

一类广义 N 维非线性 Schrödinger 方程的 孤子解及其性质研究^{*}

曹庆杰 张天德 李久平

(山东工业大学数理系, 济南 250061)

G. W. PRICE K. DJIDJELI

(Department of Ship Science, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK)

E. H. TWIZELL

(Department of Mathematics and Statistics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex UB8 3PH, UK)

(1997 年 1 月 6 日收到; 1997 年 4 月 28 日收到修改稿)

研究一类 N 维广义非线性 Schrödinger 方程的孤子解及其性质, 研究非线性参数 α 变化 ($\alpha \rightarrow 0$ 及 $\alpha \rightarrow \infty$) 时孤子性态的变化规律, 同时研究该问题的数值解法, 得到了该方程的 P-R 差分格式的收敛性和稳定性条件.

PACC: 4265; 0340K; 0260

1 引 言

非线性 Schrödinger 方程不仅在孤子的理论研究中起到了十分重要的作用, 而且具有重要的应用背景, 它曾用来描述脉冲稳态波的自聚焦现象^[1]、非线性光学系统的自陷现象^[2]以及描述具有色散缓变及多光子吸收的光导纤维中波的传播^[3-5], 而只有当具有色散缓变的多光子吸收得到平衡时, 光导纤维中的光子传输才能得到无损耗稳态传输.

本文利用行波方法研究了一类 N 维广义非线性 Schrödinger 方程的孤子解及其性质, 得到了该类系统的亮孤子及暗孤子存在的条件, 研究了非线性参数 $\alpha \rightarrow 0$ 及 $\alpha \rightarrow \infty$ 时孤子性态的变化规律. 结果表明, 孤子现象是该系统的非线性本质特征. 本文所得结果具有一般性, 为具有色散缓变的孤子系统的设计提供了理论依据. 本文同时研究了该系统的数值解法, 得到了非线性方程的 P-R 差分格式^[6], 得到了其收敛性和稳定性的条件. 数值实验结果表明, 差分格式具有较好的稳定性. 由于对非线性部分进行了较好的处理, 因而计算结果与理论结果符合较好.

2 孤子解

考虑如下—类 N 维广义非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta(z)}{2} \Delta \varphi + \epsilon(b + ia) |\varphi|^\alpha \varphi + i \Gamma \varphi = 0, \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金、国家教育委员会留学归国人员基金及英中高级科学家交流基金资助的课题.

其中 φ 是波函数, $\beta(z)$ 是波速度, Δ 是 N 维空间的 Laplace 算子, $\epsilon = \pm 1$, α 是非线性参数, Γ 是损耗系数.

设 $q = \varphi e^{\theta z/\alpha}$, $s = (1 - e^{-\theta z})/\theta$, $P = \frac{\beta(0)}{2} > 0$, 则有

$$i \frac{\partial q}{\partial s} - P \Delta q + \epsilon(b + ia)|q|^\alpha q + i\left(\Gamma - \frac{\theta}{\alpha}\right)e^{\theta z} q = 0. \quad (2)$$

若令 $\Gamma = \frac{\theta}{\alpha}$, 则(2)式简化为

$$i \frac{\partial q}{\partial s} - P \Delta q + \epsilon(b + ia)|q|^\alpha q = 0. \quad (3)$$

进一步令

$$s = \frac{b}{b + ia} t, \quad x = \left(\frac{b}{b + ia}\right)^{1/2} y, \quad (4)$$

可以得到

$$i \frac{\partial q}{\partial t} - P \Delta q + \epsilon b |q|^\alpha q = 0. \quad (5)$$

设(5)式具有形如 $q(y, t) = q_0 D(u) e^{ik}$, $u = \sum_{j=1}^n \xi_j y_j + a_0 t$, $k = \sum_{j=1}^n \eta_j y_j + b_0 t$ 的解, 则有

$$a_0 \frac{dD}{du} = 2P \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j \frac{dD}{du}, \quad (6)$$

$$P \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \frac{d^2 D}{du^2} = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 P - b_0 \right) D + \epsilon b q_0^\alpha D^{\alpha+1},$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 是独立的自由参数.

