

关于量子不变量及其与量子相位 关系的几点注记^{*}

李伯臧 张凌云 张向东

(中国科学院物理研究所和凝聚态物理中心, 北京 100080;

山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(1996 年 10 月 9 日收到; 1997 年 1 月 6 日收到修改稿)

基于量子不变量构造定理, 简化地导出和扩充了 Lewis 和 Riesenfeld 的结果. 指出所谓的 Lewis-Riesenfeld 相位一般没有物理意义; 为了使其有物理意义, 不变量必须取特殊形式. 文中给出了这种形式. 以磁场中的自旋系统为例, 作了具体讨论.

PACC: 0365; 0290; 7590

1 引 言

如果系统的 Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}(t)$ 依赖于时间 t , 则系统的纯态 $|\psi(t)\rangle$, 即满足含时 Schrödinger 方程 (取 $\hbar = 1$)

$$i\partial|\psi(t)\rangle/\partial t = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle \quad (1)$$

的量子态, 或演化算符 $\hat{U}(t, t_0)$, 即使得 $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ 成立的幺正算符, 一般很难求出. 为此, Lewis 和 Riesenfeld^[1] 发展了一种量子不变量 (以下简称不变量) 方法, 它把 $|\psi(t)\rangle$ 或 $\hat{U}(t, t_0)$ 的求解问题化作不变量 $\hat{I}(t)$ 的瞬时本征谱的求解问题. 此处 $\hat{I}(t)$ 是一个不含 $\partial/\partial t$ 的厄密算符^[1] (但显然也可以是一个不含 $\partial/\partial t$ 的一般线性算符, 见后述), 它对任何纯态的期待值均不依赖于时间的常量:

$$d\langle\psi(t)|\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle/dt = 0, \quad (2)$$

或等价地, 它满足方程

$$\partial\hat{I}(t)/\partial t - i[\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0. \quad (2')$$

设 $\hat{I}(t)$ 有完备的分立的本征谱, 其本征值 λ_n (它们必然与时间无关^[1]) 和相应的正交归一完备的瞬时本征函数系 $|\varphi_n(t)\rangle$ ($n=1, 2, \dots$) 已找到:

$$\begin{aligned} \hat{I}(t)|\varphi_n(t)\rangle &= \lambda_n|\varphi_n(t)\rangle, \\ \langle\varphi_n(t)|\varphi_m(t)\rangle &= \delta_{nm}, \end{aligned}$$

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

$$\sum_n |\varphi_n(t)\rangle \langle \varphi_n(t)| = 1, \quad (3)$$

则当所有 λ_n 都不简并时, Lewis 和 Riesenfeld^[1] 证明, 系统的演化算符可用 $\hat{I}(t)$ 的瞬时本征函数构造出来:

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_n \exp[i\alpha_n(t)] |\varphi_n(t)\rangle \langle \varphi_n(t_0)|, \quad (4)$$

式中 $\alpha_n(t)$ 称为 Lewis-Riesenfeld 相位^[2,3] (或 Lewis 相位^[4]), 它可分解为动力学部分 $\delta_n(t)$ 和几何部分 $\gamma_n(t)$: $\alpha_n(t) = \delta_n(t) + \gamma_n(t)$, 而

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &= - \int_{t_0}^t \langle \varphi_n(t') | \hat{H}(t') | \varphi_n(t') \rangle dt', \\ \gamma_n(t) &= i \int_{t_0}^t \langle \varphi_n(t') | \partial / \partial t' | \varphi_n(t') \rangle dt'. \end{aligned} \quad (5)$$

在文献[5]中, 上述结果被推广到简并情况: 设 λ_n 的简并度为 g_n (它当然也与时间无关), $\hat{I}(t)$ 的属于 λ_n 的 g_n 个正交归一的瞬时本征函数为 $|\varphi_{nq}(t)\rangle$ ($q=1, 2, \dots, g_n$), 则有

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_n \sum_{p=1}^{g_n} \sum_{q=1}^{g_n} V_{qp}^{(n)}(t) V_{rp}^{(n)*}(t_0) |\varphi_{nq}(t)\rangle \langle \varphi_{nr}(t_0)|, \quad (6)$$

式中 $V^{(n)}(t) = (V_{pq}^{(n)}(t))$ 为下列 $g_n \times g_n$ 么正矩阵:

$$V^{(n)}(t) = \hat{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t \Phi^{(n)}(t') dt' \right], \quad (7)$$

式中 $\hat{T}$ 为时间编序算符, 而 $\Phi^{(n)}(t) = (\alpha_{n,pq}(t))$ 为 $g_n \times g_n$ 厄密矩阵, 其元 $\alpha_{n,pq}(t) = \delta_{n,pq}(t) + \gamma_{n,pq}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \delta_{n,pq}(t) &= - \int_{t_0}^t \langle \varphi_{np}(t') | \hat{H}(t') | \varphi_{nq}(t') \rangle dt', \\ \gamma_{n,pq}(t) &= i \int_{t_0}^t \langle \varphi_{np}(t') | \partial / \partial t' | \varphi_{nq}(t') \rangle dt'. \end{aligned} \quad (8)$$

若对某个 n , λ_n 是非简并的, 则略去脚标 p, q 后, (8) 式与 (5) 式同, 故 (4) 式为 (6) 式的特例.

当 $\hat{I}(t)$ 的本征值 λ 在某个区间呈连续分布且均非简并时, 则 Gao 等人^[6] 证明: $\hat{U}(t, t_0)$ 亦有类似于 (4) 式的表达式, 但须把 (3) — (5) 式中的脚标 n 和 m 分别改成 λ 和 μ , 把对 n 的求和改为对 λ 的积分, 并把 δ_{nm} 改为 $\delta(\lambda - \mu)$.

原则上, 瞬时本征谱比动力学方程 (1) 容易求解, 故不变量方法受到广泛注意, 已用于求解含时谐振子^[1-8] 和自旋^[2,9-13] 的演化, 包括用以求找绝热近似下的几何相位. 因此, 对不变量和不变量方法做更深入的研究是不乏意义的, 本文即以此为目的.

