

控制离子云混沌运动中的不稳定性^{*}

海文华^{1)†} 段宜武¹⁾²⁾ 朱熙文²⁾ 施 磊²⁾ 罗学立²⁾ 何春山¹⁾

1)(湖南师范大学物理系,长沙 410081)

2)(中国科学院武汉物理与数学研究所,武汉 430071)

(1997 年 4 月 14 日收到;1997 年 6 月 23 日收到修改稿)

射频阱中离子云与检测场的相互作用由 Duffing 方程描述.在小阻尼条件下,得到嵌于混沌吸引子中的不稳定周期解及其稳定性条件.分析表明,调节直流扫描电压等参数去拟合该条件,可以控制混沌运动中的不稳定性.有关实验定性支持这一结论.

PACC: 3280; 4250; 0545; 3290

1 引 言

囚禁于射频阱中的离子具有混沌和有序两种运动状态,即所谓的云态和晶态^[1,2].云态离子的结晶和晶态离子的熔化^[3,4],反映了有序与混沌之间的相变^[5,6],此即系统的一种有趣的非线性现象.通常系统的非线性主要来自离子间的 Coulomb 力^[7]、离子与激光场之间的相互作用^[8]和由阱缺陷引起的非谐力^[9]等.关于离子间的 Coulomb 碰撞导致的混沌运动,已有不少文献报道.对于共振激光驻波作用于单离子产生的混沌,文献[10]用 Melnikov 分析法和数值法进行了讨论.在文献[11,12]中,本文部分作者提出了离子云的非谐运动方程,即著名的 Duffing 方程,并报道了弱非线性条件下的理论结果和相应的实验结果.最近,我们在文献[13,14]提出了关于控制混沌的新的分析方法和标准.

本文将运用上述分析和实验方法,研究离子云的强非谐运动.在小阻尼和弱检测场情形,得到系统紧邻同宿轨道的不稳定周期解.证明这些解嵌于混沌吸引子之中,且具有条件稳定性,还得到依赖于初始常数的稳定性条件,根据该条件可将不稳定性有效地控制.分析和实验一致说明,受控稳定的周期解在参数空间具有分立的振幅值,它们对应着吸收信号强度峰值;直流电压扫描速率越小,离子数密度越大,信号峰数量越多.

2 紧邻同宿轨道的不稳定周期解

在我们的射频装置中^[15],假定非谐势满足 z 轴旋转对称和关于 $z=0$ 平面反射对称,略去 r 方向微运动产生的高阶项,则在检测场驱动下的离子云沿 z 方向慢运动由非谐受

^{*} 国家自然科学基金及中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室基金资助的课题.

[†] 中国高等科学技术中心(世界实验室),北京 100080.

迫阻尼振动方程描述^[11,12].适当选择系统参数,方程可表示为

$$\ddot{z} - \omega_0^2 z + \lambda z^3 = \epsilon(B \cos \omega t - \gamma \dot{z}), \quad (1)$$

式中 $\epsilon\gamma$ 为阻尼系数, ϵB 和 ω 分别为检测场的振幅和频率. z 方向慢运动频率 ω_0 和非谐参数 λ 与直流扫描电压 V_{dc} 的关系为^[11,12]

$$\omega_0^2 = \omega_{ct}^2 \approx (a-1)\omega_i^2 + b = b + \frac{2e^2 V^2}{m^2 r_0^4 \Omega^2} - \frac{2e}{m r_0^2} V_{dc}, \quad (2a)$$

$$\lambda = \frac{8\lambda_{ct}\omega_{ct}^2}{3R_c^2} \approx \frac{2(a\omega_i^2 - 0.8b)[(a-1)\omega_i^2 + b]}{3R_c^2(\omega_i^2 - b)}, \quad (2b)$$

式中参数 $e, m, r_0, \Omega, V, V_{dc} = u$ 见文献[11], 其余参数见文献[12], 参数 a 与阱结构有关, b 正比于离子数密度. (1)式是标准的 Duffing 方程, 数值方法和实验研究表明, 在 $\epsilon=0$ 时该方程的同宿轨道附近存在混沌^[16], 采用负反馈方法可以控制部分参数区域中的混沌行为^[17]. 本文将结合分析和实验方法, 讨论该方程描述的离子云的稳定性控制问题.

