

双模双光子关联发射激光的稳态特性 及其量子噪声压缩特性^{*}

胡响明

(华中师范大学应用物理研究所, 武汉 430070)

彭金生[†]

(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

(1995 年 12 月 13 日收到)

采用非线性量子理论研究双模双光子关联发射激光的稳态行为及其量子噪声的压缩特性. 证明了在没有触发信号的情况下, 系统一方面可以建立双模无反转激光, 另一方面可以呈现双模滞后现象. 指出了在稳态时相对振幅和平均相位量子噪声压缩的特点.

PACC: 4250

1 引 言

Scully 等^[1]曾证明, 在 V 型双模关联发射激光 (correlated-spontaneous-emission laser, 简称 CEL) 中, 利用原子相干可以猝灭双模相对相位的量子噪声. 随后的研究表明, 采用量子拍^[2,3]和注入原子相干^[4-6]均可以实现 V 型 CEL 的量子噪声猝灭. 原子相干还可以猝灭相对振幅的量子噪声^[6-8]. 一些实验研究^[9,10]已证明了 V 型 CEL 的量子噪声可以被抑制. 可见, CEL 在高精度测量中具有潜在的应用价值, 如环形激光陀螺^[11-13]和引力波探测器^[14].

Lu 和 Zhu^[15]用线性量子理论证明, 在 Ξ 型双模双光子 CEL 中, 利用注入原子相干能够使得双模相对振幅和平均相位的量子噪声产生压缩, 但是, 对于双模双光子 CEL 的稳态行为及其量子噪声的压缩特性还远未作深入探讨.

本文采用非线性量子理论和等效哈密顿量^[16]研究双模双光子 CEL 的稳态行为及其量子噪声的压缩特性. 我们首先推导双模双光子 CEL 的约化密度矩阵主方程, 然后利用反常序 Q 表示分布函数^[17-19]把约化密度矩阵主方程转化为 Fokker-Planck 方程, 进而分析系统的稳态行为和稳态下的量子噪声压缩特性. 结果表明, 在没有触发信号的情况下, 系统一方面可以建立双模无反转激光, 另一方面可以呈现双模滞后现象. 还表明了相对振幅具有 50% 的压缩, 平均相位仅在光强小于某一值时才能产生量子噪声压缩.

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

[†] 中国高等科技中心 (世界实验室), 北京 100080.

2 双模双光子 CEL 的主方程

考虑双模双光子 CEL 系统. Ξ 型原子的上、中、下三个能级分别为 a, c, b , 如图 1 所示. 假定中间能级 c 远远偏离单光子共振跃迁, 故单光子过程可以忽略^[20]. 因此可以采用两能级等效哈密顿量^[16]来描述原子与双模光场的双光子相互作用. 假定活性原子随机地注入腔中并与光场发生相互作用. 用 t_j 表示第 j 个原子的注入时刻 (初始时刻). 在相互作用表象中, 活性原子与双模双光子场的相互作用哈密顿量为^[21-25]

$$V = \sum_j \Theta(t - t_j) [g\sigma_j^+ a_1 a_2 e^{i(\Delta - \omega_j)} + g^* a_1^+ a_2^+ \sigma_j e^{i(\Delta - \omega_j)}], \quad (1)$$

其中, a_1 (a_1^+) 和 a_2 (a_2^+) 分别是模 1 (频率为 ν_1) 和模 2 (频率为 ν_2) 的湮没 (产生) 算子. σ_j (σ_j^+) 是第 j 个原子的下降 (上升) 算子, g 是耦合常数, ω 是原子的跃迁频率, Δ 是失谐量, $\Delta = \omega - \nu_1 - \nu_2$,

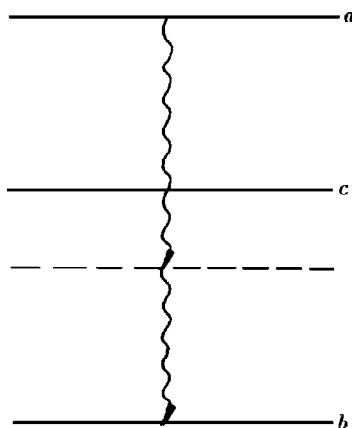


图 1 原子能级示意图

$$\Theta(t - t_j) = \begin{cases} 1, & t \geq t_j; \\ 0, & t < t_j \end{cases} \quad (1a)$$

是阶跃函数, 它指明第 j 个原子与光场发生相互作用的初始时刻.

正如 Scully-Lamb 激光理论^[23]所述, 把场中的活性原子看作是彼此独立的, 采用适于研究 CEL 的量子理论^[21]来推导光场的约化密度矩阵主方程. 假定原子各能级的衰减速率相同, 设为 Γ , 模 1(2) 的腔损系数和空腔频率分别为 γ_1 (γ_2) 和 Ω_1 (Ω_2). 考虑良腔近似, $\Gamma \gg \gamma_1, \gamma_2$. 设在相互作用表象中, 第 j 个原子的初始密度矩阵为

$$\rho_{ij}^j = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} e^{-i(\nu_1 + \nu_2)t_j} \\ \rho_{ba} e^{i(\nu_1 + \nu_2)t_j} & \rho_{bb} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

式中, ρ_{aa} , ρ_{bb} 和 ρ_{ab} 对每个原子都是相同的.