本文把文献上的有关结果总结成不变量构造定理. 基于此定理, 简化地导出和扩充了 (4) 和 (6) 式以及一些相关的结果, 例如指出知道一个不变量后, 所有不变量均可求出. 指出 Lewis-Riesenfeld 相位没有确切的取值, 从而没有物理意义. 为了使这种相位有物理意义, 不变量必须取特殊形式, 文中给出了此种特殊形式. 作为例子, 求出了变化磁场中自旋

系统的演化算符和不变量以及 Lewis-Riesenfeld 相位.

2 量子不变量构造定理及其推论

文献[6]已经指出:不变量不限于厄密算符,以下称满足(2)或(2')式的任何含时线性算符 $\hat{I}(t)$ 为不变量.文献[6]还指出,方程(2')的解可形式地表示为

$$\hat{I}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (2'')$$

式中 t_0 为任意取定的初始时刻,而 $\hat{I}(t_0)$ 为 $\hat{I}(t)$ 的初始值,它可以是不显含 t 的任意线性算符.鉴于(2'')式的重要性,下面补充一个初等的证明.

前已提及,任何纯态均可表示为 $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$, 于是有 $\langle \psi(t) | \hat{I}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{I}(t) \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle$, 因此当 $\hat{I}(t)$ 为不变量时,由(2)式知算符

$$\hat{I}_0 = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{I}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (9)$$

不依赖于 t , 从而 $\hat{I}(t)$ 可用 $\hat{I}_0$ 表示为

$$\hat{I}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{I}_0 \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (10)$$

反之,如设 $\hat{I}_0$ 不显含 t 而 $\hat{I}(t)$ 由(10)式定义,则

$$\langle \psi(t) | \hat{I}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | \hat{I}_0 | \psi(t_0) \rangle \quad (11)$$

显然满足(2)式,即 $\hat{I}(t)$ 为不变量.此外由(9)或(10)式知

$$\hat{I}_0 = \hat{I}(t_0). \quad (12)$$

(2')式是用以具体求解不变量的方程,而(2'')式则诠释了不变量的结构,因此它们在不变量理论中具有关键的重要性,我们以定理的形式把它们复述如下:

定理 1(量子不变量构造定理) 含时线性算符 $\hat{I}(t)$ 成为不变量的充要条件是满足(2')或(2'')式.

由此定理(特别是(2'')式)立即可得下列有用的推论:

i) 不变量 $\hat{I}(t)$ 在任何时刻的性质,完全由任意固定时刻 t_0 的 $\hat{I}(t_0)$ 来决定.例如, $\hat{I}(t)$ 为厄密的或么正的,分别当且仅当 $\hat{I}(t_0)$ 为厄密的或么正的; $\hat{I}(t)$ 有分立(连续)谱,当且仅当 $\hat{I}(t_0)$ 有分立(连续)谱;等等.

ii) 不变量 $\hat{I}(t)$ 的本征值及其简并度不依赖于 t .事实上,设 λ 和 $|\varphi(t_0)\rangle$ 分别为 $\hat{I}(t_0)$ 的本征值及本征函数,则由(2'')式可见,

$$|\tilde{\varphi}(t)\rangle \equiv \hat{U}(t, t_0) |\varphi(t_0)\rangle \quad (13)$$

为 $\hat{I}(t)$ 的本征函数,其本征值亦为 λ .反之,设 λ 和 $|\varphi(t)\rangle$ 分别为 $\hat{I}(t)$ 的本征值和本征函数,则 λ 和 $|\tilde{\varphi}(t_0)\rangle \equiv \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\varphi(t)\rangle$ 分别为 $\hat{I}(t_0)$ 的本征值和本征函数.

iii) 设 $|\varphi(t)\rangle$ 为不变量 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征函数, 且相应的本征值为非简并的, 则

$$|\varphi(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\varphi(t_0)\rangle \quad (14)$$

为一纯态(满足 Schrödinger 方程(1)), 此处

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t \{ -\langle \varphi(t') | \hat{H}(t') | \varphi(t') \rangle + i \langle \varphi(t') | \partial/\partial t' | \varphi(t') \rangle \} dt' \quad (15)$$

为 t 的实函数, 称为 Lewis-Riesenfeld 相位.

命题 iii) 很容易推广到 $\hat{I}(t)$ 有简并的情形:

iv) 设不变量 $\hat{I}(t)$ 的本征值 λ 为 g 度简并的, 相应的 g 个正交归一的本征函数为 $|\phi_j(t)\rangle$ ($j=1, 2, \dots, g$), 则

$$|\varphi_j(t)\rangle = \sum_{k=1}^g V_{kj}(t) |\phi_k(t_0)\rangle \quad j = 1, 2, \dots, g \quad (16)$$

构成 Schrödinger 方程的 g 个正交归一的解(纯态). 此处 $V_{kj}(t)$ 为 $g \times g$ 幺正矩阵

$$V(t) = \hat{T} \exp \left[i \int_{t_0}^t \Phi(t') dt' \right] \quad (17)$$

的矩阵元, 其中 $\hat{T}$ 为时间编序算符, 而

$$\Phi(t) = (-\langle \phi_k(t) | \hat{H}(t) | \phi_l(t) \rangle + i \langle \phi_k(t) | \partial/\partial t | \phi_l(t) \rangle) \quad (18)$$

为 $g \times g$ 厄密矩阵.

v) 如果我们已找到一个具有分立完备本征谱的不变量 $\hat{I}(t)$, 其本征子空间互相正交(从而可将 $\hat{I}(t)$ 的本征函数系取成一个正交归一完备系), 则系统的演化算符可按(6)式求出. 当 $\hat{I}(t)$ 的本征谱无简并时, 则演化算符退化为(4)式.

vi) 具有分立完备本征谱的不变量 $\hat{I}(t)$ 是存在的, 此外还可对 $\hat{I}(t)$ 加如下限制: 厄密或幺正, 本征值无简并和属于不同本征值的本征函数相互正交.