在具体实验中, 一般阻尼系数和检测场振幅都很小, 即 $0 < \epsilon \ll 1$, 从而(1)式等号右边部分可看作对系统的微扰. 运用直接扰动法, 将(1)式的解按 ϵ 的幂级数展开为

$$z = z_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i z_i, \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 并令 ϵ 同次幂的系数之和等于零, 可得

$$\ddot{z}_0 - \omega_0^2 z_0 + \lambda z_0^3 = 0, \quad \dot{z}_0 = \pm \sqrt{2A + \omega_0^2 z_0^2 - \frac{1}{2}\lambda z_0^4}, \quad (4)$$

$$\ddot{z}_i - \omega_0^2 z_i + 3\lambda z_0^2 z_i = \epsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5a)$$

$$\epsilon_1 = B \cos \omega t - \gamma \dot{z}_0, \quad \epsilon_2 = 3\lambda z_0 \dot{z}_1^2 - \gamma \dot{z}_1, \quad \epsilon_3 = \dots. \quad (5b)$$

零级方程(4)的通解是一个椭圆函数, 其中 A 为积分常数. 逐级求解上述方程, 则(5)式中 ϵ_i 仅为时间 t 的函数, $\epsilon_i = \epsilon_i(t)$, 即方程的非齐次项. 利用我们已得到的结果^[13], $\epsilon_i=0$ 时的齐次线性方程(5)的两个基本解可用零级非线性方程(4)的解 z_0 表示为

$$\Psi_1 = \dot{z}_0, \quad \Psi_2 = \dot{z}_0 \int (\dot{z}_0)^{-2} dt. \quad (6)$$

两个基本解的线性组合即为该齐次方程的通解. 利用熟知的常数变易法, 由该通解可得相应的非齐次方程(5)的通解为

$$z_i = \Psi_2 \int^t \Psi_1 \epsilon_i dt - \Psi_1 \int^t \Psi_2 \epsilon_i dt, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

式中积分下项为任意常数, 可由初始条件确定. 将(6)和(7)式代入(5)式, 可以直接验证上述结论.

(6)和(7)式中的 z_0 为(4)式的通解, 它包含(4)式所有的特解. 而对于每一个不同的特解 z_0 , 相应有一组带有不同系函数的方程(5)和不同的通解(7). (4)式是 $\epsilon=0$ 时的未扰动方程, 根据热力学第二定律, 在大量粒子的相互作用中, 未扰系统将趋于平衡态, 所以

(4)式的平衡解具有重要意义.由平衡条件 $\dot{z}_0 = \ddot{z}_0 = 0$ 和(4)式,易得平衡解为 $z_{01} = 0$, $z_{02} = \sqrt{\omega_0^2/\lambda}$, $z_{03} = -\sqrt{\omega_0^2/\lambda}$.在实际问题中,任何系统趋于平衡都有一个过程,从初态到严格平衡态的过程一般是漫长的,因此,逐渐趋于严格平衡态的解函数具有特别重要的实际意义.我们称这种解函数为渐近平衡解.对于未扰系统(4)式,渐近平衡解 $z_{0j}(t)$ 定义为 $\lim_{t \rightarrow \infty} z_{0j}(t) = z_{0j} (j=1,2,3)$.其渐近平衡条件为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{z}_0(t) = 0$.在 $\omega_0^2 > 0$ 情形,方程(4)的渐近平衡解即为熟知的同宿解:

$$z_0(t) = z_{01}(t) = \sqrt{2\lambda^{-1}} \omega_0 \operatorname{sech}(\omega_0 t - c), \quad (8a)$$

$$c = \omega_0 t_0 = \operatorname{Arsech}[\sqrt{\lambda/2} \omega_0^{-1} z_{01}(t_0)], \quad (8b)$$

