

在相干态表象中精确求解无旋波近似的 Jaynes-Cummings 模型

方细明 冯 芒 施 磊 高克林 朱熙文

(中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

(1997 年 4 月 8 日收到)

在相干态表象中精确求解了无旋波近似的 Jaynes-Cummings 模型, 并导出了相应的限制性条件. 所求得的解析解与用微扰论求得的近似解比较, 当微扰级数取无穷时所得结果一致. 本文的方法能方便地推广到三能级系统的讨论.

PACC: 4250; 3280

1 引 言

Jaynes-Cummings(JC)模型^[1]是描述二能级系统与单模电磁场相互作用最简单的模型, 受到人们广泛的关注. 人们对它作了深入广泛的研究, 取得了大量的重要结果. JC 模型有了各种各样的推广, 例如三能级系统与辐射场的作用^[2], 多个二能级原子与辐射场的相互作用^[3], 以及非线性 JC 模型^[4]等. JC 模型的各种特性也被深入地研究^[5], 目前, JC 模型仍然受到许多人的注目, 仍然是量子光学领域中十分活跃的热点.

到目前为止, 绝大多数对 JC 模型的研究是在某种近似条件下展开讨论的, 旋波近似是主要被采用的近似条件, 它忽略了反共振项的影响. 在这种近似条件下得到的结果, 对近共振弱耦合的真实物理系统能给出很好的结果, 反共振项对系统的影响也被许多人研究过^[6-8], 所使用的方法是无旋波近似下的 JC 模型的微扰近似展开, 它要求系统是弱场弱耦合短时相互作用的^[8], 无旋波近似的 JC 模型的精确求解至今仍未见之于文献^[8], 此外, 对于远共振强耦合的真实物理系统, 旋波近似的 JC 模型和无旋波近似的 JC 模型的微扰近似展开方法均不适用. 在此种情形下, 对无旋波近似的 JC 模型求解将是十分有意义的.

2 无旋波近似的 JC 模型的精确求解方法

无旋波近似的 JC 模型的哈密顿量可表示为

$$H = \omega_f a^\dagger a + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g(a + a^\dagger)(\sigma_+ + \sigma_-), \quad (1)$$

式中 ω_f 为单模场的频率, ω_a 为二能级体系的能级间的跃迁频率, σ_z 为赝自旋的 z 分量, σ_+ , σ_- 分别为赝自旋的升降算符, $a^\dagger$, a 分别为单模场的产生湮没算符, g 为单模场与二

能级系统的耦合强度.

在相干态表象中^[10], (1)式可表示为

$$H = \omega_f \alpha \frac{d}{d\alpha} + \frac{\omega_a}{2} \sigma_z + g \left(\alpha + \frac{d}{d\alpha} \right) (\sigma_+ + \sigma_-), \quad (2)$$

式中 α 为复数, 对应的波函数写作

$$\Psi(\alpha) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\alpha) \\ \Psi_2(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

于是, 体系的薛定谔方程可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \omega_f \alpha \frac{d}{d\alpha} + \frac{\omega_a}{2} & g \left(\frac{d}{d\alpha} + \alpha \right) \\ g \left(\frac{d}{d\alpha} + \alpha \right) & \omega_f \alpha \frac{d}{d\alpha} - \frac{\omega_a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1(\alpha) \\ \Psi_2(\alpha) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_1(\alpha) \\ \Psi_2(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

令 $\Psi_1(\alpha)$, $\Psi_2(\alpha)$ 分别取如下形式:

$$\Psi_1(\alpha) = \exp(-z\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \alpha^n, \quad (5)$$

$$\Psi_2(\alpha) = \exp(-z\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n, \quad (6)$$

式中 z , b_n , c_n 为待定常数, 将(5)和(6)式代入(4)式, 比较等式两边的 α^n 的系数, 可推得

$$\omega_f (nb_n - zb_{n-1}) + \frac{\omega_a}{2} b_n + gc_{n-1} + g[(n+1)c_{n+1} - zc_n] = Eb_n, \quad (7)$$

$$\omega_f (nc_n - zc_{n-1}) - \frac{\omega_a}{2} c_n + gb_{n-1} + g[(n+1)b_{n+1} - zb_n] = Ec_n. \quad (8)$$