证明 在波函数空间中任选一个完备函数系 $|\varphi_j(t_0)\rangle$ ($j=1, 2, \dots$) 和一个复数系列 λ_j ($j=1, 2, \dots$) 以

$$\hat{I}(t_0) |\varphi_j(t_0)\rangle = \lambda_j |\varphi_j(t_0)\rangle \quad (19)$$

定义线性算符 $\hat{I}(t_0)$, 于是由(2'')式定义的不变量 $\hat{I}(t)$ 就有分立完备的本征谱, 本征值为 λ_j ($j=1, 2, \dots$), 与 λ_j 相应的归一化本征函数为 $|\hat{U}(t, t_0) |\varphi_j(t_0)\rangle$. 如果将所有 λ_j 取成实数或幺模复数, 且 $|\varphi_j(t_0)\rangle$ 取得两两正交, 则 $\hat{I}(t)$ 的不同本征子空间是互相正交的, 而 $\hat{I}(t)$ 分别为厄密的或幺正的. 如果令所有 λ_j 两两不相等, 则 $\hat{I}(t)$ 的本征谱无简并. 由以上结果立即得到

定理 2 知道一个不变量后, 则系统的所有不变量即可求出.

证明 如果知道一个不变量, 当其本征谱完备分立时, 则可按(4)或(6)式求得演化算符; 当其本征谱连续时, 也可类似地得到, 见前述. 而一旦演化算符被求出, 则可据(2'')式通过变动 $\hat{I}(t_0)$ 而得到所有的不变量.

推论 ii)—v) 已在文献 [1] 和 [5] 中得到证明; 但此处我们利用 (2'') 式, 使它们的证明得到了明显的简化. 此外, 利用 (2'') 式, 文献 [6] 中还得到下列有用的结果: 若 $\hat{I}(t)$ 和 $\hat{J}(t)$ 是不变量, 则 $\hat{I}(t)\hat{J}(t)$ 也是不变量; 若 $|\psi(t)\rangle$ 是含时 Schrödinger 方程的解, 即 $\hat{I}(t)|\psi(t)\rangle$ 也是.

3 Lewis-Riesenfeld 相位成为量子相位的条件

(15) 式中的 $\alpha(t)$ 称为 **Lewis-Riesenfeld** 相位^[2-4], 从表面上看, 它是一种量子相位. 但是, 由于作为 $\hat{I}(t)$ (注意, 它不含 $\partial/\partial t$) 的归一化的本征函数可被乘上一个任意的含时相因子, 则 $\alpha(t)$ 是个不确定的量. 事实上, 若 $|\varphi(t)\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征函数, 则对于 t 的任意实函数 $\beta(t)$ (不妨取 $\beta(t_0)=0$), $|\varphi'(t)\rangle = e^{-i\beta(t)}|\varphi(t)\rangle$ 也是 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征函数. 相对于 $|\varphi'(t)\rangle$, (14) 和 (15) 式分别成为

$$|\psi(t)\rangle = \exp[i\alpha(t) + \beta(t)]|\varphi'(t)\rangle,$$

$$\alpha(t) + \beta(t) = \int_{t_0}^t \{-\langle\varphi'(t')|\hat{H}(t')|\varphi'(t')\rangle + i\langle\varphi'(t')|\partial/\partial t'|\varphi'(t')\rangle\} dt'.$$

因此所谓的 **Lewis-Riesenfeld** 相位一般没有物理意义, 不能被视为量子相位.

为了使 **Lewis-Riesenfeld** 相位有物理意义, 成为一种真正的量子相位, 必须对 $\hat{I}(t)$ 及其本征函数的取法加以限制. 例如对绝热情况下的循环系统, 我们近似地取 **Hamiltonian** $\hat{H}(t)$ 为不变量^[4], 并将 $\hat{H}(t)$ 的本征函数取得具有对时间的周期性, 其周期与系统的循环周期相同, 则相应地演化一个周期后的 **Lewis-Riesenfeld** 相位就等于动力学相位与 **Berry** 相位 (几何相位)^[14] 之和, 它们均可实验测量^[15].

量子相位的定义有广义和狭义两种. 设 $|\psi(t)\rangle$ 是一个归一化纯态, 则

$$\phi = \arg\langle\psi(t_0)|\psi(t_1)\rangle = \arg\langle\psi(t_0)|\hat{U}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \text{当}\langle\psi(t_0)|\psi(t_1)\rangle \neq 0 \text{ 时}, \quad (20)$$

称为 $|\psi(t)\rangle$ 在 t_1 时刻相对于 t_0 时刻的 **Pancharatnam**^[16] 型相位, 这是一种广义的量子相位, 若 $\langle\psi(t_0)|\psi(t_1)\rangle \neq 0$, 它对任意的纯态 $|\psi(t)\rangle$ 以及 t_1 和 t_0 都有定义.

当

$$|\psi(t_1)\rangle = e^{i\phi}|\psi(t_0)\rangle, \quad \text{且 } \phi \text{ 为实数时}, \quad (21)$$

ϕ 称为 $|\psi(t)\rangle$ 在 t_1 时刻相对于 t_0 时刻的 **Berry**^[14] 型 (或 **Aharonov-Anandan**^[17] 型) 相位^[18], 这是 **Pancharatnam** 型相位的特例. 不是对任意的纯态 $|\psi(t)\rangle$ 都可以定义 **Berry** 型相位. (21) 式表明

$$\hat{U}(t_1, t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{i\phi}|\psi(t_0)\rangle, \quad (22)$$

所以当 t_1 和 t_0 取定时, 只有当 $|\psi(t_0)\rangle$ 是演化算符 $\hat{U}(t_1, t_0)$ 的本征态时^[20], 才可以定义 **Berry** 型相位.

对于上述两种量子相位, 都可以把它们分解为动力学相位 δ 与几何相位 γ 之和:

$$\phi = \delta + \gamma, \quad (23)$$

式中

$$\delta = - \int_{t_0}^{t_1} \langle \varphi(t') | \hat{H}(t') | \varphi(t') \rangle dt', \quad (24)$$

$$\gamma = \phi - \delta. \quad (25)$$

而且对于这两种定义的 ϕ , δ 和 γ , 都可以通过实验加以检测.