2.1 亮孤子解

当 $\epsilon = -1$ 时, 积分(6)式可得

$$P \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \left(\frac{dD}{du} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 P - b_0 \right) D^2 - \frac{2bq_0^\alpha}{\alpha + 2} D^{\alpha+2}. \quad (7)$$

取积分常数为 0, 设(7)式有形如 $D(u) = \text{sech}^{2/\alpha} u$ 形式的解, 并考虑到(6)式中的第一式, 可得到亮孤子解如下:

$$q(y, t) = \left[\frac{2P \sum_{j=1}^n \xi_j^2}{b\alpha^2} (\alpha + 2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \text{sech}^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j y_j + 2P \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j t \right) \\ \times \exp \left\{ i \left[\sum_{j=1}^n \eta_j y_j + P \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 - 4 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 / \alpha^2 \right) t \right] \right\}, \quad (8)$$

其中 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 及 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, 将(4)式代入(8)式可以得到(3)式的类孤子解. 若忽略多重吸收系数的影响, 即 $a = 0$ 时, 可以得到(3)式的孤子解

$$q(x, t) = \left[\frac{2P \sum_{j=1}^n \xi_j^2}{b\alpha^2} (\alpha + 2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \text{sech}^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j x_j + 2P \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j t \right) \\ \times \exp \left\{ i \left[\sum_{j=1}^n \eta_j x_j + P \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 - 4 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 / \alpha^2 \right) t \right] \right\}. \quad (9)$$

2.2 暗孤子解

当取 $\epsilon=1$ 时, 方程(6)对于 $\alpha>0$ 没有双曲正割型的亮孤子解, 只有当 $\alpha=2$ 时系统存在双曲正切型的暗孤子解^[7,8], 用以上同样方法, 积分(6)式并取适当积分常数, 可得如下暗孤子解:

$$q(y, t) = \left[\frac{2P \sum_{j=1}^n \xi_j^2}{b} \right]^{\frac{1}{2}} \tanh \left(\sum_{j=1}^n \xi_j y_j + 2P \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j t \right) \times \exp \left\{ i \left[\sum_{j=1}^n \eta_j y_j + P \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j^2 \right) t \right] \right\}. \quad (10)$$

将(4)式代入(8)式可以得到(3)式的类孤子解; 同样, 若忽略多重吸收, 即 $\alpha=0$ 时, 亦可得(3)式的孤子解.

2.3 当 $\alpha \rightarrow 0$ 及 $\alpha \rightarrow \infty$ 时孤子性态研究

研究广义非线性 Schrödinger 方程当 $\alpha \rightarrow 0$ 及 $\alpha \rightarrow \infty$ 时的亮孤子变化情况, 为此, 考察亮孤子解(8)式, 有

$$q_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{2P \sum_{j=1}^n \xi_j^2}{b\alpha^2} (\alpha + 2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} = \infty, \quad q_{0, \infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{2P \sum_{j=1}^n \xi_j^2}{b\alpha^2} (\alpha + 2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} = 1, \quad (11)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{sech}^{\frac{2}{\alpha}} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j y_j + 2P \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j t \right) = 1, \quad (12)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \exp \left\{ i \left[\sum_{j=1}^n \eta_j y_j + P \left(\sum_{j=1}^n \eta_j^2 - 4 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 / \alpha^2 \right) t \right] \right\} = \exp \left\{ i \left[\sum_{j=1}^n \eta_j y_j + P \sum_{j=1}^n \eta_j^2 t \right] \right\}. \quad (13)$$

从以上结果可以看出, 当 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 亮孤子解的幅值趋向无穷大, 因此在 $\alpha \rightarrow 0$ 时, 系统没有孤子解; 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时孤子解趋向于一个由单参数 η 决定的脉冲波, 这说明当参数 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 系统的孤子消失. 综上所述, 孤子现象是系统的非线性特征.

