

高频引力波对环形波导中 电磁波的调制作用^{*}

唐孟希

(中山大学物理系, 广州 510275)

李芳显

(重庆大学应用物理系, 重庆 630044)

(1996 年 1 月 30 日收到)

讨论了垂直入射的、频率为 ω_g 的平面高频引力波对环形波导管中频率为 ω_e 的电磁波的调制作用. 一般情况下, 在波导管中与引力波传播方向垂直的对称平面附近, 电磁波的能量密度会出现三种新的频率成分 ($2\omega_e \pm \omega_g$) 和 ω_g . 在 $\omega_g \gg \omega_e$ 时, 能量密度振幅的相对调制量与引力波的无量纲振幅 h_0 数量级相同. 特别是当 ω_g , ω_e 和电磁波绕波导传播的绕行频率 ω_b 满足关系 $\omega_g = 2\omega_e \gg \omega_b$ 时, 由于类似于共振的机制, 能量密度会出现比 h_0 大几个数量级的振幅相对调制量. 这个结果不会由于参数的微小改变而消失, 这对于探测极微弱的引力辐射信号将是十分重要的.

PACC: 0430; 0480

1 引 言

研究电磁场和引力场的相互作用在引力辐射研究中是一件很有意义的工作. 除引力外, 电磁力是迄今为止人们已知唯一的长程力. 在宇宙中, 大质量、高速运动的天体在产生引力辐射的同时, 往往伴随着电磁辐射的产生, 研究他们的相互作用将有助于了解天体的结构和演化.

已经证明, 按目前的技术水平, 用机械方法在实验室中还难以产生强度可供探测的引力波^[1]. 因此有些物理学家把兴趣转向强电磁场, 把它作为可能的引力波源.

另一方面, 引力波和电磁场的相互作用构成了检测引力波新方法的物理基础之一. 从 1969 年 Weber 公布他的引力波天线观测数据以来的二十多年中, 除了脉冲双星 PSR1913+16 轨道周期变率的观测结果提供了引力波存在的间接证据外, 人类还未能能在实验室里直接接收到引力波. 除了引力辐射的微弱性和天体引力辐射源在时空分布的随机性导致探测的困难外, 现有探测器的缺陷也是至今未能成功的重要原因之一. 目前所有的引力波天线, 无论是棒式天线还是激光干涉仪天线, 无一例外都是利用引力波的潮汐力引起物质的机械位移作为检测的物理基础. 要大幅度提高探测灵敏度, 就要寻找新的物理效应. 在众多的物理效应中, 电磁场对引力波的扰动效应对引力波的探测, 尤其是对高频引力波的

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

探测具有诱人的前景。

研究引力波电磁探测的基本方法是分析在引力波作用下电磁场的参数,如电场强度 $\mathbf{E}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 、频率 ω 、相位 φ 、能流密度 $\mathbf{S}$ 等物理量有什么改变^[2]。Grishchuk 等^[3]和 Braginsky 等^[4,5]研究了引力波和环形波导中电磁场的相互作用后,得到了一个结果:当垂直于环形波导所在平面入射的平面引力波频率 ω_g 是电磁波在环形波导中绕行频率 ω_0 的两倍时,在引力波作用下,电磁场将有一个与相互作用时间成正比的相位移动。这结果似乎会导致一种新型换能器的出现。但进一步的分析可知,如果垂直入射条件和倍频条件两者之一不被精确地满足时,这个结果就会消失。而实际上要严格保证这两个条件的成立简直是不可能的。所以要研制实际上有可能实现的电磁换能器,就必须研究上述两条件不全满足时电磁场对引力波扰动的响应。

本文从弯曲时空的麦克斯韦方程出发,导出在一阶近似下环形波导中的电磁波受垂直入射平面高频引力波扰动时,通过环形波导中的横截面中部的能流密度随时间变化的一般计算式,并讨论了可能应用的一些特殊情况。