下面采用 Berry 型的量子相位定义. 现在来看由不变量 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征态 $|\varphi(t)\rangle$ 按(15)式确定的纯态具有 Berry 型量子相位的条件. 以 $|\varphi(t)\rangle = \exp[i\alpha(t)]|\varphi(t_0)\rangle$ 代入(22)式, 得

$$\hat{U}(t_1, t_0)|\varphi(t_0)\rangle = e^{i\phi}|\varphi(t_0)\rangle; \quad (26)$$

而 $\exp[i\alpha(t)]|\varphi(t_0)\rangle$ 作为纯态, 必有 $\exp[i\alpha(t_1)]|\varphi(t_1)\rangle = \hat{U}(t_1, t_0)\exp[i\alpha(t_0)]|\varphi(t_0)\rangle$, 注意不妨令 $\alpha(t_0) = 0$, 故有

$$|\varphi(t_1)\rangle = \exp[-i\alpha(t_1)]\hat{U}(t_1, t_0)|\varphi(t_0)\rangle. \quad (27)$$

由此知道, 若要 $|\varphi(t)\rangle = \exp[i\alpha(t)]|\varphi(t_0)\rangle$ 具有 Berry 型量子相位, $|\varphi(t_0)\rangle$ 必须是 $\hat{U}(t_1, t_0)$ 的本征函数, 其本征值(么模复数)的相位即是 Berry 型量子相位, 且 $|\varphi(t_1)\rangle$ 是由 $|\varphi(t_0)\rangle$ 演化而来的纯态在 t_1 时刻的取值与一个相因子 $\exp[-i\alpha(t_1)]$ 的乘积. 这个结果可以推广成

定理 3 设 $\hat{I}(t)$ 为具有正交完备无简并本征谱的不变量, $|\varphi_n(t)\rangle$ ($n=1, 2, \dots$) 为其归一化本征函数, $\alpha_n(t)$ 由 $|\varphi_n(t)\rangle$ 按(15)式计算, 则每个纯态 $\exp[i\alpha_n(t)]|\varphi_n(t_0)\rangle$ 都具有 t_1 相对于 t_0 的 Berry 型量子相位的充要条件为 $\hat{I}(t_0)$ 与 $\hat{U}(t_1, t_0)$ 对易:

$$[\hat{I}(t_0), \hat{U}(t_1, t_0)] = 0, \quad (28)$$

亦即

$$\hat{I}(t_1) = \hat{I}(t_0). \quad (29)$$

这时, 每个 $|\varphi_n(t_0)\rangle$ 均为 $\hat{I}(t_0)$ 与 $\hat{U}(t_1, t_0)$ 的共同本征函数, 它相对于 $\hat{U}(t_1, t_0)$ 的本征值的相位即为 Berry 型相位; 而 $|\varphi_n(t_1)\rangle$ 为纯态 $\hat{U}(t_1, t_0)|\varphi_n(t_0)\rangle$ 与相因子 $\exp[-i\alpha_n(t_1)]$ 的乘积, $\alpha_n(t_1)$ 与 $|\varphi_n(t_0)\rangle$ 满足(15)式类型的恒等式.

(28)与(29)式的等价性可由定理 1 直接看出. 应当指出, 当初始时刻取定后, 满足(28)式的 $\hat{I}(t_0)$ 一般随 t_1 而变, 且难以找到. 为此, 下面研究一种特殊的量子系统: 周期为 τ 的循环量子系统, 并将 t_1 取为 $t_0 + \tau$. 所谓循环量子系统, 是其 Hamiltonian $\hat{H}(t)$ 相对于时间具有周期性, 即满足

$$\hat{H}(t + \tau) = \hat{H}(t) \quad (30)$$

的系统, 此处 τ 为循环周期.

对于循环系统, 易证

$$\hat{U}(t + \tau, t_0) = \hat{U}(t, t_0)\hat{U}(t_0 + \tau, t_0), \quad (31)$$

因此有

$$\begin{aligned}\hat{I}(t+\tau) &= \hat{U}(t, t_0) \hat{U}(t_0 + \tau, t_0) \hat{I}(t_0) \hat{U}^\dagger(t_0 + \tau, t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \\ &= \hat{U}(t, t_0) \hat{I}(t_0 + \tau) \hat{U}^\dagger(t, t_0).\end{aligned}\quad (32)$$

这样便得到

定理 4 对于循环系统, 存在具有循环特性

$$\hat{I}(t+\tau) = \hat{I}(t) \quad (33)$$

的不变量, 其充要条件为 $\hat{I}(t_0)$ 与 $\hat{U}(t_0 + \tau, t_0)$ 对易:

$$[\hat{I}(t_0), \hat{U}(t_0 + \tau, t_0)] = 0, \quad (34)$$

从而循环的 $\hat{I}(t)$ 具有正交归一完备的本征函数系. 此外还可要求 $\hat{I}(t)$ 为厄密的或么正的以及其本征谱为无简并的. 令 $\hat{I}(t_0) = \hat{U}(t_0 + \tau, t_0)$, 而按(2'')式确定的 $\hat{I}(t)$ 为这样的么正不变量的特例之一.

事实上, 由(32)式可立即看出(33)和(34)式互为充要条件. 设 $|j\rangle$ ($j=1, 2, \dots$) 为 $\hat{U}(t_0 + \tau, t_0)$ 的本征函数系, 因前者为么正的, 故后者可被取为正交归一完备系. 任取一个复数序列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, 以

$$\hat{I}(t_0)|j\rangle = \lambda_j|j\rangle \quad (35)$$

定义一个线性算符 $\hat{I}(t_0)$. 显然(34)式从而(33)式是成立的. 如果令所有的 λ_j 为实数或么模复数, 则 $\hat{I}(t)$ 分别为厄密的或么正的; 如果令 λ_j 两两不等, 则 $\hat{I}(t)$ 的本征谱无简并.