3 数值实验

本节讨论 N 维广义非线性 Schrödinger 方程的数值解. 不失一般性, 我们以亮孤子解为例给出如下广义非线性问题的差分格式并讨论其计算结果,

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial t} - P(q_{xx} + q_{yy}) - b|q|^a q &= 0, \\ q(x, y, 0) &= q_1(x, y, 0), \\ q(-A, y, t) &= q(A, y, t) = 0, \\ q(x, -B, t) &= q_1(x, -B, t), \\ q(x, B, t) &= q_1(x, B, t) \end{aligned} \quad (14)$$

及

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial t} - P(q_{xx} + q_{yy}) - b|q|^a q &= 0, \\ q(x, y, 0) &= q_1(x, y, 0) + q_2(x, y, 0), \\ q(-A, y, t) &= q(A, y, t) = 0, \\ q(x, -B, t) &= q_1(x, -B, t) + q_2(x, -B, t), \\ q(x, B, t) &= q_1(x, B, t) + q_2(x, B, t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $q_1(x, y, 0)$ 和 $q_2(x, y, 0)$ 分别是下列广义非线性 Schrödinger 方程在二维相空间取不同自由参数时的解

$$\begin{aligned} q(x, y, t) &= \left[\frac{2P(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{b\alpha^2} (\alpha + 2) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \text{sech}^{\frac{2}{\alpha}} [\xi_1 x + \xi_2 y + 2P(\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2)t + x_0] \\ &\times \exp \left\{ i \left[\eta_1 x + \eta_2 y + P \left(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \frac{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{\alpha^2} \right) t + \varphi_0 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 φ_0 与 x_0 均是常数.

为了得到(14), (15)式的数值解, 首先讨论它们的差分格式、收敛性及稳定性. 利用平行于 x 轴和 y 轴的两族直线将区域网格化, 取

$$\tau = \Delta t = \frac{T}{M}, \quad h_1 = \Delta x = \frac{2A}{N}, \quad h_2 = \Delta y = \frac{2B}{L},$$

并令

$$\begin{aligned} t_m &= m\tau \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M), \\ x_n &= -A + nh_1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N), \\ y_l &= -B + lh_2 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, L), \end{aligned}$$

N, L 和 M 是自然数. 用 (n, l, m) 表示划分的网格点, $q(n, l, m) = q(x_n, y_l, t_m)$ 是 $q(x, y, t)$ 在网格点 (n, l, m) 的值, $q_{n,l}^m$ 是在网格点 (n, l, m) 的差分值. 采用对时间 t 的向后 $1/2$ 差分, 对 x 取 $(n, l, m+1/2)$ 和 y 的 (n, l, m) 点的二阶中心差分, 可得中间差分格式

$$i \frac{q_{n,l}^{m+1/2} - q_{n,l}^m}{\tau/2} = \frac{P}{h_1^2} \delta_x^2 q_{n,l}^{m+1/2} + \frac{P}{h_2^2} \delta_y^2 q_{n,l}^m + b|q_{n,l}^{m+1/2}|^a q_{n,l}^{m+1/2}. \quad (17)$$

接着取 t 的由中间 $m+1/2$ 点到 $m+1$ 的差分, 对 x 仍取 $(n, l, m+1/2)$ 和 y 的 $(n, l, m+1)$ 点的二阶中心差分, 可得终点的差分格式

$$i \frac{q_{n,l}^{m+1} - q_{n,l}^{m+1/2}}{\tau/2} = \frac{P}{h_1^2} \delta_x^2 q_{n,l}^{m+1/2} + \frac{P}{h_2^2} \delta_y^2 q_{n,l}^{m+1} + b|q_{n,l}^{m+1/2}|^a q_{n,l}^{m+1/2}. \quad (18)$$

由(17)和(18)式确定的差分格式实际上是由 $q_{n,l}^m$ 到 $q_{n,l}^{m+1}$ 的差分, 其表达式为

$$\begin{aligned} i \left(1 + \frac{1}{4} \frac{P^2 \tau^2}{h_1^2 h_2^2} \delta_x^2 \delta_y^2 \right) \frac{q_{n,l}^{m+1} - q_{n,l}^m}{\tau} &= \frac{1}{2} \left(\frac{P}{h_1^2} \delta_x^2 + \frac{P}{h_2^2} \delta_y^2 \right) (q_{n,l}^{m+1} + q_{n,l}^m) \\ &+ \frac{b}{2} \left| \frac{1}{2} (q_{n,l}^{m+1} + q_{n,l}^m) + \frac{i}{4} \frac{P\tau}{h_2^2} \delta_y^2 (q_{n,l}^{m+1} - q_{n,l}^m) \right|^a \\ &\times \left[q_{n,l}^{m+1} + q_{n,l}^m + \frac{i}{2} \frac{P\tau}{h_2^2} \delta_y^2 (q_{n,l}^{m+1} - q_{n,l}^m) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