2 垂直入射的平面波作用下环形波导中的电磁场方程

设有一薄环形波导放在坐标系的 xoy 平面上,如图 1 所示。环的对称轴为 z 轴,环的横截面为矩形,其内外半径分别为 R 和 $(R+d)$,环的上下底面分别为 $z = -L/2$ 和 $z = L/2$ 。薄的含义,是指环截面的尺度要比环的半径小得多,即

$$d \ll R, \quad L \ll R.$$

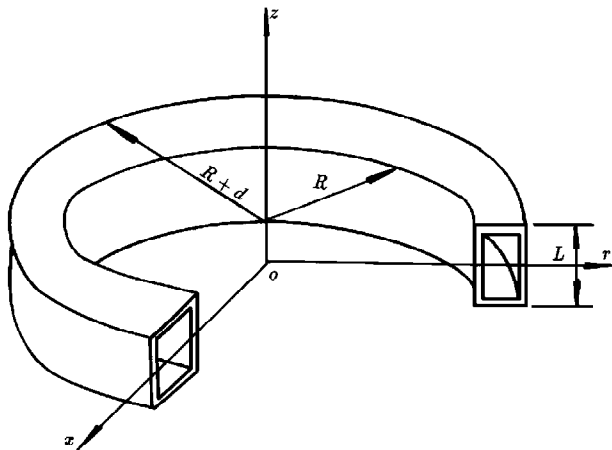


图 1 引力波和电磁波导

由于组成波导壁的物质中弹性波的传播速度 v_s 要比光速小得多,以致波导的固有频率要比考虑的高频引力波的频率低得多,在考虑引力波和波导内的电磁场的相互作用时把波导壁看成近似静止的假设是合理的。设“+”偏振的平面引力波沿 z 轴正方向传播,时空度规按方程^[6]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (1-h)dx^2 - (1+h)dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

变化, 其中

$$h = h_0 \cos \omega_g \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (2)$$

现在来考虑入射平面引力波起潮力引起波导圆环的变形. 由于引力波的横向无迹性, 在起潮力的作用下, 圆环变成椭圆环. 若 x 轴半径的增量 $\Delta x = Rh$, 则 y 轴半径的增量 $\Delta y = -Rh$, 环周长的增量

$$\begin{aligned} \Delta l &= 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+h)^2 \sin^2 u + (1-h)^2 \cos^2 u]^{\frac{1}{2}} du - 2\pi R \\ &= -\frac{1}{8} \pi R h^2 + o(h^3), \end{aligned} \quad (3)$$

精确到 h_0 的一阶量, 有 $\Delta l = 0$, 即环周长的变化是 h_0 的二阶或更高阶的无穷小.

出于以上两个考虑, 在本文中不考虑环的振动. 从弯曲时空自由电磁场的麦克斯韦方程

$$g^{\nu\alpha} F_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad (4)$$

$$F_{[\mu\nu;\alpha]} = 0 \quad (5)$$

出发, 其中

$$F_{\mu\nu;\alpha} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma F_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma F_{\mu\sigma}, \quad (6)$$

$$F_{[\mu\nu;\alpha]} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}, \quad (7)$$

且 $F_{\mu\nu}$ 表示电磁场张量的分量, $g^{\mu\nu}$ 是度规张量的协变分量, (x^0, x^1, x^2, x^3) 表示时间 t 和空间直角坐标的三个坐标. 把由(1)式确定的度规张量代入(4)及(5)式, 并考虑到 $h_0 \ll 1$, 在计算克里斯托弗符号 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ 时, 略去 $g^{\mu\nu}$ 的小量后, 得到了(4)式所对应的 4 个方程

$$\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial E_1}{\partial x^0} + \frac{\partial H_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x^3} + 2\Gamma(E_1 - H_2) = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{\partial E_2}{\partial x^0} - \frac{\partial H_3}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^3} - 2\Gamma(E_2 + H_1) = 0, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial E_3}{\partial x^0} + \frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_1}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

其中 E_i 和 H_i 分别表示电场分量和磁场分量, 而

$$\Gamma = \frac{\omega_g h_0}{2c} \sin \omega_g \left(t - \frac{z}{c} \right). \quad (12)$$

(5)式对应以下 4 个方程

$$\frac{\partial E_1}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial H_3}{\partial x^0} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1} + \frac{\partial H_2}{\partial x^0} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial H_1}{\partial x^0} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x^3} + \frac{\partial H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1}{\partial x^1} = 0. \quad (16)$$

(8)—(11), (13)—(16)式所表示的 8 个方程, 物理意义是明显的. Γ 体现了引力场的扰动.

若 $\Gamma=0$, 它们就回到平直时空中的自由电磁场的麦克斯韦方程和比安基恒等式.