式中 t_0 为初始时间.显然当 $t \rightarrow \infty$ 时,(8)式趋于平衡态 $z_{01} = 0$.同理在 $\omega_0^2 < 0$ 情形,可得(4)式的渐近平衡解 $z_{0j}(t) (j=2,3)$ 为两个异宿解.以下仅讨论 $\omega_0^2 > 0$ 的同宿解,其结果容易推广到异宿解情形.将(8)式代入(6)和(7)式,即得相应于渐近平衡解 $z_{01}(t)$ 的第 i 级方程(5)的通解 z_i , 其中

$$\Psi_1 = \dot{z}_{01}(t) = -\sqrt{2\lambda^{-1}} \omega_0^2 \operatorname{sech} \xi \tanh \xi \quad \xi = \omega_0 t - c, \quad (9a)$$

$$\Psi_2 = \dot{z}_{01}(t) \int [\dot{z}_{01}(t)]^{-2} dt = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega_0^{-3} \left(\operatorname{sech} \xi - \xi \operatorname{sech} \xi \tanh \xi - \frac{1}{3} \cosh \xi \right). \quad (9b)$$

(9)式表明,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $|\Psi_2| \rightarrow \infty$, (7)式一般也会趋于无穷大.根据微分方程稳定性理论,相应地(3)式是方程(1)的不稳定解.由于(7)式中 $\epsilon_i(t)$ 为 t 的周期函数,所以此不稳定解为周期解.又因 Duffing 方程同宿轨道附近的解为混沌吸引子^[16], 而此解紧邻同宿轨道,所以它是嵌于混沌吸引子之中的不稳定周期解^[17].

3 控制混沌运动中的不稳定性

通常微分动力系统的不稳定性可通过调节系统参数来控制.对于囚禁离子系统(1),控制不稳定性归结为选择积分常数和系统参数,使(7)式有界.可以证明,下列控制条件是充分必要的:

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \int \Psi_1 \epsilon_i dt = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

式中取 $t \rightarrow \pm \infty$ 是因为方程(4)具有时间反演不变性.在(7)式中,(10)式中的积分是发散函数 Ψ_2 的系函数,所以为使 z_i 有界,(10)式的必要性是显然的.应用(7)–(9)式和 l'Hospital 法则,可以证明条件(10)式的充分性.例如在 $i=1$ 情形,(9)式代入(7)式,得

$$z_1 = \Psi_2 \int \Psi_1 \epsilon_1 dt - \frac{B}{2\omega_0} \operatorname{sech} \xi \tanh \xi \int \cosh \xi \cos \omega t dt + z'_1,$$

其中 z'_1 在 $t \rightarrow \infty$ 时为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z'_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega_0^{-3} \Psi_1 \int (\operatorname{sech} \xi - \xi \operatorname{sech} \xi \tanh \xi) \epsilon_1 dt \right]$$

$$-\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \omega_0^{-3} \Psi_1 \int \cosh \xi \Psi_1 dt \Big] = 0.$$

从而对于足够大的 t , 解 z_1 为

$$\begin{aligned} z_1 &= \Psi_2 \int \Psi_1 \varepsilon_1 dt - \frac{B}{2\omega_0} \operatorname{sech} \xi \tanh \xi \int \cosh \xi \cos \omega t dt \\ &= \Psi_2 \int \Psi_1 \varepsilon_1 dt - \frac{B}{2\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cos(\omega t + \alpha) \quad \alpha = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中等号右边第一项既不可积, 又无极限, 它反映了混沌运动的复杂性. 分别将 ε_1 中所含的三角函数取为 ± 1 , 在条件(10)式下应用 l'Hospital 法则到这一项, 可得 z_1 在 $t \rightarrow \infty$ 时的上、下极限均有界, 这就证明了一级控制条件的充分性. 同理可证任意第 i 级条件(10)式的充分性. 因此在条件(10)式下, 当 t 充分大时, (7)和(9)式在一级近似下成为稳定的受迫振动解((11)式), 其振动频率与驱动频率一致, 振幅具有复杂的形式.