由此, 可获得如下递推公式:

$$c_{n+1} = \frac{1}{g(n+1)} \left[\left(E - \frac{\omega_a}{2} - n\omega_f \right) b_n + gzc_n - gc_{n-1} + \omega_f zb_{n-1} \right], \quad (9)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{g(n+1)} \left[\left(E + \frac{\omega_a}{2} - n\omega_f \right) c_n + gzb_n - gb_{n-1} + \omega_f zc_{n-1} \right]. \quad (10)$$

当我们在 $n \geq 2$ 处截断, 即当 $n \geq 2$ 时, 令 $b_n = c_n = 0$, 由此, 可求得系统的能量为

$$E = \frac{\omega_f}{2} - g|z|,$$

式中 $z = \pm \frac{g}{\omega_f}$, 同时, ω_f , ω_a , g 三者须满足如下关系:

$$\frac{\omega_a^2}{4} = \omega_f^2 - 4g^2. \quad (11)$$

上式表明此时系统的三个参量为 $\omega_f \sim g \gg \omega_a$, 即远共振强耦合情况.

也可以在 $n \geq 3$ 处截断, 这时可求得另一系统的能量, 即

$$E = 2\omega_f - g|z|,$$

式中 $z = \pm \frac{g}{\omega_f}$, 以及此系统的 ω_a , ω_f , g 须满足关系

$$\left[2\omega_f^2 + \frac{1}{2}\omega_f\omega_a - 6g^2 - \frac{1}{4}\omega_a^2 + 2\frac{g^4}{\omega_f^2} + 8g^2\frac{\omega_f}{\omega_c} - 8\frac{g^4}{\omega_a\omega_f} \right] A$$

$$= 8g^2\frac{\omega_f}{\omega_a} - 2g^2 - 8\frac{g^4}{\omega_f\omega_a} - g^2\frac{\omega_a}{\omega_f} + 2\frac{g^4}{\omega_f^2}, \quad (12)$$

式中 A 由下式决定:

$$A = \frac{\left(\omega_f - \frac{1}{2}\omega_a - 3\frac{g^2}{\omega_f} \right) \left(2\omega_f + \frac{1}{2}\omega_a - \frac{g^2}{\omega_f} \right) + \frac{g^4}{\omega_f} - g^2}{\left(\omega_f + \frac{1}{2}\omega_a - 3\frac{g^2}{\omega_f} \right) \left(2\omega_f - \frac{1}{2}\omega_a - \frac{g^2}{\omega_f} \right) + \frac{g^4}{\omega_f} - g^2}. \quad (13)$$

这个限制性条件是很繁杂的, 当 $\omega_f \gg \omega_a$ 时, $A \rightarrow 1$, (12) 式可给出一个较简单的表达式.

原则上, 对于一个给定的物理系统, 总可以找到一个恰当的 n , 从 n 处截断时所获得的关于 ω_f , ω_a , g 三者的关系与给定的物理系统的条件一致, 从而求得给定物理系统的能量及波函数等.

双势阱中的局域波包可以用 JC 模型的两个态函数的对称叠加态与反对称叠加态表示, 在讨论抑制隧穿的条件时, 其哈密顿量的数学形式与 (1) 式完全一样, Plata 等人^[9]使用微扰展开方法作了求解, 当展开到无穷时所得到的本征能量形式与本文所求的完全一致. 但是, 他们给出的限制性条件是 $\omega_a \ll \omega_f$, 并没有像 (11) 和 (13) 式这样明确的表达式.

3 推广到三能级模型

以上方法可以很方便地推广到三能级体系与辐射场的作用. 三能级系统与单模场相互作用的无旋波近似的哈密顿量最一般形式为

$$H = \begin{pmatrix} \omega_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_b \end{pmatrix} + \omega_f a^\dagger a + (a^\dagger + a) \begin{pmatrix} 0 & g_3 & g_2 \\ g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & g_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

式中 ω_a , ω_b 为三能级系统的上下能级与中间能级间的跃迁频率, ω_f 为单模场的频率, g_1 , g_2 , g_3 分别为单模场与三能级系统的各能级的耦合强度, $a^\dagger$, a 为单模场的产生湮没算符.