利用

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z}$$

及

$$E_1 = E_\rho \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi,$$

$$E_2 = E_\rho \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi,$$

$$E_3 = E_z,$$

$$H_1 = H_\rho \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi,$$

$$H_2 = H_\rho \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi,$$

$$H_3 = H_z,$$

把(8)—(11)和(13)—(16)式转换到圆柱坐标系 (ρ, φ, z) , 并作恒等变换, 得圆柱坐标下的电磁场方程

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} E_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial z} + 2 \Gamma (E_\rho \sin 2 \varphi + E_\varphi \cos 2 \varphi + H_\rho \cos 2 \varphi - H_\varphi \sin 2 \varphi) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - 2 \Gamma (E_\rho \cos 2 \varphi - E_\varphi \sin 2 \varphi - H_\rho \sin 2 \varphi - H_\varphi \cos 2 \varphi) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} H_\varphi = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} E_\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \quad (21)$$

$$- \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} H_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

3 电磁场方程的微扰解

我们用微扰法解电磁场方程(17)–(24). 把在引力波不存在即 $\Gamma=0$ 时, 满足电磁场方程(17)–(24)及矩形截面环形波导管边界条件的定态电磁波作为方程(17)–(24)的零级近似解. 满足上述条件的电磁波有多种模式, 我们选择

$$E_\rho^{(0)} = f_\rho \sin \frac{m\pi}{L} \left(z + \frac{L}{2} \right) \cos \left[\omega_e \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0} \right) + \theta \right], \quad (25)$$

$$E_\varphi^{(0)} = 0, \quad (26)$$

$$E_z^{(0)} = 0, \quad (27)$$

其中 $R \leq \rho \leq R+d$, $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$, m 为整数, $\omega_0 = c/R$ 是电磁波沿半径 R 的圆周绕行的角频率. 而

$$f_\rho = \frac{m\pi}{L} [aJ_1(k\rho) + bN_1(k\rho)],$$

其中 a, b 是常数, 由边界条件决定, J_1, N_1 为一阶贝塞尔函数和诺依曼函数, k 是方程

$$J_0(kR)N_0[k(R+d)] = J_0[k(R+d)]N_0(kR)$$

的解. 由于 $d \ll R$, 可以近似地认为

$$f_\rho(R) = f_\rho(R+d) = f_\rho(R+\rho) = \text{const.},$$

即在波导截面所在的范围内, 有 $\frac{df_\rho}{d\rho} = 0$.

在只考虑 $m=1$ 的情况下, 求得磁场分量

$$H_\varphi^{(0)} = \frac{\pi c}{\omega_e L} f_\rho \cos \frac{\pi}{L} \left(z + \frac{L}{2} \right) \sin \left[\omega_e \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0} \right) + \theta \right], \quad (28)$$

$$H_z^{(0)} = \sin \frac{\pi}{L} \left(z + \frac{L}{2} \right) \cos \left[\omega_e \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0} \right) + \theta \right], \quad (29)$$

$$H_\rho^{(0)} = 0. \quad (30)$$

考虑在 $z=0$ 附近的一个薄层区域内, 由于有 $|z| \ll L/2$, 可以近似地认为

$$\cos \frac{\pi}{L} \left(z + \frac{L}{2} \right) = 0,$$

$$\sin \frac{\pi}{L} \left(z + \frac{L}{2} \right) = 1,$$

于是得到方程组的零级近似解为

$$E_\rho^{(0)} = f_\rho \cos \left[\omega_e \left(t - \frac{\varphi}{\omega_0} \right) + \theta \right], \quad (31)$$

$$E_\varphi^{(0)} = 0, \quad (32)$$

$$E_z^{(0)} = 0, \quad (33)$$

$$H_{\varphi}^{(0)} = 0, \quad (34)$$

$$H_z^{(0)} = f_{\rho} \cos \left[\omega_e \left(t - \frac{\varphi}{\omega_o} \right) + \theta \right], \quad (35)$$