设 $\hat{I}(t)$ 是一个循环不变量, $|\varphi(t)\rangle$ 是 $\hat{I}(t)$ 的一个非简并的归一化本征函数, 显然它可以被取得具有周期性: $|\varphi(t+\tau)\rangle = |\varphi(t)\rangle$. 由(15)式计算 Lewis-Riesenfeld 相位 $\alpha(t)$, 并令

$$\omega \equiv \alpha(\tau)/\tau, \quad |u(t)\rangle \equiv \exp\{i[\alpha(t) - \omega(t - t_0)]\} |\varphi(t)\rangle, \quad (36)$$

则(14)式中的纯态可以改写为

$$|\psi(t)\rangle = \exp[i\omega(t - t_0)] |u(t)\rangle. \quad (37)$$

易见 $|u(t)\rangle$ 也是 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征函数, 且对 t 是周期的:

$$|u(t+\tau)\rangle = |u(t)\rangle, \quad (38)$$

因此, (37)式中的 $|\psi(t)\rangle$ 是 Schrödinger 方程的 Bloch 形式的解^[18-20], 且有

$$\omega\tau = \alpha(\tau) = \int_0^\tau \{-\langle u(t) | \hat{H}(t) | u(t) \rangle + i\langle u(t) | \partial/\partial t | u(t) \rangle\} dt. \quad (39)$$

由于 Bloch 频率 ω 是一个有物理意义的量, 所以对于循环系统, 按且仅按上述 $\hat{I}(t)$ 和 $|\varphi(t)\rangle$ 定义的 Lewis-Riesenfeld 相位 $\alpha(\tau)$ 才也是有物理意义的.

满足条件(28)或(34)式的不变量一般是难于求出的(在第4节中将举出一个满足上述条件的例子), 因此, 为了保证 Lewis-Reiensenfeld 相位有物理意义是难以达到的. 而求

不变量的目的在于简化对含时 Schrödinger 方程的求解, 所以没有必要为保证 Lewis-Riesenfeld 相位有物理意义而对 $\hat{I}(t)$ 加以限制. 事实上, 知道任意一个具有分立的正交完备本征函数系的不变量后, 就可按定理 2 求出演化算符, 而 Berry 型(甚至 Pancharatnam 型)量子相位都可按(20)式求出.

4 变化磁场中的 S-自旋系统

作为本文理论的一个例子, 我们来考虑一个在随时间变化的磁场中的 S-自旋磁矩. 这个量子系统相对简单, 从而容易计算: 第一, 波函数空间是一个有限维 ($2S+1$ 维) Hilbert 空间, 第二, Hamiltonian 很简单, 为

$$\hat{H}(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \hat{\mathbf{S}} = \omega(t) \hat{S}_z + G(t) [e^{-i\phi(t)} \hat{S}_+ + e^{i\phi(t)} \hat{S}_-], \quad (40)$$

式中 $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ 为自旋算符, $\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, $\mathbf{B}(t) = B(t)(\sin \theta(t) \cos \phi(t), \sin \theta(t) \sin \phi(t), \cos \theta(t))$ 为变化磁场与 Bohr 磁子的乘积, 而

$$\omega(t) = B(t) \cos \theta(t); \quad G(t) = (1/2) B(t) \sin \theta(t). \quad (41)$$

文献[12, 13]已经通过求找一个不变量而得到演化算符, 下面将指出, 演化算符可以直接求出, 而不必经过求不变量的中间步骤.

我们的做法是将 Schrödinger 方程(1)变换到随动坐标系来处理. 设 $\hat{R}(t)$ 为相应的变换算符(么正算符), 令

$$|\psi(t)\rangle = \hat{R}(t) |\psi'(t)\rangle, \quad (42)$$

代入(1)式, 得

$$i\partial |\psi'(t)\rangle / \partial t = \hat{H}'(t) |\psi'(t)\rangle, \quad (43)$$

式中

$$\hat{H}'(t) = \hat{R}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{R}(t) - i\hat{R}^\dagger(t) \partial \hat{R}(t) / \partial t \quad (44)$$

为随动坐标系里的 Hamiltonian. 任取定一个归一化纯态 $|\psi_0(t)\rangle$, 定义

$$\mathbf{s}_0 = \langle \psi_0(t) | \hat{\mathbf{S}} | \psi_0(t) \rangle, \quad (45)$$

则由(1)和(40)式, 得

$$d\mathbf{s}_0(t)/dt = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{s}_0(t), \quad (46)$$

可见 $|\mathbf{s}_0(t)| = \text{const.}$ 与时间无关, 从而单位矢量

$$\mathbf{k}_0(t) = \mathbf{s}_0(t) / |\mathbf{s}_0(t)| \quad (47)$$

亦满足类似(46)的方程:

$$d\mathbf{k}_0(t)/dt = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{k}_0(t), \quad (48)$$

其初始条件为

$$\mathbf{k}_0(t_0) = \langle \psi_0(t_0) | \hat{\mathbf{S}} | \psi_0(t_0) \rangle / |\langle \psi_0(t_0) | \hat{\mathbf{S}} | \psi_0(t_0) \rangle|. \quad (49)$$

令 $\mathbf{k}_0(t) = (\sin \gamma(t) \cos \beta(t), \sin \gamma(t) \sin \beta(t), \cos \gamma(t))$, 则方程(48)又可写成

$$\dot{\gamma} + 2G \sin(\beta - \phi) = 0,$$

$$(\dot{\beta} - \omega) \sin \gamma + 2 G \cos \gamma \cos(\beta - \phi) = 0, \quad (50)$$

式中“·”表示对 t 的微商,并隐去了各量对 t 的依赖性.方程(50)的初始条件为

$$\begin{aligned} \gamma(t_0) &= \arccos |\langle \psi_0 | \hat{S}_z | \psi_0(t_0) \rangle| / |\langle \psi_0(t_0) | \hat{S} | \psi_0(t_0) \rangle|, \\ \beta(t_0) &= \arctan |\langle \psi_0(t_0) | \hat{S}_y | \psi_0(t_0) \rangle| / |\langle \psi_0(t_0) | \hat{S}_x | \psi_0(t_0) \rangle|. \end{aligned} \quad (51)$$

所谓随动坐标系,即是以 $\mathbf{s}_0(t)$ 或 $\mathbf{k}_0(t)$ 为自旋量子化轴方向的坐标系.具体做法是,定义单位矢量

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{k}_0(t) / |\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}_0(t)| = (-\sin \beta(t), \cos \beta(t), 0), \quad (52)$$

