L} &= (-\mathcal{L} \sigma_{\nu NM'} + 2 \sigma F_{\mu MN} \sigma^{\mu M}_{M'}) \hat{\delta}_2 \sigma^{\nu NM'} \\ &\quad + 2 \sigma \sigma^{[\mu I M]}_{M'} \sigma^{\nu] NM'} [\hat{\delta}_2 (\partial_\mu A_{\nu MN}) + 2 A_{\mu M}^P \hat{\delta}_2 A_{\nu PN}] \\ &= \mathcal{L} \partial_\nu \Lambda^\nu + \Lambda^\nu \partial_\nu \mathcal{L} - 4 \sigma \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{\rho NM'} (\partial_\rho \Lambda^\nu) (\partial_{[\mu} A_{\nu]} MN + A_{[\mu I M]}^P A_{\nu] PN}) \\ &\quad + 2 \sigma \sigma^{\mu M}_{M'} \sigma^{[\nu I N]}_{M'} (\partial_\nu \Lambda^\rho) (\partial_\mu A_{\rho MN} - \partial_\rho A_{\mu MN} + 2 A_{\mu M}^P A_{\rho NP}) \\ &= \partial_\nu (\Lambda^\nu \mathcal{L}). \end{aligned}$$

可见, 令 $\alpha^\mu = \Lambda^\mu \mathcal{L}$, 则 $\{(\hat{\delta}_2 \sigma^{\mu MM'}, \hat{\delta}_2 A_{\mu M}^N, \Lambda^\mu \mathcal{L})\}$ 也构成场位形的无限小局部对称性的一个集合, (5) 和 (6) 式的规范变换同样能定义 $\mathcal{F}$ 上的一个局部对称性的李代数.

M 上的微分同胚群记为 $\text{Diff}(M)$, 进一步不难证明, 可以在 $\mathcal{F}$ 上定义一个半直积群 $G = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{Diff}(M)$ 的作用, $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 是 G 的正规子群. 这就使 $\mathcal{F}$ 获得一个主丛的结构, 无限小局部对称性的切子空间对应于丛的切子空间.

为得到 Γ 上的局部对称性, 需将 $\mathcal{F}$ 上的局部对称性投影下来. 首先考虑场非依赖的无限小局部对称性. $\mathcal{F}$ 上场非依赖的 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 对称性可表示为 (3) 和 (4) 式, 其中的 λ_M^N 是固定的, 不依赖于场位形. 在 Σ 上可表示为

$$\hat{\delta}_1 \tilde{\sigma}^\mu_M{}^N = \tilde{\sigma}^\mu_M{}^P \lambda_P^N - \lambda_M^P \tilde{\sigma}^\mu_P{}^N = [\tilde{\sigma}^\mu, \lambda]_M^N, \quad (7)$$

$$\hat{\delta}_1 A_{\mu M}^N = \partial_\mu \lambda_M^N + [A_\mu, \lambda]_M^N. \quad (8)$$

对 ω_{AB} 的同一退化子流形上两个场位形的场非依赖的无限小对称性 (3) 和 (4) 式, 由于 λ_M^N 不依赖于场位形, 从 (7) 和 (8) 式可见, 在 Σ 上的变分 $\hat{\delta}_1 \tilde{\sigma}^\mu_M{}^N$ 和 $\hat{\delta}_1 A_{\mu M}^N$ 是相同的. 因而, $\mathcal{F}$ 上所有场非依赖的无限小 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 对称性都可投影到 Γ 上, 从而定义了整个 Γ 上的场非依赖无限小 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 局部对称性. 设 H_1 是保持 Σ 上的 $\tilde{\sigma}^\mu_M{}^N$ 和 $A_{\mu M}^N$ 不变的 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 的正规子群, 则 Γ 上的场非依赖的 $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ 对称性的李代数与商群 $\text{SL}(2, \mathbb{C})/H_1$ 的李代数同构. 因此, Γ 和 $\bar{\Gamma}$ 自然地有一个以 $\text{SL}(2, \mathbb{C})/H_1$ 为结构群的主丛结构.

