

双折射光纤中非线性耦合 Schrödinger 方程的小振幅孤波解^{*}

段一士 俞重远¹⁾

(兰州大学物理系, 兰州 730000)

吴振森

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(1997 年 5 月 9 日收到)

采用小振幅孤波近似法, 得到非线性耦合 Schrödinger 方程决定的双折射光纤中的小振幅孤波解, 它们可以同时存在于正常色散区或者分别处于正常和反常色散区.

PACC: 4265; 4281; 0340K

1 引 言

在具有 Kerr 非线性性的光纤中, 基波行为由非线性 Schrödinger(NLS)方程决定, 从精确可积性得到的稳定孤波解是解析研究光脉冲行为的基础. 当由独立 NLS 方程支配的两个光场被耦合到一起时, 得到的波系统一般是不可积的, 但是计算结果表明, 在确定的条件下, 类孤波局域脉冲可能存在, 如双折射光纤就是这样的耦合系统. 在轴对称光纤里, 基模包括两个共同传输的正交极化线性电场, 光纤传导芯的任何不完善导致场传输特性之间的不对称性, 引起线性双折射——两个极化之间色散关系的轻微不同. 非线性光纤里交叉极化幅度耦合引起一个附加的自感应双折射, 这些线性和非线性双折射的相互作用, 或者交叉相位调制可以引起传输脉冲的极化旋转.

光孤波脉冲的耦合在光耦合器及光开关等方面有着广泛的应用, 在双折射光纤中, 线性极化包络的演化由如下耦合 NLS 方程描述:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 u + |u|^2 u + \beta |v|^2 u + (1 - \beta) v^2 u^* &= 0, \\ i \frac{\partial v}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha^2 v + |v|^2 v + \beta |u|^2 v + (1 - \beta) u^2 v^* &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 u 和 v 是复数正交场, 与线性双折射的主轴方向一致; α^2 代表椭圆双折射纤芯的椭圆度, 对于理想圆柱面的情况, $\alpha=0$; 交叉耦合系数 β 是实数, 正值. 此方程的特殊情况已

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

¹⁾ 通讯联系人地址: 北京邮电大学物理教研室, 北京 100876.

经有一些研究,如文献[1]中借助 Hirota 方法讨论反常色散区 ($\sigma_1 = \sigma_2 = +1$) 里,能量在阈值之上的椭圆芯光纤中的束缚态极化孤波.文献[2]中在等幅条件下,研究处于不同通道的孤波相互作用.文献[3]和[4]是以可积系统(也就是 $\beta=1$)的严格孤波解作为绝热近似,把偏离严格可积系统的部分作为微扰 Hamilton 场,以确定它们的演化.文献[5]和[6]中采用数值方法研究了低椭圆度线性极化双折射光纤中非等幅孤波的耦合和相互作用,及其它们在全光孤子开关中的应用.

本文利用小振幅极限得到耦合 NLS 方程的解析解,结果表明,如果两种极化分量同时出现在正常色散区,它们都是小振幅明孤波,而在两种极化分量分别处于正常和反常色散区的情况下,出现在正常色散区的一定是小振幅明孤波,而处于反常色散区的总是小振幅暗孤波,与非耦合时小振幅暗孤波处于正常色散区的情况不同.

2 小振幅孤波解

非耦合的 NLS 方程具有小振幅孤波解^[7,8],现在假定耦合方程(1)有一对小振幅孤波解,形式为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= [u_0 + a(x, t)] \exp[i(2pt + \phi(x, t))], \\ v(x, t) &= [v_0 + b(x, t)] \exp[i(2qt + \theta(x, t))], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 u_0, v_0 是实常数.但是现在的 $a(x, t), b(x, t), \phi(x, t)$ 和 $\theta(x, t)$ 不再是独立 NLS 方程时的形式,下面确定它们的具体形式.将(2)式代入(1)式中,可以得到耦合系数满足的关系:若 $(1-\beta) \neq 0$, 则 $\beta \neq 1$; 若 $(1-\beta) = 0$, 则 $\beta = 1$, 并且 p 与 q, ϕ 与 θ 之间没有限制.我们首先讨论 $\beta=1$ 的情况,取逐级近似,

$$\begin{aligned} a &= \epsilon^2 a_0 + \epsilon^4 a_1 + \dots, \\ b &= \epsilon^2 b_0 + \epsilon^4 b_1 + \dots, \\ \phi &= \epsilon \phi_0 + \epsilon^3 \phi_1 + \dots, \\ \theta &= \epsilon \theta_0 + \epsilon^3 \theta_1 + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