$$H_{\rho}^{(0)} = 0. \quad (36)$$

把电磁场各分量写成 h_0 级数展开形式

$$E_{\rho} = E_{\rho}^{(0)} + h_0 E_{\rho}^{(1)} + o(h_0^2),$$

$$E_z = E_z^{(0)} + h_0 E_z^{(1)} + o(h_0^2),$$

$$E_{\varphi} = E_{\varphi}^{(0)} + h_0 E_{\varphi}^{(1)} + o(h_0^2),$$

$$H_{\rho} = H_{\rho}^{(0)} + h_0 H_{\rho}^{(1)} + o(h_0^2),$$

$$H_z = H_z^{(0)} + h_0 H_z^{(1)} + o(h_0^2),$$

$$H_{\varphi} = H_{\varphi}^{(0)} + h_0 H_{\varphi}^{(1)} + o(h_0^2)$$

代入方程(11). 把方程(11)按 h_0 的幂次分成两组, 一组只含电磁场各分量的零级近似值, 即引力波扰动不存在时电磁场各分量的值, 另一组将表示在引力波扰动下电磁场各分量的改变量. 考虑零级近似解(13)式后, 得到一级微扰方程组为

$$\frac{\partial E_{\rho}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} E_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_{\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_{\varphi}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{\rho}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\omega_g}{c} E_{\rho}^{(0)} \sin \omega_g \left(t - \frac{z}{c} \right) \sin 2\varphi = 0, \quad (38)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_{\rho}^{(1)}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_{\varphi}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\omega_g}{c} E_{\rho}^{(0)} \sin \omega_g \left(t - \frac{z}{c} \right) \cos 2\varphi = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_{\rho}^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_{\varphi}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} H_{\varphi}^{(1)} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial E_{\rho}^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_{\varphi}^{(1)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} E_{\varphi}^{(1)} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad (41)$$

$$- \frac{\partial E_{\varphi}^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\rho}^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial E_{\rho}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\varphi}^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial H_{\rho}^{(1)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} H_{\rho}^{(1)} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_{\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial z} = 0. \quad (44)$$

由于我们设定的零级近似解中电磁场只有 E_{ρ} 和 H_z 分量, 在一级微扰解中, 也不妨认为其他方向的电磁分量可以忽略不计. 考虑到环的宽度 d 比半径 R 小得多时, 可以略去电磁分量在 ρ 方向上的不均匀性, 经过繁杂的运算, 可以得到两个关于 $E_{\rho}^{(1)}$ 和 $H_z^{(1)}$ 的线性非齐次波动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{\rho}^{(1)}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\omega_o^2} \frac{\partial^2 E_{\rho}^{(1)}}{\partial t^2} = & -A\omega_+ [\cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \cos(\omega_+ t - k_+ \varphi + \theta)] \\ & + A\omega_- [\cos(\omega_- t - k_- \varphi + \theta) + \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta)] = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{\partial^2 H_z^{(1)}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 H_z^{(1)}}{\partial t^2} = \omega_0 A k_- [\cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \cos(\omega_- t - k_- \varphi + \theta)] \\ - \omega_0 A k_+ [\cos(\omega_+ t - k_+ \varphi + \theta) + \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta)] = 0, \quad (46)$$

其中 $A = \frac{\omega_g f_\rho}{4 \omega_0^2}$, $\omega_\pm = \omega_e \pm \omega_g$ 及 $k_\pm = \frac{\omega_e}{\omega_0} \pm 2$. 方程(15)的解由两部分组成, 一部分是波动形式的通解, 另一部分是扰动产生的特解. 由于波动形式的通解和零级近似解有相同的传播因子 $(\varphi - \omega_0 t)$, 两者可以合并, 并且由于 $h_0 \ll 1$ 而被略去, 所以我们只需考虑特解. 用处理线性非齐次方程的一般方法, 得到当 $\omega_g \neq 2 \omega_0$ 时方程(45), (46)的解为

$$E_\rho^{(1)} = -\frac{\omega_+ \omega_0^2 A}{\omega_+^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_+ \varphi + \theta) + \frac{\omega_- \omega_0^2 A}{\omega_-^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_- \varphi + \theta) \\ - \frac{\omega_+ \omega_0^2 A}{\omega_+^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \frac{\omega_- \omega_0^2 A}{\omega_-^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta), \quad (47)$$

$$H_z^{(1)} = -\frac{\omega_0^3 A k_+}{\omega_+^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_+ \varphi + \theta) + \frac{\omega_0^3 A k_-}{\omega_-^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_- \varphi + \theta) \\ + \frac{\omega_0^3 A k_-}{\omega_+^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \frac{\omega_0^3 A k_+}{\omega_-^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta) \quad (48)$$