充要条件(10)式一般是不可积的, 但它们包含下列可积的必要条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1 \varepsilon_i dt = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

在 $i=1$ 情形, 将(5b)和(9a)式代入(12)式, 积分后整理得

$$\frac{B}{2\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} = \frac{\gamma \omega_0^2}{3\pi \sqrt{2} \lambda \omega \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \frac{\cosh[\pi \omega / (2\omega_0)]}{\sin(c\omega / \omega_0)}. \quad (13)$$

(13)式为一级控制条件的明显形式, 其等号左边为(11)式可积部分的振幅 y_1 , 右边为系统参数和初始常数 c 的函数. 因(13)式来自必要条件(12)式, 故要使(11)式稳定, (13)式必须被满足, 反之, 满足(13)式, (11)式不一定稳定. 另一方面, 当 $i=1$ 时, (12)式中的积分即为 Melnikov 函数 $\Delta(t_0)$, 它正比于 Poincare 截面上稳定轨道与不稳定轨道之间的距离. $\Delta(t_0)=0$ 即(12)式指出混沌的存在^[18]. 可见当(11)式稳定时, 系统必作混沌运动; 但混沌存在时系统不一定稳定, 因(12)式不具有充分性.

由(13)式可见, 当取定其他参数后, 稳定性要求驱动振幅 B 与阻尼系数 γ 成正比, 这说明阻尼越小, 系统越易驱动. 在我们的实验中, (2)式中的 b 很小, 从而有

$$\lambda \approx \frac{2a}{3R_c^2} \omega_0^2. \quad (14)$$

取定 c, a, R_c, γ 和 B , 联立(13)和(14)式, 给出固有频率 ω_0 与驱动频率 ω 之间的锁频关系. 若取 $\pi B \sqrt{3a} / (\gamma R_c) = 40, c = 50$, 由(13)和(14)式作 ω_0 / ω 对 ω 的曲线, 见图 1(a). 当从原点逐渐增大 ω , 单值化处理可得相应于图 1(a)的“魔梯”, 见图 1(b), 这是系统进入混沌的一条途径^[19]. 而在图 1(a)中, 不连续分叉^[20]现象是有趣的.

稳定条件(13)式与初始常数 c 相关, 这说明渐近平衡解((8)式)的一级修正(11)式敏感依赖于初始条件, 这种敏感性是奇异吸引子的主要特征. 图 2 说明嵌于混沌吸引子中的稳定解((11)式)对初始常数 c 的敏感依赖性. 令 $2\pi \sqrt{3a} / (\gamma R_c) = 40, \omega = 1$, 由(13)和(14)式作(11)式的振幅 y_1 对 ω_0 的曲线. 当 $c=10$ 时, 参数区域只有 4 条稳定曲线, 如图

2(a)所示.当 c 增加到 100 时,曲线数目增加到图 2(b)情形.两种情形稳定曲线分布区域的大为不同,说明同样的参数相应于不同的稳定性,原因是两种情形对应着不同的初始条件.由(8b)式可知,当 $t_0=0$ 时, $c=10$ 和 $c=100$ 分别相应于初始位移 $z_{01}(0)\approx 10^{-4}$ 和 $z_{01}(0)\approx 10^{-43}$.可见初始位移的微小变化将大大改变系统的稳定性.当 $z_{01}(0)$ 趋于平衡点 $z_{01}=0$ 时,(8b)式给出 $c\rightarrow\infty$,图 2 参数区域中的曲线数目将趋于无穷多条,稳定曲线与不稳定空白区域所占面积相等.这个包含无穷多条曲线的区域就是所谓的混沌区域.