对 $\mathcal{F}$ 上的场非依赖对称性 (3) 和 (4) 式,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1 \theta^\mu &= 2(\sigma \sigma^{[\mu I M]}_{M'} \sigma^{\nu] PM'} \lambda_P^N + \sigma \sigma^{[\mu I P]}_{M'} \sigma^{\nu] NM'} \lambda_P^M) \hat{\delta}_2 A_{\nu MN} \\ &\quad - 2 \sigma \sigma^{[\mu I M]}_{M'} \sigma^{\nu] N M'} \hat{\delta}_2 (\partial_\nu \lambda_M^N + [A_\nu, \lambda]_M^N) \\ &= 0. \end{aligned}$$

再利用文献 [6] 中 (2.1) 式得

$$\hat{\delta}_1 (E_a \partial_2 \phi^a) = \partial_2 \hat{\delta}_1 \mathcal{L} - \partial_\mu (\hat{\delta}_1 \theta^\mu) = 0.$$

所以文献 [6] 中第三节的定理成立, 对所有点 $\phi \in \mathcal{F}$ 的场非依赖局部对称性 $(\hat{\delta}\phi)^A$ 有

$$(dQ)_A = \omega_{AB} (\hat{\delta}\phi)^B. \quad (9)$$

可见, Noether 荷 Q 在 ω_{AB} 的退化子流形上为常数. 因此, 可将 Q 从 $\mathcal{F}$ 投影到 Γ , 得到的函数 C 在 Γ 上每点都满足文献 [6] 中的 (4.9) 和 (4.10) 式, 其中 $\hat{X}^A$ 是 $(\hat{\delta}\phi)^A$ 在 Γ 上的投

影,满足 $\mathcal{L}_{\hat{X}}\Omega_{AB}=0$.因而,对 Γ 上的任一场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 局部对称性 $\hat{X}^A$,可以在整个 Γ 上指定一个约束函数 C .这些约束函数的泊松括号代数同构于 Γ 上的场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性的李代数,也就同构于 $SL(2, \mathbb{C})/H_1$ 的李代数.

对场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性(3)和(4)式,由(1)式得

$$\hat{\theta}^\mu = -2\sigma\sigma^{\mu M}{}_{M'}\sigma^\nu{}_{N'}(\partial_\nu\lambda_M^N + [A_\nu, \lambda]_M^N).$$

再利用文献[6]中(3.9)和(3.11)式,可得到 Γ 上对应于场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 局部对称性的约束函数,

$$\begin{aligned} C_1 = Q_1 &= -i\sqrt{2}\int_\Sigma \tilde{\sigma}^\nu{}_N{}^M(\partial_\nu\lambda_M^N + A_{\nu M}{}^P\lambda_P^N - \lambda_M^P A_{\nu P}{}^N) \\ &= -i\sqrt{2}\int_\Sigma \lambda_M^N \mathcal{D}_\nu \tilde{\sigma}^\nu{}_N{}^M. \end{aligned}$$

这正是 Ashtekar 形式的高斯约束.

$\mathcal{F}$ 上依赖于场位形的 $SL(2, \mathbb{C})$ 局部对称性,当(3)和(4)式的 λ_M^N 在 ω_{AB} 的退化子流形上为常数时,是可以投影到 Γ 上的最一般的无限小 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性.但此类对称性一般不满足(9)式,因而无法在整个 Γ 上对应一个约束函数.