式中 $\mathbf{e}_z$ 为 z 方向的单位矢量,并令 $\hat{R}(t)$ 为自旋旋转算符:

$$\hat{R}(t) = \exp[-i\gamma(t)\mathbf{g}(t) \cdot \hat{S}] = \exp\left\{-\frac{\gamma(t)}{2}[\exp(-i\beta(t))\hat{S}_+ - \exp(i\beta(t))\hat{S}_-]\right\}, \quad (53)$$

利用^[13]

$$\begin{aligned} \hat{R}^\dagger \hat{S}_z \hat{R} &= \cos \gamma \hat{S}_z - (1/2) \sin \gamma (e^{-i\beta} \hat{S}_+ + e^{i\beta} \hat{S}_-), \\ \hat{R}^\dagger \hat{S}_\pm \hat{R} &= e^{\pm i\beta} \left[\sin \gamma \hat{S}_z + e^{\mp i\beta} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \hat{S}_\pm - e^{\pm i\beta} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \hat{S}_\mp \right] \end{aligned} \quad (54)$$

和

$$i\hat{R}^\dagger \partial \hat{R} / \partial t = -\dot{\beta}(1 - \cos \gamma) \hat{S}_z - (1/2) [e^{-i\beta}(\dot{\beta} \sin \gamma + i\dot{\gamma}) \hat{S}_+ + e^{i\beta}(\dot{\beta} \sin \gamma - i\dot{\gamma}) \hat{S}_-], \quad (55)$$

以及(50)式,则有

$$\hat{H}'(t) = \{\mathbf{k}_0(t) \cdot \mathbf{B}(t) + \dot{\beta}(t)[1 - \cos \gamma(t)]\} \hat{S}_z. \quad (56)$$

若令

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{k}_0(t') \cdot \mathbf{B}(t') dt', \quad (57)$$

$$\Gamma(t) = \int_{t_0}^t \dot{\beta}(t')[1 - \cos \gamma(t')] dt', \quad (58)$$

则由(56)式知:相对于 $\hat{H}'(t)$ 的演化算符为

$$\hat{U}'(t, t_0) = \exp[-i[\Delta(t) + \Gamma(t)] \hat{S}_z]. \quad (59)$$

再考虑到(42)式,则相对于 $\hat{H}(t)$ 的演化算符为

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{R}(t) \hat{U}'(t, t_0) \hat{R}^\dagger(t_0) \\ &= \exp\left\{-\frac{\gamma(t)}{2}[\exp(-i\beta(t))\hat{S}_+ - \exp(i\beta(t))\hat{S}_-]\right\} \exp[-i[\Delta(t) + \Gamma(t)] \hat{S}_z] \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{\gamma(t_0)}{2}[\exp(-i\beta(t_0))\hat{S}_+ - \exp(i\beta(t_0))\hat{S}_-]\right\}, \end{aligned} \quad (60)$$

式中 $\gamma(t)$ 和 $\beta(t)$ 由(50)和(51)式确定.这个结果与文献[10]的结果相同,但导出方法以及表达式(56)–(59)要简单明了得多.

利用上述 $\hat{U}(t, t_0)$, 按(2'')式可以求出系统的所有不变量, 其中 $\hat{I}(t_0)$ 为任意线性算符. 而

$$\hat{I}_0(t) = \mathbf{k}_0(t) \cdot \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{R}}(t) \hat{\mathbf{S}}_z \hat{\mathbf{R}}^\dagger(t) \quad (61)$$

为不变量(上式第二个等式即是(54)式的第一式), 可以不通过(2'')式而得到直接证明: 设 $|\psi(t)\rangle$ 为一个任意归一化纯态, 将由它按(45)式定义的矢量记为 $\mathbf{s}(t)$, 即 $\mathbf{s}(t) = \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{S}} | \psi(t) \rangle$, 则 $\mathbf{s}(t)$ 亦满足方程(46), 于是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{I}_0(t) | \psi(t) \rangle &= \frac{d\mathbf{k}_0}{dt} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_0 \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ &= \mathbf{k}_0 \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (62)$$

因此按(2)式, $\hat{I}_0(t)$ 确为一个不变量, 且此不变量为厄密的, 并当 $\mathbf{B}(t)$ 恒不为零时, 具有无简并的正交归一完备的本征函数系. 顺便指出, (61)式的 $\hat{I}_0(t)$ 即为文献[12]中所求的不变量, 但我们这里的论证更简洁, 物理意义也更明确.

由于定义 $\mathbf{k}_0(t)$ 的 $|\psi_0(t)\rangle$ 可以有多样选择, 故由(61)式给出的不变量 $\hat{I}_0(t)$ 并不唯一. 不过 $|\psi_0(t)\rangle$ 的变化, 不改变方程(48)或(50), 只改变初始条件(49)或(51)式. 另外, 也可任意取定 $\mathbf{k}_0(t_0)$ ($|\mathbf{k}_0(t_0)| = 1$), 以及 $\gamma(t_0)$ 和 $\phi(t_0)$ 作为初始条件, 这相当于对 $|\psi_0(t)\rangle$ 的选择.

由(61)式可见, 可取

$$|\varphi_m(t)\rangle = \hat{\mathbf{R}}(t) |m\rangle; \quad m = -S, -S+1, \dots, S \quad (63)$$

为 $\hat{I}_0(t)$ 的正交归一完备无简并的本征函数系, 其中 $|m\rangle$ 为 $\hat{\mathbf{S}}_z$ 的本征值为 m 的归一化本征函数. 于是与 $|\varphi_m(t)\rangle$ 相联系的 Lewis-Riesenfeld 相位为

$$\alpha_m(t) = \delta_m(t) + \gamma_m(t), \quad (64)$$

式中

$$\delta_m(t) = - \int_{t_0}^t \langle \varphi_m(t') | \hat{\mathbf{H}}(t') | \varphi_m(t') \rangle dt' = - m \int_{t_0}^t \mathbf{k}_0(t') \cdot \mathbf{B}_0(t') dt' = - m \Delta(t) \quad (65)$$

为 $\alpha_m(t)$ 中的动力学部分, 而

$$\gamma_m(t) = i \int_{t_0}^t \langle \varphi_m(t') | \partial \varphi_m(t') / \partial t' \rangle dt' = - m \int_{t_0}^t \dot{\beta}(t') [1 - \cos \gamma(t')] dt' = - m \Gamma(t) \quad (66)$$

为 $\alpha_m(t)$ 中的几何部分.