用到新的变量

$$\tau = \epsilon(x - ct), \quad z = \epsilon^3 t, \quad (4)$$

其中 ϵ 是小参量.用(3)和(4)式分离各级变量,得到下列关系:

$$\begin{aligned} 2p &= u_0^2 + v_0^2 + \alpha^2, \quad 2q = v_0^2 + u_0^2 - \alpha^2, \\ c^2 &= -2(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2), \quad b_0 = -\frac{(2\sigma_1 u_0^2 + c^2)}{2\sigma_1 u_0 v_0} a_0. \end{aligned} \quad (5)$$

通过约简,得到最低阶近似下的标准 KdV 方程

$$c^3 \frac{\partial a_0}{\partial z} - \frac{6c^2}{\sigma_1 u_0} (\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2) a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \tau} + (\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2) \frac{\partial^3 a_0}{\partial \tau^3} = 0. \quad (6)$$

解方程得到 a_0 为

$$a_0(\tau, z) = \frac{-2\sigma_1^3 u_0(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)(\sigma_1^2 u_0^2 + \sigma_2^2 v_0^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\sigma_1 \left(\tau - \frac{\sigma_1^2 c(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)^2} z \right) \right], \quad (7)$$

同样的步骤,可以得到 b_0 为

$$b_0(\tau, z) = \frac{-2\sigma_1^2 \sigma_2 v_0(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)(\sigma_1^2 u_0^2 + \sigma_2^2 v_0^2)} \operatorname{sech}^2 \left[\sigma_1 \left(\tau - \frac{\sigma_1^2 c(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)^2} z \right) \right],$$

$$\phi_0(\tau, z) = \frac{-2c\sigma_1(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)(\sigma_1^2 u_0^2 + \sigma_2^2 v_0^2)} \tanh \left[\sigma_1 \left(\tau - \frac{\sigma_1^2 c(\sigma_1^3 u_0^2 + \sigma_2^3 v_0^2)}{(\sigma_1 u_0^2 + \sigma_2 v_0^2)^2} z \right) \right], \quad (8)$$

$$\theta_0 = \phi_0.$$

(7), (8) 和 (2) 式给出了耦合 NLS 方程 (1) 的小振幅孤波解, 此时, $\alpha \neq 0$.

若 $(1 - \beta) \neq 0$, 则 $\beta \neq 1$, 如线性双折射光纤, $\beta = 2/3$; 如果是圆双折射光纤, $\beta = 2$. 这时只有在 $p = q$, $\phi = \theta$ 的要求下, 才可以重复上述计算, 得到完全类似的解, 但是, 从 $p = q$, 可知 $\alpha = 0$, 此时耦合 NLS 方程的一对解 $u(x, t)$ 与 $v(x, t)$ 具有相同的相因子.

3 小振幅孤波的存在区域与特性

由上述计算可以看到, 耦合 NLS 方程存在小振幅孤波解, (5) 式意味着有 3 种可能:

1) 若是 $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 < 0$ 时, 两种极化分量都处于正常色散区, 则传输速度 $c = \pm \sqrt{2(|\sigma_1| u_0^2 + |\sigma_2| v_0^2)}$, 此时 a_0 与 b_0 均为正值, 两种极化分量都是小振幅明孤波; 2) 若是 $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$, 两种极化分量分别处于正常和反常色散区, 要求 $|\sigma_1| u_0^2 > |\sigma_2| v_0^2$, 即 $u_0^2/v_0^2 > |\sigma_2|/|\sigma_1|$, 才能保证传输速度为实数, 得到 a_0 为明孤波, b_0 为暗孤波; 3) 若是 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, 同样道理, 要求 $|\sigma_2| v_0^2 > |\sigma_1| u_0^2$, $v_0^2/u_0^2 > |\sigma_1|/|\sigma_2|$, 此时 a_0 为暗孤波, b_0 为明孤波. 说明小振幅明孤波可以同时存在于正常色散区, 或者两种极化的孤波分别处于正常和反常色散区, 但是出现在正常色散区中的一定是小振幅明孤波, 而处于反常色散区的总是小振幅暗孤波.