$\mathcal{F}$ 上的场非依赖的微分同胚对称性可表示为(5)和(6)式,其中的矢量场 Λ^μ 不依赖于 M 上的场位形.先考虑 Λ^μ 切于 Σ 的“空间”无限小微分同胚,在 Σ 上,

$$\hat{\delta}_2 \tilde{\sigma}^\mu{}_M{}^N = L_\Lambda \tilde{\sigma}^\mu{}_M{}^N = \Lambda^\nu \partial_\nu \tilde{\sigma}^\mu{}_M{}^N - \tilde{\sigma}^\nu{}_N{}^M \partial_\nu \Lambda^\mu + (\partial_\nu \Lambda^\nu) \tilde{\sigma}^\mu{}_M{}^N,$$

$$\hat{\delta}_2 A_{\mu M}{}^N = L_\Lambda A_{\mu M}{}^N = \Lambda^\nu \partial_\nu A_{\mu M}{}^N + A_{\mu M}{}^N \partial_\mu \Lambda^\nu.$$

可见, $\mathcal{F}$ 上所有场非依赖的无限小空间微分同胚都可投影到 Γ 上; Γ 上得到的场非依赖微分同胚对称性的李代数同构于 Σ 的微分同胚群 $\text{Diff}(\Sigma)$ 的李代数; Γ 和 $\bar{\Gamma}$ 自然地有一个以 $\text{Diff}(\Sigma)$ 为结构群的主丛结构.

对场非依赖的空间微分同胚对称性(5)和(6)式,

$$\hat{\delta}_2(E_a \delta_1 \phi^a) = L_\Lambda(E_a \delta_1 \phi^a) = \partial_\mu(\Lambda^\mu E_a \delta_1 \phi^a).$$

因为 $\Lambda^\mu n_\mu = 0$,故文献[6]中第三节的定理成立.因此,与场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性一样,对每个 Γ 上得到的场非依赖微分同胚对称性,可在整个 Γ 上指定一个由 Noether 荷投影得到的约束函数,使得约束函数的泊松括号代数同构于局部对称性的李代数,也同构于 $\text{Diff}(\Sigma)$ 的李代数.

利用文献[6]中(3.9)和(3.11)式,可得到 Γ 上对应于场非依赖的空间微分同胚对称性的约束函数,

$$\begin{aligned} C_2 \equiv Q_2 &\equiv -i\sqrt{2}\int_\Sigma \tilde{\sigma}^{\mu N}(\Lambda^\mu \partial_\mu A_{\mu N} + A_{\mu N} \partial_\mu \Lambda^\mu) \\ &= -i\sqrt{2}\int_\Sigma (A_{\mu N}{}^M \Lambda^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{\sigma}^\nu{}_M{}^N - \Lambda^\mu \tilde{\sigma}^\nu{}_M{}^N F_{\mu\nu}{}^M). \end{aligned} \quad (10)$$

这是 Ashtekar 形式的微分同胚约束,可以与高斯约束组合成矢量约束.从(10)式不难看出,空间微分同胚与 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性所合成的局部对称性对应于 Ashtekar 的矢量约束,若其中一种对称性(如空间微分同胚)是场非依赖的,则另一种对称性($SL(2, \mathbb{C})$ 对称性)必须是场依赖的.

对 Λ^μ 不切于 Σ 的“非空间”微分同胚对称性, 文献[4]的结果表明, $L_{\Lambda}\tilde{\sigma}^\mu_{MN}$ 可由 Λ^μ 和 Σ 上的场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu N}^M)$ 完全确定(差别仅为 $SL(2, \mathbb{C})$ 规范). 若设 $\Lambda^\mu = \alpha u^\mu + \beta^\mu$, u^μ 为 Σ 的单位法矢, β^μ 切于 Σ ; 略去无关的 $SL(2, \mathbb{C})$ 规范变换, 可利用哈氏量得到此无限小微分同胚的变分,