(58)式和上式中的 $\Gamma(t)$ 可解释为在单位球面上, $\mathbf{k}_0$ 从 t_0 到 t 所画轨迹与联结 $\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{k}_0(t_0)$ 以及 $\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{k}_0(t)$ 的最短大圆弧所构成的闭合回线, 相对于球心所张的立体角; $\gamma_m(t)$ 为它的 $-m$ 倍. 虽然按第3节的论述, 这种解释一般没有物理意义, 但在绝热条件下, 可将 $\hat{\mathbf{H}}(t)$ 近似取为不变量^[4], 这时, $\mathbf{k}_0(t)$ 可取成 $\mathbf{b}(t) = \mathbf{B}(t)/|\mathbf{B}(t)|$, 而 $\gamma_m(t)$ 成为 Berry 相位. 这个结果是对 Berry^[14] 关于 $1/2$ -自旋的结果的推广. 所以在绝热条件

下,上述解释仍有物理意义.

将(63)–(66)式代入(4)式,重又得到(60)式,这正是文献[12]和[13]的做法.现在考虑循环情况,即

$$\mathbf{B}(t+\tau) = \mathbf{B}(t) \quad (67)$$

的情况.这时(30)式成立,从而系统有 Bloch 到形式的纯态.将(45)式中的 $|\phi_0(t)\rangle$ 取成这样的纯态^[18,19]:

$$|\phi_0(t)\rangle = \exp[i\omega_0(t-t_0)]|u_0(t)\rangle; \quad |u_0(t+\tau)\rangle = |u_0(t)\rangle, \quad (68)$$

当然 $|\phi_0(t)\rangle$ 和 $|u_0(t)\rangle$ 还是归一化的.这样, $\mathbf{k}_0(t)$, 从而 $\gamma(t)$, $\beta(t)$ 以及 $\hat{R}(t)$ 均具有周期性:(具体做法是通过调节初始条件,从方程(48)或(50)解出周期的 $\mathbf{k}_0(t)$.)

$$\mathbf{k}_0(t+\tau) = \mathbf{k}_0(t); \quad \hat{R}(t+\tau) = \hat{R}(t). \quad (69)$$

按定理 4, $\hat{I}_0(t_0)$ 与 $\hat{U}(t_0+\tau, t_0)$ 对易(这个结论可直接通过计算验证).令

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta(t_0+\tau) = \int_0^\tau \mathbf{k}_0(t) \cdot \mathbf{B}(t) dt, \\ \Gamma_0 &= \Gamma(t_0+\tau) = \int_0^\tau \dot{\beta}(t) [1 - \cos \gamma(t)] dt, \end{aligned} \quad (70)$$

和

$$|\phi_m(t_0)\rangle = |\varphi_m(t_0)\rangle = \hat{R}(t_0)|m\rangle, \quad (71)$$

则以它为初始条件的纯态为

$$|\phi_m(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\phi_m(t_0)\rangle = \exp[-im(\Delta(t) + \Gamma(t))]\hat{R}(t)|\varphi_m(t)\rangle, \quad (72)$$

于是有

$$|\phi_m(t+\tau)\rangle = \exp[-im(\Delta_0 + \Gamma_0)]|\phi_m(t)\rangle. \quad (73)$$

因此 $|\phi_m(t)\rangle$ 演化一周后所获得的 Aharonov-Anandan 相位^[14]为 $-m(\Delta_0 + \Gamma_0)$, 这与文献[12]的结果相同,但(70)式的物理意义更清晰.如令

$$\begin{aligned} \omega_m &= -m(\Delta_0 + \Gamma_0)/\tau; \\ |u_m(t)\rangle &= \exp[-i\omega_m(t-t_0)]|\phi_m(t)\rangle, \end{aligned} \quad (74)$$

则 $|\phi_m(t)\rangle$ 可以写成 Bloch 函数形式:

$$|\phi_m(t)\rangle = \exp[i\omega_m(t-t_0)]|u_m(t)\rangle \quad m = -S, -S+1, \dots, S, \quad (75)$$

式中 $|u_m(t+\tau)\rangle = |u_m(t)\rangle$. 因此我们已求出系统的全部 $2S+1$ 个 Bloch 形式的纯态.

前面已对任意的 $\mathbf{B}(t)$ 求出了 $\hat{U}(t, t_0)$, 但(60)式仍只是具有形式的意义^[12], 这是因为 $\mathbf{k}_0(t)$ 尚待求解的缘故;即使 $\mathbf{k}_0(t)$ 已经求出(比如用数值方法), (60)式也过于复杂, 不便于用以做进一步的具体计算.为此下面考虑两种特殊情况.

第一种特殊情况是

$$d\phi(t)/dt = \omega(t) = B(t)\cos\theta(t), \quad (76)$$

从而

$$\hat{H}(t) = [d\phi(t)/dt]\hat{S}_z + G(t)[e^{-i\phi(t)}\hat{S}_+ + e^{i\phi(t)}\hat{S}_-] \quad (77)$$

的情况^[21]. 这时我们选新的随动坐标, 即令变换算符为

$$\hat{R}(t) = \exp[-i\phi(t)\hat{S}_z]. \quad (78)$$

易证与这种 $\hat{R}(t)$ 相对应, 有

$$\hat{H}'(t) = 2G(t)\hat{S}_x, \quad (79)$$

故与 $\hat{H}'(t)$ 相联系的演化算符为 $\hat{U}'(t, t_0) = \exp\left[-2i\int_{t_0}^t G(t')dt'\hat{S}_x\right]$, 从而与 $\hat{H}(t)$ 相联系的演化算符为

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp[-i\phi(t)\hat{S}_z]\exp\left[-2i\int_{t_0}^t G(t')dt'\hat{S}_x\right]\exp[i\phi(t_0)\hat{S}_z]. \quad (80)$$

在文献[21]中, 上述结果是针对 1/2-自旋而得到的, 现在我们把它推广到了任意的自旋.