利用 Taylor 级数展开可以证明差分格式(19)式当 $\tau \rightarrow 0$, $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$ 时是收敛的, 而且该格式的收敛阶为 $O(\tau \pm h_1^2 \pm h_2^2)$. 差分格式是否可以在实际中应用, 最终取决于它是否任意逼近微分方程的解. 在差分格式(19)式中引入 $r_1 = \tau/h_1^2$ 及 $r_2 = \tau/h_2^2$ 并消去含 τ 的项, 得

$$i \left(1 + \frac{1}{4} P^2 r_1 r_2 \delta_x^2 \delta_y^2 \right) (q_{n,l}^{m+1} - q_{n,l}^m) = \frac{1}{2} (Pr_1 \delta_x^2 + Pr_2 \delta_y^2) (q_{n,l}^{m+1} + q_{n,l}^m). \quad (20)$$

利用 Fourier 变换 $q_{n,l}^m = V_{n,l}^m \exp \{i(\sigma_1 h_1 x_n + \sigma_2 h_2 y_l)\}$, 消去因子 $\exp \{i(\sigma_1 h_1 x_n + \sigma_2 h_2 y_l)\}$ 可得

$$V_{n,l}^m = G(\sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2) V_{n,l}^{m+1} = -\frac{E - F_i}{E + F_i} V_{n,l}^{m+1}, \quad (21)$$

其中 $G(\sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2)$ 是传播因子, 并有 $|G(\sigma, \tau)| = 1$, 及

$$E = Pr_1(\cos \sigma_1 h_1 - 1) + Pr_2(\cos \sigma_2 h_2 - 1),$$

$$F = 1 + \frac{1}{4} P^2 r_1 r_2 (2 \cos \sigma_1 h_1 - 2)(2 \cos \sigma_2 h_2 - 2).$$

由 von Neumann 条件可知差分格式(19)式是无条件稳定的.

4 数值结果分析

4.1 数值方法

在差分格式(17)和(18)式中引入

$$b |q_{n,l}^{m+1}|^a = b |q_{n,l}^m|^a + ab |q_{n,l}^m|^{a-1} M \tau,$$

M 为常数, 略去 τ^2 项, 得如下线性方程组:

$$\begin{aligned} a_{n,l}^{m+1/2} q_{n+1,l}^{m+1/2} + b_{n,l}^{m+1/2} q_{n,l}^{m+1/2} + c_{n,l}^{m+1/2} q_{n-1,l}^{m+1/2} &= d_{n,l}^{m+1/2}, \\ a_{n,l}^{m+1} q_{n,l+1}^{m+1} + b_{n,l}^{m+1} q_{n,l}^{m+1} + c_{n,l}^{m+1} q_{n,l-1}^{m+1} &= d_{n,l}^{m+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $n=1, 2, \dots, N$; $m=1, 2, \dots, L$ 或

$$A_{m+\sigma} Q_{m+\sigma} = D_{m+\sigma} \quad (\sigma = 1/2, 1), \quad (23)$$

其中 $A_{m+\sigma}$, $D_{m+\sigma}$ 分别是低一层上与 $q_{n,l}^m$ 有关的三对角矩阵和向量. 在(22)式中令

$$A_{m+\sigma} = A_{m+\sigma}^0 + i A_{m+\sigma}^1, \quad Q_{m+\sigma} = U_{m+\sigma} + i V_{m+\sigma}, \quad D = D_{m+\sigma}^0 + i D_{m+\sigma}^1,$$

可得

$$\begin{aligned} A_{m+\sigma}^0 U_{m+\sigma} - A_{m+\sigma}^1 V_{m+\sigma} &= D_{m+\sigma}^0, \\ A_{m+\sigma}^1 U_{m+\sigma} + A_{m+\sigma}^0 V_{m+\sigma} &= D_{m+\sigma}^1. \end{aligned} \quad (24)$$