而在 $\omega_g = 2 \omega_0$ 时有

$$E_\rho^{(1)} = -\frac{A \omega_+ t \sin k_+}{2 k_+} \left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\theta}{k_+} \right) + \frac{A \omega_- t \sin k_-}{2 k_-} \left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\theta}{k_-} \right) \\ - \frac{\omega_+ \omega_0^2 A}{\omega_+^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \frac{\omega_- \omega_0^2 A}{\omega_-^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta), \quad (49)$$

$$H_z^{(1)} = -\frac{A \omega_0 t \sin k_+}{2} \left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\theta}{k_+} \right) + \frac{A \omega_0 t \sin k_-}{2} \left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\theta}{k_-} \right) \\ + \frac{\omega_0^3 A k_-}{\omega_+^2 - k_-^2 \omega_0^2} \cos(\omega_+ t - k_- \varphi + \theta) + \frac{\omega_0^3 A k_+}{\omega_-^2 - k_+^2 \omega_0^2} \cos(\omega_- t - k_+ \varphi + \theta). \quad (50)$$

4 信号检测方法

任何检测都与能量交换相联系. 从以上的计算可以看出, 无论是 $\omega_g \neq 2 \omega_0$ 的情形还是 $\omega_g = 2 \omega_0$ 的情形, 电磁波的电场分量和磁场分量都受到引力波的调制. 如果这种调制伴随着能量的起伏, 就有可能通过物理方法把这种能量的变化检测出来. 下面计算流经波导截面中央, 即 $z=0$ 附近的玻印亭矢量

$$|S| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{c}{4\pi} E_\rho H_z \\ = \frac{c}{4\pi} [E_\rho^{(0)} H_z^{(0)} + h_0 (E_\rho^{(0)} H_z^{(1)} + E_\rho^{(1)} H_z^{(0)})] + o(h_0^2), \quad (51)$$

考虑 $\omega_g \neq 2 \omega_0$ 的情形. 我们把玻印亭矢量的大小 S 写成 S_0 与 S_1 的和, 其中 S_0 是引力波不存在时的 S 值, S_1 为由引力波扰动引起的能流密度的变化量. 我们有

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} f_\rho^2 \left[1 + \cos \left(2\omega_e t - 2\frac{\omega_e}{\omega_o} \varphi + 2\theta \right) \right], \quad (52)$$

$$S_1 = \frac{c}{32\pi} \omega_g h_0 f_\rho^2 \sum_{i=1}^6 A_i \cos(\Omega_i t - K_i \varphi + \theta_i), \quad (53)$$

其中 Ω_i , K_i , θ_i 和 A_i 如下:

i	Ω_i	K_i	θ_i	A_i
1	$2\omega_e + \omega_g$	$2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o} + 1\right)$	2θ	$\frac{1}{2\omega_o - \omega_g}$
2	$2\omega_e + \omega_g$	$2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o} - 1\right)$	2θ	$-\frac{1}{2\omega_e + \omega_g - 2\omega_o}$
3	$2\omega_e - \omega_g$	$2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o} - 1\right)$	2θ	$\frac{1}{2\omega_o - \omega_g}$
4	$2\omega_e - \omega_g$	$2\left(\frac{\omega_e}{\omega_o} + 1\right)$	2θ	$\frac{1}{2\omega_e + \omega_g - 2\omega_o}$
5	ω_g	2	2θ	$\frac{2}{2\omega_o - \omega_g}$
6	ω_g	-2	2θ	$\frac{2(\omega_g - 2\omega_o)}{(2\omega_e + \omega_g - 2\omega_o)(2\omega_e - \omega_g + 2\omega_o)}$

以上结果表明,若引力波不存在时输入形如方程(31)~(36)的频率振幅稳定的电磁波,然后选择合适的 φ 角测量通过该面的、位于 $z=0$ 附近处的能流密度.若有引力波通过时,能流密度就会出现 $(2\omega_e \pm \omega_g)$ 及 ω_g 的频率成分,各频率成分对应不同的振幅.我们测出频率和振幅便可判断引力波的存在并进一步确定其物理参数.