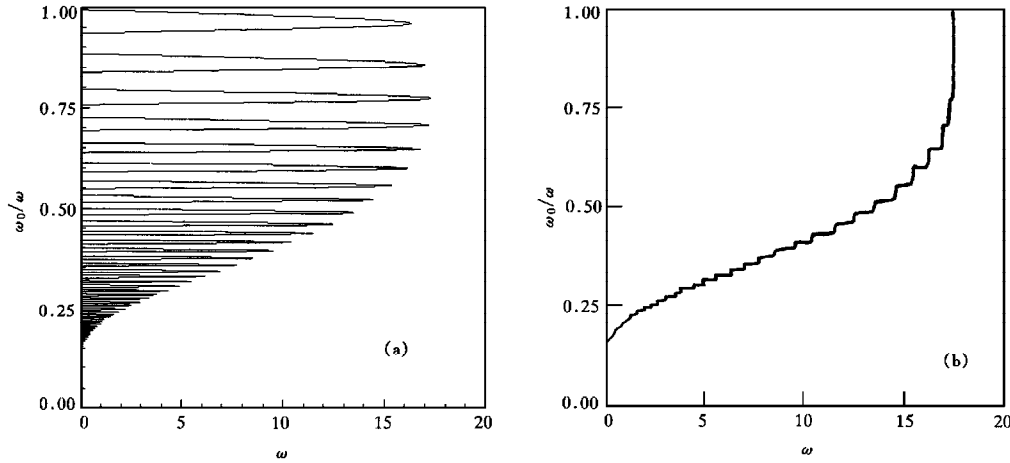


图 1 取 $\pi B \sqrt{3} a / (\gamma R_c) = 40$, $c = 50$, 由(13)和(14)式作 ω_0/ω 对 ω 的曲线(a)和相应的“魔梯”(b)

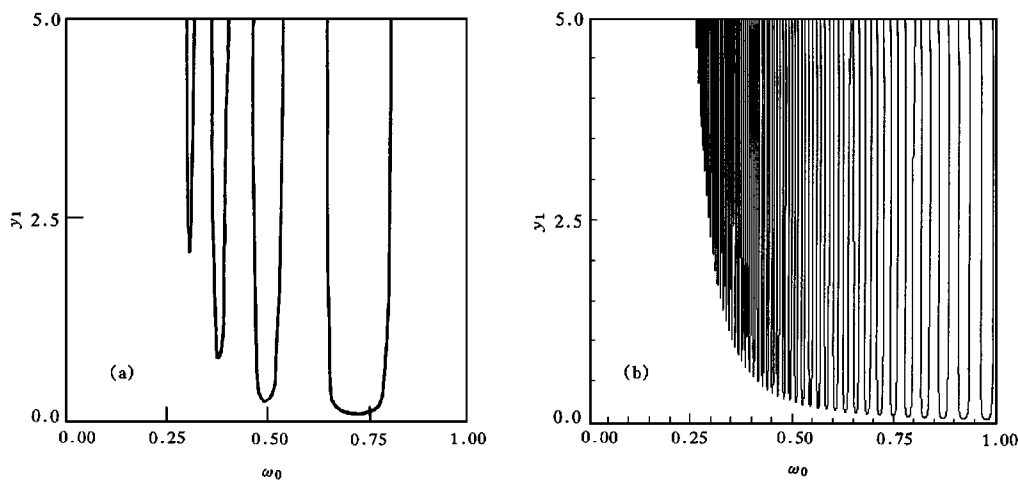


图 2 取 $2\pi \sqrt{3} a / (\gamma R_c) = 40$, $\omega = 1$, 令(11)式中可积部分振幅为 y_1 , 由(13)和(14)式作 y_1 对 ω_0 曲线
(a) $c = 10$; (b) $c = 100$

现在讨论如何调节参数去控制系统处于混沌区域中的不稳定性.事实上,驱动振幅

B , 驱动频率 ω 和直流扫描电压 V_{dc} 等都是可调的控制参数. 控制混沌归结为调节这些参数去拟合条件(10)式. 由必要条件(13)式作出的图 2 说明, 对初始条件 $c > 10$ 和振幅 $y_1 > 0.5$, 我们总能通过调节 V_{dc} 而按(2a)式改变 ω_0 , 使系统处于图 2 曲线上一个可能的稳定态. 实验中采用射频共振吸收法测量离子信号^[11,12], 稳定解((11)式)振幅平方对应于实验信号峰. 由(13)式知, 取定 B , ω , γ 和 λ 后, 对任一初始常数 c , 相应有多个分立的 ω_0 值, 每个 ω_0 对应于(11)式的一个振幅值, 这与分立的实验峰值定性一致. 显然, c 的增大将使信号峰的密度增大. 由于实验不能精确设置初始常数 c , 不同次实验结果有一定差异, 这可用它们理论上对应于不同的 c 值来解释. 又因实验中 V_{dc} 的改变不是严格连续的, 扫描速率的增大可引起部分理论峰值漏测, 造成信号峰数目减少. 另一方面, 由(2)式知, λ 随离子数密度 b 增大而增大. 对于较大的 b , 近似式(14)不能用. 此时取定 B , ω , γ 和 c , (13)式给出 ω_0 与 λ 之间的关系. 显然, 每个 λ 值对应于多个 ω_0 值. 随 λ 值的增大, 满足(13)式的 ω_0 的个数增多, 即稳定态数目增多. 它说明信号峰数目随离子数密度增大而增加. 这都与我们的实验结论一致^[11].