$$\hat{\delta}_3 \tilde{\sigma}^\mu_{MN} = \partial_\nu (\beta^\nu \tilde{\sigma}^\mu_{MN}) - \tilde{\sigma}^\nu_{MN} \partial_\nu \beta^\mu - 2i \mathcal{D}_\nu (\alpha \tilde{\sigma}^{[\mu} \tilde{\sigma}^{\nu]})_{MN}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_3 A_{\mu M}^N &= \beta^\nu \partial_\nu A_{\mu M}^N + A_{\nu M}^N \partial_\mu \Lambda^\nu + i [\alpha \tilde{\sigma}^\nu, F_{\mu\nu}]_{MN} \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \alpha (2 \tilde{\sigma}^\rho Q^R F_{\rho R}{}^P + L \tilde{\sigma}_{\nu Q}{}^R) \frac{\delta \sigma^\nu_P}{\delta \tilde{\sigma}^\mu_N{}^M}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $\alpha \equiv \alpha / \sqrt{2} \hbar$, $L \equiv \sigma^{\mu M}{}_{M'} \sigma^{\nu NM'} F_{\mu\nu MN}$.

当运动方程被满足时, (11) 和 (12) 式与文献[8]的结果一致. 注意, (12) 式中含 L 的项不能由 Λ^μ 和 Σ 上的场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu M}^N)$ 完全确定下来. 这是因为, 在 ω_{AB} 的同一个退化子流形上, Σ 上的场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu M}^N)$ 是相同的, 但 $\sigma^{\mu MM'}$ 在 M 上仍可有不同的选择, 使得 Σ 上的标量场 L 取值不同. (11) 和 (12) 式表明, 能够从 $\mathcal{F}$ 投影到 Γ 的最一般的微分同胚对称性, 就是使 $\alpha = 0$, $\Lambda^\mu = \beta^\mu$ 是 Σ 上的场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu N}^M)$ 的任意泛函的空间微分同胚. 因此, 在整个 Γ 上无法定义对应于 $\mathcal{F}$ 上的非空间微分同胚的对称性.

若只考虑从 $\mathcal{F}$ 投影到 $\bar{\Gamma}$ 的微分同胚对称性, (12) 式的最后一项为零. 能够从 $\mathcal{F}$ 投影到 $\bar{\Gamma}$ 的最一般的微分同胚对称性, 就是使 α 和 β^μ 是场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu N}^M)$ 的任意泛函的微分同胚. 但仍然不能定义 $\bar{\Gamma}$ 上场非依赖的非空间微分同胚对称性, 这是因为对场非依赖的 Λ^μ , α 和 β^μ 必然为场依赖的, 在 ω_{AB} 的退化子流形上不为常数. 将 $\mathcal{F}$ 上的 Noether 荷投影到 $\bar{\Gamma}$ 上, 再延拓为 Γ 上的函数, 可得到与 $\bar{\Gamma}$ 上的每个无限小微分同胚对应的约束函数等价类. 对 α 和 β^μ 是 Σ 上的场 $(\tilde{\sigma}^\mu_{MN}, A_{\mu N}^M)$ 的泛函的非空间微分同胚, 若令 $\Lambda^\mu = t^\mu$, 则可得到对应的约束函数

$$\begin{aligned} C_3 &= Q_3 = \int_{\Sigma} (-i \sqrt{2} \tilde{\sigma}^\mu_{MN} \hat{\delta}_3 A_{\mu N}^M - t^\mu n_\mu \mathcal{L}) \\ &= -i \sqrt{2} \int_{\Sigma} [\beta^\mu \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\nu F_{\mu\nu}) - \beta^\mu \text{Tr}(A_\mu \mathcal{D}_\nu \tilde{\sigma}^\nu) + i \alpha \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu \tilde{\sigma}^\nu F_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (13)$$

这正是 Ashtekar 的微分同胚约束和标量约束的线性组合. 当 $\beta^\mu = 0$ 时, (13) 式含微分同胚约束的项为零. 可见, 标量约束对应于垂直 Σ 面的 Λ^μ 所产生的微分同胚对称性. 由于 $\bar{\Gamma}$ 上没有与 $\mathcal{F}$ 上的场非依赖的非空间微分同胚对称性相对应的局部对称性子代数, 故除空间微分同胚外, $\bar{\Gamma}$ 上不能自然地定义对应于 $\mathcal{F}$ 上的场非依赖的微分同胚群的作用. 不难验证, Γ 和 $\bar{\Gamma}$ 上仅有一个以半直积群 $(SL(2, \mathbb{C})/H_1) \times \text{Diff}(\Sigma)$ 为结构群的主丛结构(正规子群为 $SL(2, \mathbb{C})/H_1$).