5 某种特殊情况的解

若探测对象为晶体空间阵列的高频引力辐射^[7,8],这时 ω_g 可达 10^{10}Hz 以上,适当选择微波源的频率就有可能满足

$$\omega_g \gg \omega_e \gg \omega_o$$

的情形,这时

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} f_\rho^2 \left[1 + \cos \left(2\omega_e t - 2\frac{\omega_e}{\omega_o} \varphi + 2\theta \right) \right], \quad (54)$$

$$S_1 = -\frac{c}{8\pi} h_0 f_\rho^2 \cos \omega_g t \cos(\varphi - \theta) \cos(\varphi + \theta). \quad (55)$$

能流密度中出现频率为 ω_g 、相对调制量为 $h_0 \cos(\varphi - \theta) \cos(\varphi + \theta)$ 的分量, φ 和 θ 可由人工设定,因而相对调制量在最佳状态下可与 h_0 有相同的数量级,如果不考虑可能接收的频率,则环形波导作为引力波接收天线与棒状天线和激光干涉仪天线有相同的灵敏度.

对于上述的高频引力辐射,由于其频率可以事先精确地控制,我们可以选择微波源的频率 ω_e ,使之满足

$$\omega_g = 2\omega_e \gg \omega_o,$$

这时由(52), (53)式可以得到

$$S_1 = -\frac{3}{64\pi} h_0 f_\rho^2 \cos\left(2\omega_g t - 2\frac{\omega_e}{\omega_0} \varphi + 2\theta\right) - \frac{1}{64\pi} h_0 \frac{\omega_g}{\omega_0} f_\rho^2 \cos\left(2\frac{\omega_e}{\omega_0} \varphi + 2\theta\right) - \frac{1}{64\pi} h_0 \frac{\omega_g}{\omega_0} f_\rho^2 \cos(\omega_g t + 2\varphi). \quad (56)$$

在能流密度 S 中,除了 S_0 原有的频率分量 $2\omega_e$ 外,还出现了三个新的频率分量,它们是:

i) 相对调制量为 $\frac{h_0 \omega_g}{8\omega_0}$ 的驻波; ii) 频率为 $2\omega_g$ 、相对调制量为 $\frac{3}{8}h_0$ 的行波; iii) 频率与引力波频率 ω_g 相同,相对调制量为 $\frac{h_0 \omega_g}{8\omega_0}$ 的行波.

由于 $\omega_g \gg \omega_0$, 有可能得到比 h_0 大若干个数量级的调制量,这对于探测极微弱的引力辐射信号将是十分有利的.

对这个现象可以作出如下的解释.若在某一时刻,在波导内某一 φ 角的位置,电磁场和引力波的相位达到某种匹配关系,使得在引力波作用下,电场强度和磁场强度得以加强.假定电磁场不沿波导绕行,那么经过半个电磁波的周期后,由于引力波的频率是电磁波频率的两倍,引力波刚好过了一个周期.与最初时刻的状态相比,电磁场分量相位相反,在引力波作用下,电场强度和磁场强度的大小仍然加强.如果不考虑波导的损耗,电磁波的能流密度就会不断增加.然而实际上电磁波以 ω_0 的速度在波导中绕行,所以每隔一个电磁波的周期,即使在波导的同一位置,电磁波的相位也会有一个微小的移动,正是这个相位移动限制了能流密度的无限增大. $\frac{\omega_g}{\omega_0}$ 就标志着这个相位移动的快慢,所以 $\frac{\omega_g}{\omega_0}$ 越大,能流密度的相对调制量也会越大.这个现象的来源可理解为波导中的电磁波在引力波激发下的共振现象.

至于 $\omega_g = 2\omega_0$ 的情形,文献[3]中已有详尽的讨论,本文不再重复.但必须指出,文献[3]中的结论和本文(49), (50)式的结果都是在理想波导的情形下得到的.若耗散存在,方程(45)和(46)就会增加一与 $\frac{\partial E_\rho^{(1)}}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial t}$ 成正比的项,这时振幅中出现的就不是与 t 成正比的项,而是与指数形式有关了.

6 结 论

由上述讨论可知,当垂直入射的高频引力波与环形波导中的电磁波相互作用时,一般情况下,在沿引力波传播方向上波导的对称平面附近,电磁波的能流密度会出现三个新的频率成分($2\omega_e \pm \omega_g$)和 ω_g . 在 $\omega_g \gg \omega_e \gg \omega_0$ 时,能流密度振幅的相对调制量与 h_0 同数量级,这表明电磁探测方法适用于高频引力波.特别需要指出的是,当引力波频率 ω_g 、电磁波频率 ω_e 和电磁波沿波导传播的绕行频率 ω_0 满足 $\omega_g = 2\omega_e \gg \omega_0$ 时,由于类似于共振的原因,能流密度的振幅将会出现一个比 h_0 大若干个数量级的相对调制量.这对于探测引力波这种特别微弱的信号而言,可能是十分有用的结果.