考虑到 $A_{m+\sigma}^1 = -E$, E 是单位矩阵, 我们可以进一步得到

$$\begin{aligned} U_{m+\sigma} &= -\frac{1}{2} (D_{m+\sigma}^1 - A_{m+\sigma}^0 V_{m+\sigma}), \\ V_{m+\sigma} &= \left[\frac{1}{2} (A_{m+\sigma}^0)^2 + 2E \right]^{-1} \left(D_{m+\sigma}^0 + \frac{1}{2} A_{m+\sigma}^0 D_{m+\sigma}^1 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

4.2 数值结果分析

利用追赶法可以得到方程(14)及(15)的数值解(25)式. 图 1 中我们仅给出部分数值结果, 以此说明所研究的广义非线性 Schrödinger 方程具有的孤子性态. 以下取系统参数 $P=2.0$, $b=4.0$.

图 1 分别对于非线性参数 $\alpha=1.5$ 及 $\alpha=4.0$ 取自由参数 $x_0=14.0$, $\xi_1=2.5$, $\xi_2=0.0$, $\eta_1=-2.0$ 及 $\eta_2=1.0$, 给出不同的孤子幅值.

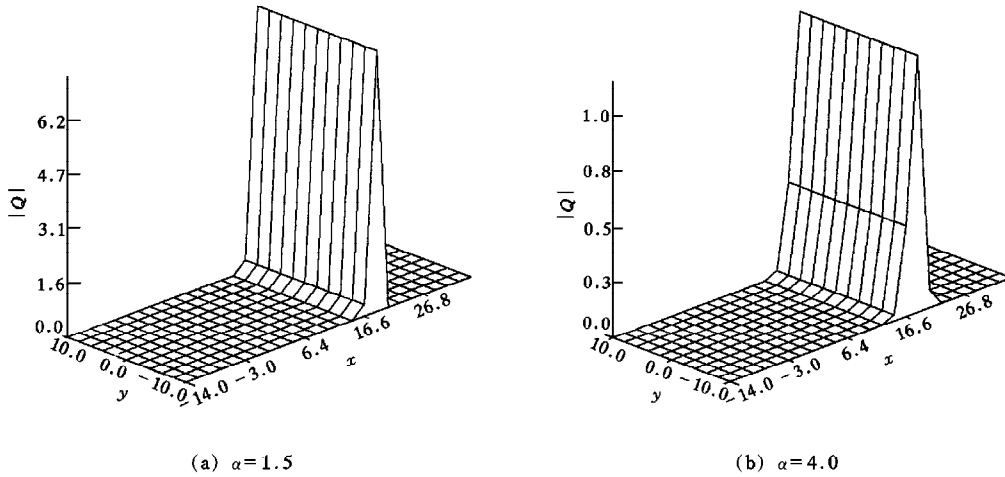


图 1 取不同非线性参数 α 值, 在 $t=3.0$ 时的孤子幅值

图 2 对于非线性参数 $\alpha=3.0$ 及 $\alpha=4.0$ 分别取自由参数 $\alpha=3.0$, $x_0=6.0$, $\xi_1=0.5$, $\xi_2=0.0$, $\eta_1=-1.0$, $\eta_2=1.0$ 及 $x_0=14.0$, $\xi_1=2.5$, $\xi_2=0.0$, $\eta_1=-2.0$, $\eta_2=1.0$, 给出在幅值意义下双孤子的相互作用.