在相干态表象中, H 可表示为

$$H = \begin{pmatrix} \omega_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_b \end{pmatrix} + \omega_f \alpha \frac{d}{d\alpha} + \left(\alpha + \frac{d}{d\alpha} \right) \begin{pmatrix} 0 & g_3 & g_2 \\ g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & g_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

令

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1(\alpha) \\ \Psi_2(\alpha) \\ \Psi_3(\alpha) \end{pmatrix} = e^{-z\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (16)$$

由系统的薛定谔方程

$$H\Psi = E\Psi, \quad (17)$$

经推导,可得到如下递推公式:

$$\begin{aligned} b_{n+1} = & \frac{1}{2(n+1)g_2} \left[E \left(d_n + \frac{g_2}{g_3} c_n - \frac{g_1}{g_3} b_n \right) - \omega_b d_n + \omega_a \frac{g_1}{g_2} b_n \right. \\ & - n\omega_f \left(d_n + \frac{g_2}{g_3} c_n - \frac{g_1}{g_3} b_n \right) + 2zg_2 b_n \\ & \left. + z\omega_f \left(d_{n-1} + \frac{g_2}{g_3} c_{n-1} - \frac{g_1}{g_3} b_{n-1} \right) - 2g_2 b_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} = & \frac{1}{2(n+1)g_1} \left[E \left(d_n + \frac{g_1}{g_3} b_n - \frac{g_2}{g_3} c_n \right) - \omega_b \frac{g_1}{g_2} d_n - \omega_a \frac{g_1}{g_3} b_n \right. \\ & - n\omega_f \left(d_n + \frac{g_1}{g_3} b_n - \frac{g_2}{g_3} c_n \right) + 2zg_1 c_n \\ & \left. + z\omega_f \left(d_{n-1} + \frac{g_1}{g_3} b_{n-1} - \frac{g_2}{g_3} c_{n-1} \right) - 2g_1 c_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} = & \frac{1}{2(n+1)g_1} \left[E \left(c_n + \frac{g_1}{g_2} b_n - \frac{g_3}{g_2} d_n \right) - \omega_a \frac{g_1}{g_2} b_n + \omega_b \frac{g_3}{g_2} d_n \right. \\ & - n\omega_f \left(c_n + \frac{g_1}{g_2} b_n - \frac{g_3}{g_2} d_n \right) + 2zg_1 d_n \\ & \left. + z\omega_f \left(c_{n-1} + \frac{g_1}{g_2} b_{n-1} - \frac{g_3}{g_2} d_{n-1} \right) - 2g_1 d_{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

与推导二能级系统的情况相似,我们在 $n \geq 2$ 处截断,由此可推导出 b_1, c_1, d_1 有非零解的条件为

$$\begin{vmatrix} z\omega_f & z\omega_f \frac{g_2}{g_3} & - \left(z\omega_f \frac{g_3}{g_2} + 2g_2 \right) \\ z\omega_f & - (z\omega_f + 2g_1) & z\omega_f \frac{g_1}{g_2} \\ - \left(z\omega_f \frac{g_3}{g_2} + 2g_3 \right) & z\omega_f & z\omega_f \frac{g_1}{g_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

此关系是无法求解的,但是在远共振条件下,可认为单模场与各能级之间的耦合强度没有多大差别,此时可取

$$g_1 = g_2 = g_3 = g. \quad (22)$$

将上式代入(21)式,可求得

$$z = - \frac{g}{\omega_f} \quad (23)$$

及

$$z = \frac{2g}{\omega_f}. \quad (24)$$

经验证,(24)式是增根.同时还可求得系统的能量为

$$E = \omega_f - \frac{g^2}{\omega_f} + \frac{1}{3}(\omega_a + \omega_b) \pm \frac{1}{3}\sqrt{\omega_a^2 + \omega_b^2 - \omega_a\omega_b}, \quad (25)$$