这里我们还要提及 TT 坐标系与费密坐标系中电磁场张量的相互关系问题. Fortini

等^[9]对引力波电磁探测中两种坐标系的关系作过详细的讨论.在文献[9]的基础上,Calle-gari 等^[10]进一步证明了在两个坐标系中电磁张量间存在关系

$$F_{\mu\nu}(x^a) = F_{\mu\nu}^{(0)}(x^a) + F_{\mu\nu}^{(1)TT}(x^a), \quad (57)$$

式中 x^a 为费密坐标系中的坐标.上式表明,物理的费密坐标系中电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 直接等于费密坐标系中未扰动的电磁场张量 $F_{\mu\nu}^{(0)}$ 和 TT 坐标系中直接用 x^a 代替 TT 坐标 y^λ 所得的扰动项 $F_{\mu\nu}^{(1)TT}(x^a)$ 之和.其间的差别至多是 $h_{\mu\nu}$ 的二阶无穷小.由于本文所有的张量都是在费密坐标下算得的,所以在 h_0 的一级近似下,我们的结论在费密坐标系中成立.

还有一点必须指出,当 $\omega_g = 2\omega_e$ 不被精确地满足时,(56)式中只会出现能流密度振幅的相对调制量适当降低,而不会像文献[3]中的结果那样,当 $\omega_g = 2\omega_e$ 有微小偏离便会导致结果自动消失的现象,这是把计算结果付诸实践时必须考虑的.

- [1] J. Weber, *General Relativity and Gravitational Waves*(Wiley Interscience, New York, 1961), chap. 8.
- [2] D. Cuomo *et al.*, in *International Symposium on Experimental Gravitational Physics*(Guangzhou, August 1987), eds. Peter F. Michelson(World Scientific Press, Singapore), p. 262
- [3] L. P. Grishchuk and M. V. Sazhin, *Sov. Phys. JETP*, **41**(1975), 787.
- [4] V. B. Braginsky *et al.*, *Sov. Phys. JETP*, **38**(1973), 865.
- [5] V. B. Braginsky and M. B. Menskey, *Sov. Phys. JETP Lett.*, **13**(1971), 417.
- [6] C. W. Misner, R. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [7] H. Seki *et al.*, *J. Appl. Phys.*, **44**(1973), 2201.
- [8] 李芳昱、唐孟希, *物理学报*, **36**(1987), 1570.
- [9] P. L. Fortini *et al.*, *Nuovo Cimento*, **B71**(1982), 37.
- [10] G. Callegari *et al.*, *Nuovo Cimento*, **B100**(1987), 421.

MODULATION ON ELECTROMAGNETIC WAVES IN A CIRCULAR WAVEGUIDE BY HIGH FREQUENCY GRAVITATIONAL WAVES

TANG MENG-XI

(*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275*)

LI FANG-YU

(*Department of Applied Physics, Chongqing University, Chongqing 630044*)

(Received 30 January 1996)

ABSTRACT

Modulation on electromagnetic waves with angle frequency ω_e , travelling around a circular waveguide by high-frequency plane gravitational waves with angle frequency ω_g , incident perpendicularly to the plane, where the waveguide is located, is discussed. Results present that in the vicinity of symmetric plane, perpendicular to the travelling direction of gravitational waves, of the waveguide, energy flux density of electromagnetic waves, generally will be added by three new components with angle frequencies $(2\omega_e \pm \omega_g)$ and ω_g , respectively. In the case as $\omega_g \gg \omega_e$, ratio-modulation of amplitude of energy flux density is as large as h_0 , the dimensionless amplitude of the gravitational wave, in order. Specially, when for ω_g , ω_e and ω_o , the cyclical angle frequency of electromagnetic waves around the waveguide, $\omega_g = 2\omega_e \gg \omega_o$ is satisfied, energy flux density will be greater than h_0 in order because of some mechanism, similar to resonance. The results don't vanish when these parameters have a small change. It is very important to detect the very weak signals of gravitational waves.

PACC: 0430; 0480