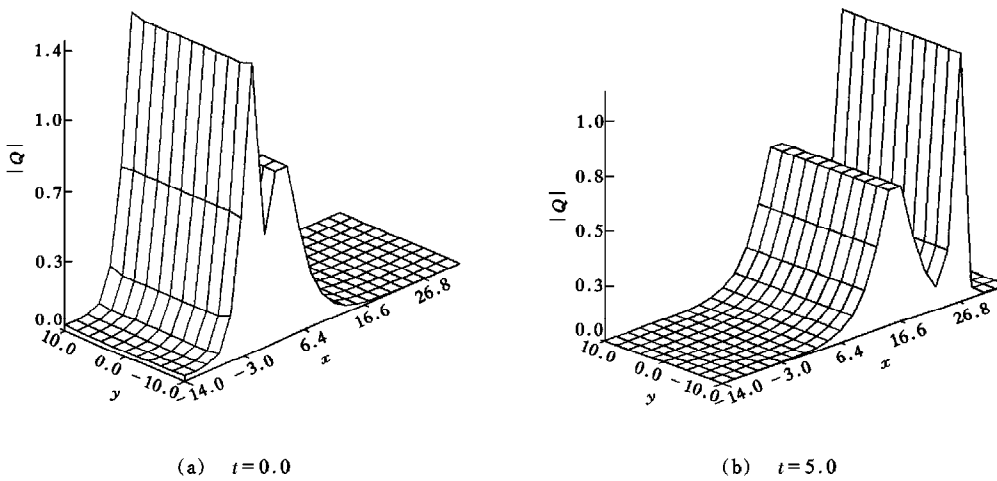


图 2 取 $\alpha=3.0$, 孤子在模意义下的相互作用

5 结论分析与讨论

利用行波方法研究了一类广义非线性 N 维 Schrödinger 方程的孤子解及其性质,得到了该类系统的亮孤子解对于一切 $\alpha > 0$ 均存在,而对于暗孤子解存在的条件为 $\alpha = 2$.

本文还研究了非线性参数 α 变化时孤子性态的变化规律. 结果表明,当 $\alpha \rightarrow 0$ 亮孤子的幅值趋于无穷;而当 $\alpha \rightarrow \infty$ 孤子趋于一个由单参数决定的脉冲波,从而说明孤子现象是该系统非线性的本质特征.

本文同时研究了该系统的数值解法,得到了二维 Schrödinger 方程的 P - R 差分格式及其收敛性与稳定性的条件. 数值实验结果表明,差分格式具有较好的稳定性,由于对非线性部分进行了较好的处理,因而计算结果与理论结果符合较好,结果显示了该系统的孤子特征.

方程(2)与(3)说明,当 $\Gamma = \theta/\alpha$, 色散缓变效应完全补偿损耗时,孤子的传输行为不受损耗的影响,这就为色散缓变的光子系统的设计提供了理论依据.

由孤子解的形式可以看出,当多重孤子吸收系数 $a = 0$ 时,孤子的形状、幅值、脉冲宽度等都保持不变,其传输行为保持了初始状态 $a \neq 0$ 时出现类孤子解,形状、幅值、脉冲宽度、中心相位等均随吸收效应的存在而变化.

从结果还可以看出,只有当非线性效应系数 b 与光纤色散效应 P 相平衡时系统才具有孤子解. 同时孤子的存在还要求 $P > 0$, 即无论亮孤子还是暗孤子解均存在于正常的色散区.

- [1] V. I. Talanov, *TETP Lett.*, **2**(1965), 138.
- [2] V. I. Karpman and E. M. Kruskal, *Sov. Phys.*, **28**(1969), 277.
- [3] K. Tajima, *Opt. Lett.*, **12**(1987), 54.
- [4] W. Zhao and E. Bourkoff, *Opt. Lett.*, **14**(1989), 703.
- [5] C. J. Chen, P. K. A. Wai and C. R. Menyuk, *Opt. Lett.*, **19**(1994), 198.
- [6] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **3**(1955), 28.
- [7] 沈廷根, 计算物理, **13**(1996), 115.
- [8] 曹庆杰等, 计算物理, **14**(1997), 518.

STUDY OF SOLITON SOLUTIONS OF A CLASS OF GENERALIZED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS IN N -SPACE

CAO QING-JIE ZHANG TIAN-DE LI JIU-PING

(*Department of Mathematics and Physics, Shandong University of Technology, Jinan 250061*)

G. W. PRICE K. DJIDJELI

(*Department of Ship Science, University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, UK*)

E. H. TWIZELL

(*Department of Mathematics and Statistics, Brunel University, Uxbridge, Middlesex UB8 3PH, UK*)

(Received 6 January 1997; revised manuscript received 28 April 1997)

ABSTRACT

Soliton solutions and the properties of a class of generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equations in N -space are discussed analytically and numerically. The discussion has been done by using a travelling wave method to get one-soliton solution and the finite difference method to get the numerical solutions for the GNLS equations. The states of the soliton solutions of the system admitting nonlinearity have been investigated when $\alpha \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$. The P-R scheme for the system has been studied, and the conditions of stability and convergence for the scheme were obtained.

PACC: 4265; 0340K; 0260