以及 b_0, c_0, d_0 为非零解的必要条件为

$$\begin{vmatrix} E - \omega_a + 2gz & E + 2gz & E + 2gz - \omega_b \\ (E - \omega_a)(1 + A) - 2gzA & E(1 - A) & 2gz + (\omega_b - E)(1 + A) \\ (E - \omega_a)(1 - B) & E(1 + B) - 2gzB & 2gz + (\omega_b + E)(1 + B) \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

式中

$$A = \frac{E - \omega_a - (g^2/\omega_f)}{E - \omega_b - \omega_f + (g^2/\omega_f)}, \quad (27)$$

$$B = \frac{E - \omega_f + (g^2/\omega_f)}{E - \omega_b - \omega_f + (g^2/\omega_f)}. \quad (28)$$

由于 E, z, A, B 都可由 $g, \omega_a, \omega_b, \omega_f$ 解析地表示出来, (21) 式实际上是 $g, \omega_a, \omega_b, \omega_f$ 的限制性条件, 原则上, 通过选取不同的 n 截断, 可获得不同物理系统的精确解.

4 结 语

相干表象与福克表象可以很方便地相互变换, 利用完备性条件

$$\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle \langle \alpha^*| = 1, \quad (29)$$

可得如下变换关系:

$$|n\rangle = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle \langle \alpha^*| n\rangle = \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{2\pi i} \exp(-|\alpha|^2) |\alpha^*\rangle \frac{1}{\sqrt{n!}} \alpha^n. \quad (30)$$

因此, 福克表象中的态 $|n\rangle$ 与相干表象中的态 α^n 相对应. 同样, 通过简单的代数运算, 可知一个平移福克态 $\exp(z\alpha^\dagger - z^*a)|n\rangle$ 对应于相干态 $e^{za}\alpha^{n-1}$ 和 $e^{za}\alpha^n$ 的叠加态. 因此, 本文的解实际上就是一系列的平移福克态的叠加.

本文的无旋波近似的 JC 模型的精确解是在相干表象中给出的. 相干表象与福克表象有较为简单的变换关系, 因此, 本文的结果可以在福克表象中表示出来, 这样便于与其他工作进行比较, 这对于数值计算是非常有意义的. 同时, 我们还给出对体系参数的限制性条件, 这对于实验工作也是很有意义的. 但本文给出的系统的精确解仅仅是一个特解, 并不具备完备性. 这是因为无旋波近似的 JC 体系不是一个封闭系统, 是一个不可积体系. 因而如果在今后的其他工作中, 利用其他方法求解出与本文不一致的特解, 我们认为是正常的. 用这种解还可研究很多的实际物理系统, 这将在今后的工作中给出.

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE*, **51**(1963), 89.
- [2] H. I. Yoo and J. H. Eberly, *Phys. Rep.*, **118**(1985), 239.
- [3] M. Tavis and F. W. Cummings, *Phys. Rev.*, **170**(1968), 379.
- [4] W. Vogel and R. L. de Matos Filho, *Phys. Rev.*, **A52**(1995), 4214.

- [5] H.J.Carmichael *et al.*, *Phys. Rev.*, **A40**(1989),5516.
- [6] 彭金生、李高翔,物理学报,**40**(1991),1042.
- [7] 彭金生、李高翔,物理学报,**42**(1993),568.
- [8] 谢瑞华、刘敦桓,光学学报,**16**(1996),933.
- [9] J.Plata *et al.*, *Phys. Rev.*, **A48**(1993),782.
- [10] J. W. Negel and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Addison-Wesley Publishing Company, 1987), pp. 20—25.

EXACT SOLUTION OF JAYNES-CUMMINGS MODEL UNDER ROTATIONLESS WAVE APPROXIMATION USING COHERENT-STATE REPRESENTATION

FANG XI-MING FENG MANG SHI LEI GAO KE-LIN ZHU XI-WEN

(*State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics,
Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Academia Sinica, Wuhan 430071*)

(Received 8 April 1997)

ABSTRACT

In this paper, a new approach of exact solution of Jaynes-Cummings model under rotationless wave approximation is proposed. The Jaynes-Cummings models of two-level system and three-level system have been investigated. Compared to some other approximate approaches, this approach can give not only an analytic exact solution, which agrees with others results but also a restraint condition, which is usefull for practical experiment.

PACC: 4250; 3280