4 讨 论

考虑射频阱中囚禁离子的非谐运动, 我们定义了系统的渐近平衡解, 得到一个渐近平衡解为 Duffing 方程的同宿解. 在小阻尼和弱检测场条件下, 新的微扰技巧导致对同宿解的各级修正. 证明修正的渐近平衡解一般是不稳定的, 但其不稳定性可由条件(10)式控制. 控制条件对初始常数的敏感依赖导致解对初始条件的敏感依赖性, 这是系统作混沌运动的标志. 由于控制条件中包含系统的控制参数, 所以对任意初始条件, 我们都能通过调节控制参数, 使系统达到稳定态, 从而实现对混沌运动中的不稳定性的控制. 理论说明混沌区域中的稳定解振幅值是分立的, 实验对离子信号强度的测量支持这一结论.

- [1] R. Blümel, J. M. Chen, E. Peik *et al.*, *Nature*, **334**(1988), 309.
- [2] P. G. Brewer, J. Hoffnagle, R. G. de Voe *et al.*, *Nature*, **344**(1990), 305.
- [3] R. Blümel, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 620.
- [4] M. G. Moore and R. Blümel, *Physica Scripta*, **T59**(1995), 434.
- [5] J. Hoffnagle, R. G. de Voe, L. Reyna *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1988), 255.
- [6] F. Diedrich, E. Peik, J. M. Chen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 2931.
- [7] R. Blümel, C. Kappler, W. Quint *et al.*, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 808.
- [8] F. Diedrich, J. C. Berquist, W. M. Itano *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 403.
- [9] L. S. Brown and G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.*, **58**(1986), 233.
- [10] R. Chacón and J. I. Cirac, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 4900.
- [11] 高克林、颜 旻、黄贵龙等, 科学通报, **39**(1994), 405.
- [12] X. Luo, X. Zhu, K. Gao *et al.*, *Appl. Phys.*, **B62**(1996), 421.
- [13] W. Hai, H. Su and A. Long, 14th International Symposium on Nonlinear Acoustics, Nanjing, 1996; in: *Nonlinear Acoustics*, ed. by R. J. Wei(Nanjing University Press, Nanjing, 1996), p. 375.
- [14] W. Hai, Y. Duan and L. Pan, *Phys. Lett.*, in press.
- [15] 高克林、颜 旻、罗学立等, 物理学报, **44**(1995), 43.

- [16] P.J. Holmes and J.E. Marsden, *Commun. Math. Phys.*, **82**(1982), 523.
- [17] T. Hikihara and T. Kawagoshi, *Phys. Lett.*, **A211**(1996), 29.
- [18] V.K. Melnikov, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**(1963), 1.
- [19] 冯 端、金国钧, *物理学进展*, **11**(1991), 373.
- [20] E. Hopf, *Commun. Pure Appl. Math.*, **1**(1948), 303.

CONTROLLING OF THE INSTABILITY OF CHAOTIC MOTION IN AN ION-CLOUD

HAI WEN-HUA¹⁾ DUAN YI-WU¹⁾²⁾ ZHU XI-WEN²⁾ SHI LEI²⁾ LUO XUE-LI²⁾ HE CHUN-SHAN¹⁾

1)(*Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081*)

2)(*Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Academia Sinica, Wuhan 430071*)

(Received 14 April 1997; revised manuscript received 23 June 1997)

ABSTRACT

Interaction between the detecting field and the ion-cloud in an actual Paul trap is described by the Duffing equation. For small damping, the unstable periodic solutions embedded in chaotic attractor and their stability conditions are obtained. Theoretical analysis reveals that the instability of chaotic motion can be controlled by adjusting the control parameters to fit the conditions. Excellent agreement is found between the analytical results and experimental data.

PACC: 3280; 4250; 0545; 3290