图 1 为正常色散区的小振幅明孤波, 可以看到 c 的不同符号对应于不同的传播方向. 图 2 为分别处于正常色散区和反常色散区的明、暗孤波.

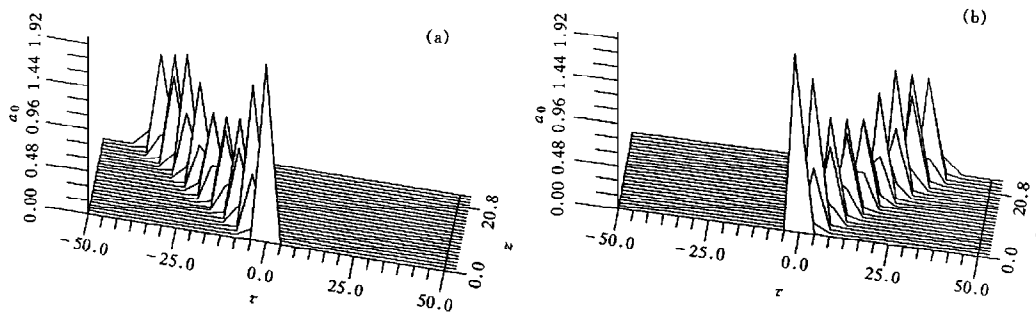


图 1 正常色散区的小振幅明孤波解 a_0 , $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = -1$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0.05$ (a) c 为正; (b) c 为负

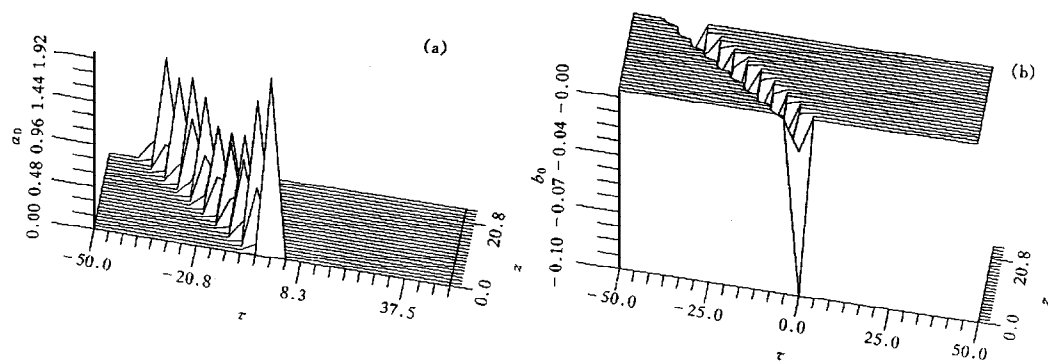


图2 耦合 NLS 方程的小振幅孤波解, $\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = 1$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0.05$ (a) 小振幅明孤波 a_0 ;
(b) 小振幅暗孤波 b_0

- [1] D. David, M. V. Tratnik, *Physica*, **D51**(1991), 308.
- [2] B. A. Malomed, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 8321.
- [3] D. J. Muraki, W. L. Kath, *Physica*, **D48**(1991), 53.
- [4] C. R. Menyuk, *Opt. Lett.*, **12**(1987), 614.
- [5] 俞重远、陈陆君等, 中国激光, **23**(1996), 403.
- [6] 陈陆君、俞重远, 中国激光, **23**(1996), 520.
- [7] Y. S. Kivshar, V. V. Afanasjev, *Opt. Lett.*, **16**(1991), 285.
- [8] Yu Zhongyuan, Chen Lujun, *Chinese J. of Lasers*, **B4**(1995), 37.

SMALL-AMPLITUDE SOLITON SOLUTIONS OF THE COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS IN BIREFRINGENCE OPTICAL FIBER

DUAN YI-SHI YU ZHONG-YUAN

(Department of Physics, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

WU ZHEN-SEN

(Department of Physics, Xidian University, Xi'an 710071)

(Received 9 May 1997)

ABSTRACT

Small-amplitude soliton solutions are obtained which satisfy the coupled nonlinear Schrödinger equations governing optical pulses propagation in the birefringence optical fiber.

PACC: 4265; 4281; 0340K