第二种特殊情况是

$$B(t) = B = \text{const.}, \quad \theta(t) = \theta = \text{const.}, \quad \phi(t) = at \quad (81)$$

的情况^[22, 23], 即大小一定的磁场绕 z 轴作匀角速 a 旋进的情况. 这时 $\omega(t) = \omega = B\cos\theta$ 和 $G(t) = G = (1/2)B\sin\theta$ 以及 $d\phi(t)/dt = a$ 均为常数, 而且可以 $d\phi(t)/dt \neq \omega$.

仍取(78)式的 $\hat{R}(t)$ 为变换算符, 此时

$$\hat{R}(t) = \exp(-iat\hat{S}_z), \quad (82)$$

则易证

$$\hat{H}'(t) = (\omega - a)\hat{S}_z + 2G\hat{S}_x, \quad (83)$$

它不显含时间, 故相应于 $\hat{H}'(t)$ 的演化算符为

$$\hat{U}'(t, t_0) = \exp\{-i(t - t_0)[(\omega - a)\hat{S}_z + 2G\hat{S}_x]\}, \quad (84)$$

从而与 $\hat{H}(t)$ 相应的演化算符为

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{R}(t)\hat{U}'(t, t_0)\hat{R}^\dagger(t_0) \\ &= \exp(-iat\hat{S}_z)\exp\{-i(t - t_0)[(\omega - a)\hat{S}_z + 2G\hat{S}_x]\}\exp(iat_0\hat{S}_z). \end{aligned} \quad (85)$$

利用(85)式的演化算符容易进行各种具体计算, 此处不再赘述, 可参见文献[22, 23], 虽然在其中仅讨论了 1/2-自旋.

5 总 结

本文将文献上的有关结果总结为“量子不变量构造定理”, 即定理 1. 基于此定理(特别是(2'')式), 简化地导出和扩充了 Lewis 和 Riesenfeld 的结果, 例如定理 1 的推论 vi)指出, 具有分立完备本征谱且不同本征子空间互相正交的不变量(甚至可要求它为厄密的或么正的)是存在的; 而定理 2 指出, 已知一个不变量, 则系统的演化算符和全部不变量均可求出. 定理 1 的推论 ii)—v)在文献[1, 5]中已经得到, 但本文从(2'')式出发的论证更简单.

由于不变量 $\hat{I}(t)$ 的归一化本征函数可被乘上一个任意的含时相因子, 故 Lewis-

Riesenfeld 相位一般没有物理意义,不可视为量子相位.为使之成为量子相位(Berry 型),则 $\hat{I}(t)$ 及其本征函数必须满足一定的条件,见定理 3 和定理 4,后者是关于循环量子系统的.

作为例子,具体讨论了变化磁场中的自旋系统,求出了其演化算符和不变量以及 Lewis-Riesenfeld 相位,(对循环系统,当把 $\mathbf{k}_0(t)$ 取得具有周期性时,则循环一周后所得到的这种相位即称为 Berry 型相位.)所用方法比文献[12,13](特例[21—23])简单得多.

- [1] H. R. Lewis, Jr. and W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**(1969), 1458; H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, **18**(1967), 510.
- [2] S. S. Mizrahi, *Phys. Lett.*, **A138**(1989), 465.
- [3] L. F. Wei, J. Q. Liang and B. Z. Li, *Nuovo Cimento*, **B110**(1995), 1357.
- [4] D. A. Morales, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21**(1988), L889.
- [5] O. J. Kwon and J. K. Kim, *Phys. Lett.*, **A166**(1992), 107.
- [6] X. C. Gao, J. B. Xu and T. Z. Qian, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 7016.
- [7] 高孝纯、许晶波、钱铁铮, *物理学报*, **40**(1991), 25.
- [8] S. Abe, *Phys. Lett.*, **A181**(1993), 359.
- [9] N. Datta, G. Ghosh and M. H. Engineer, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 526.
- [10] J. B. Xu, T. Z. Qian and X. C. Gao, *Europhys. Lett.*, **15**(1991), 119.
- [11] 许晶波、钱铁铮、高孝纯, *科学通报*, **36**(1991), 821.
- [12] X. C. Gao, J. B. Xu and T. Z. Qian, *Phys. Lett.*, **A152**(1991), 449.
- [13] Y. Z. Lai, J. Q. Liang, H. J. W. Muller-Kirsten *et al.*, *Phys. Rev.*, **A53**(1996), 3691.
- [14] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. London*, **A392**(1984), 45.
- [15] A. Shapere and F. Wilczek eds., *Geometric Phases in Physics*(World Sci. Pub., Singapore, 1989).
- [16] S. Pancharatnam, *Proc. Indian Acad. Sci.*, **A44**(1956) 247; S. Ramaseshan and R. Nityananda, *Curr. Sci.*, **55**(1986), 1225; M. V. Berry, *J. Mod. Opt.*, **34**(1987), 1401.
- [17] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1593.
- [18] 李伯臧、张德刚、吴建华等, *物理学报*, **46**(1997), 227.
- [19] B. Z. Li, F. L. Yan, J. H. Wu *et al.*, *Science in China*, **A39**(1996), 963.
- [20] L. A. Wu, *Phys. Rev.*, **A50**(1994), 5327; **A53**(1996), 2053.
- [21] A. G. Wagh and V. C. Rakhacha, *Phys. Lett.*, **A196**(1994), 139.
- [22] A. G. Wagh and V. C. Rakhacha, *Phys. Lett.*, **A170**(1992), 71.
- [23] A. G. Wagh and V. C. Rakhacha, *Phys. Rev.*, **A48**(1993), R1729.

NOTES ON THE QUANTUM INVARIANT AND ON THE RELATION BETWEEN IT AND QUANTUM PHASE

LI BO-ZANG ZHANG LING-YUN ZHANG XIANG-DONG

(*Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics, Academia Sinica, Beijing 100080;*

Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006)

(Received 9 October 1996; revised manuscript received 6 January 1997)

ABSTRACT

Based on the construction theorem of quantum invariant, the results of Lewis and Riesenfeld are rededuced in a much simpler way and extended significantly. Meanwhile, it is pointed out that the Lewis-Riesenfeld phases are in general not of physical meaning unless the invariants take specific forms which have been worked out. As an example, the spin system in a magnetic field is discussed in detail.

PACC: 0365; 0290; 7590