5 结 论

自对偶 Palatini 形式的相空间就是 Ashtekar 的复相空间. 新变量理论既保留了原

Einstein 理论的微分同胚对称性, 又具有类似于 Yang-Mills 理论的 $SL(2, \mathbb{C})$ 规范对称性. Ashtekar 形式的高斯约束可对应于自对偶 Palatini 的位形空间 $\mathcal{S}$ 或相空间 Γ 上的场非依赖的 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性; 矢量约束可对应于 $\mathcal{S}$ 或 Γ 上的空间微分同胚对称性与 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性所合成的局部对称性, 若其中一种对称性是场非依赖的, 则另一种必为场依赖的; 标量约束可对应于解位形空间 $\bar{\mathcal{S}}$ 或约束相空间 $\bar{\Gamma}$ 上的场依赖的非空间微分同胚对称性 (由垂直于 Σ 面的矢量场产生).

可以在 $\mathcal{S}$ 上定义一个半直积群 $SL(2, \mathbb{C}) \times \text{Diff}(\mathbf{M})$ 的作用, 使 $\mathcal{S}$ 和 $\bar{\mathcal{S}}$ 获得一个主丛的结构; 而 Γ 和 $\bar{\Gamma}$ 则有一个以半直积群 $(SL(2, \mathbb{C})/H_1) \times \text{Diff}(\Sigma)$ 为结构群的主丛结构, 但不具备以 $\text{Diff}(\mathbf{M})$ 为结构群的主丛结构, 这是由于 $\mathcal{S}$ 上场非依赖的非空间微分同胚对称性不能投影到 Γ 或 $\bar{\Gamma}$ 上. 可见, 增加了 $SL(2, \mathbb{C})$ 对称性的新变量理论, 并没有在本质上使 $\text{Diff}(\mathbf{M})$ 对称性变得易于处理, 本文开始提到的困难依旧存在.

对引力新变量理论的上述分析, 作为一个实例, 证实对局部对称性与约束的理论^[6]向复场论的推广是成功的.

- [1] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2244.
- [2] A. Ashtekar, *Phys. Rev.*, **D 36**(1987), 1587.
- [3] A. Ashtekar, *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity* (World Scientific Publishing Co., Singapore, 1991).
- [4] A. Ashtekar, T. Jacobson and L. Smolin, *Commun. Math. Phys.*, **115**(1988), 631.
- [5] C. J. Isham and K. V. Kuchar, *Ann. Phys. (NY)*, **164**(1985), 288, 316.
- [6] J. Lee and R. M. Wald, *J. Math. Phys.*, **31**(1990), 725.
- [7] T. Jacobson and L. Smolin, *Class. Quant. Grav.*, **5**(1988), 583.
- [8] M. P. Reisenberger, *Nucl. Phys.*, **B457**(1995), 643.

LOCAL SYMMETRIES AND CONSTRAINTS IN SELF-DUAL GRAVITY

MA YONG-GE LIANG CAN-BIN

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875)

(Received 11 November 1996)

ABSTRACT

In Ashtekar's formalism, the phase space of general relativity is imbedded into the phase space of complex $SU(2)$ Yang-Mills theory. In this paper, the approach of analyzing local symmetries and constraints in ordinary field theories is generalized to the complex field theory, the phase space of the Ashtekar formalism is constructed from the configuration space of the self-dual Palatini formalism, and the relationship between local symmetries of the configuration space and constraints on the phase space is then discussed.

PACC: 0420