最后, 我们得到双模双光子 CEL 的约化密度矩阵元 $\rho_{n_1, m_1; n_2, m_2}$ 的主方程,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n_1, m_1; n_2, m_2} = & \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \rho_{aa} \left[(1 + i\sigma)(n' + m') + \frac{\beta}{4\alpha} (1 + \delta^2)(n' - m')^2 \right] \rho_{n_1, m_1; n_2, m_2} \right. \\ & + \left. \alpha \rho_{bb} \sqrt{n' m'} \rho_{n_2+1, m_2+1} \right\} \xi_{n_1, m_1}^{-1} \\ & + \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \rho_{bb} \left[(1 - i\delta)(n'' + m'') + \frac{\beta}{4\alpha} (1 + \delta^2)(n'' - m'')^2 \right] \rho_{n_1, m_1; n_2, m_2} \right. \\ & + \left. \alpha \rho_{aa} \sqrt{n'' m''} \rho_{n_2-1, m_2-1} \right\} \xi_{n_2-1, m_2-1}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ i S \rho_{ab} \left[1 - \frac{\beta}{4\alpha} (1 + i\delta)(n' - m') \right] \sqrt{m'} \rho_{n_2, m_2+1} \right. \\
& - i S^* \rho_{ba} \left[1 + \frac{\beta}{4\alpha} (1 - i\delta)(n' - m') \right] \sqrt{n'} \rho_{n_2+1, m_2} \left. \right\} \xi_{n_2, m_2}^{-1} \\
& + \left\{ -i S \rho_{ab} \left[1 + \frac{\beta}{4\alpha} (1 + i\delta)(n'' - m'') \right] \sqrt{n''} \rho_{n_2-1, m_2} \right. \\
& + i S^* \rho_{ba} \left[1 - \frac{\beta}{4\alpha} (1 + i\delta)(n'' - m'') \right] \sqrt{m''} \rho_{n_2, m_2-1} \left. \right\} \xi_{n_2-1, m_2-1}^{-1} \\
& - \frac{\gamma_1}{2} (n_1 + m_1) \rho_{n_2, m_2} + \gamma_1 \sqrt{(n_1 + 1)(m_1 + 1)} \rho_{n_2+1, m_1+1} \\
& - \frac{\gamma_2}{2} (n_2 + m_2) \rho_{n_2, m_2} + \gamma_2 \sqrt{(n_2 + 1)(m_2 + 1)} \rho_{n_2+1, m_2+1} \\
& - i(\Omega_1 - \nu_1) \rho_{n_2, m_2} - i(\Omega_2 - \nu_2) \rho_{n_2, m_2} \quad (3)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
n' &= (n_1 + 1)(n_2 + 1), \quad m' = (m_1 + 1)(m_2 + 1), \\
n'' &= n_1 n_2, \quad m'' = m_1 m_2, \\
\xi_{n_2, m_2} &= 1 + \frac{\beta}{2\alpha} (n' + m') + \frac{\beta^2}{16\alpha^2} (1 + \delta^2)(n' - m')^2, \\
\xi_{n_2-1, m_2-1} &= 1 + \frac{\beta}{2\alpha} (n'' + m'') + \frac{\beta^2}{16\alpha^2} (1 + \delta^2)(n'' - m'')^2, \\
\alpha &= \frac{2r_a |g|^2}{\Gamma^2 + \Delta^2}, \quad \beta = \frac{8r_a |g|^4}{(\Gamma^2 + \Delta^2)^2}, \quad S = \frac{r_a g^*}{\Gamma + i\Delta}, \quad \delta = \frac{\Delta}{\Gamma}.
\end{aligned} \quad (3a)$$

α , β , S 和 δ 分别是线性增益系数、饱和系数、与原子相干相关联的系数^[21,22]和归一化双光子失谐, r_a 是原子的注入速率.

方程(3)是研究双模双光子 CEL 的基本方程. 方程(3)与两能级单模 CEL 和两能级单模双光子 CEL 的约化密度矩阵主方程相似. 方程(3)的 n' , m' , n'' 和 m'' 分别与文献[21]中的 $n+1$, $m+1$, n 和 m 相对应, 分别与文献[22]中的 n' , m' , n'' 和 m'' 相对应. 单模单、双光子 CEL 的上述这些项分别是光场光子数的一次方和二次方, 而双模双光子 CEL 的这些项是双模光子数的乘积. 正是这个差别体现了双模双光子 CEL 与单模单、双光子 CEL 的不同. 另一方面, 如果 $\rho_{ab} = \rho_{ba}^* = 0$, 方程(3)描述通常的非相干抽运激光 (ordinary lasers, 简称 OL).

3 Q 表示的 Fokker-Planck 方程

为了方便地研究双模系统的稳态行为及其量子噪声特性, 我们把主方程(3)转化为双模场约化密度矩阵算子的准概率分布函数的 Fokker-Planck 方程. 选择 Q 表示反常序分布函数,

$$Q(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = \pi^{-2} \langle \epsilon_1 \epsilon_2 | \rho | \epsilon_1 \epsilon_2 \rangle, \quad (4)$$

其中 π 为常数, $|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$ 为双模相干态, $a_i |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle = \epsilon_i |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$, $i=1, 2$. ϵ_1^* 和 ϵ_2^* 分别是 ϵ_1 和 ϵ_2 的复共轭. 采用光场的约化密度矩阵元 $\rho_{n_1, m_1; n_2, m_2}$, 把 Q 函数写为

$$Q(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*) = \pi^{-2} \sum_{\substack{n_1, m_1=0 \\ n_2, m_2=0}}^{\infty} e^{-|\epsilon_1|^2 - |\epsilon_2|^2} \frac{\epsilon_1^{n_1} \epsilon_2^{m_1} (\epsilon_1^*)^{n_1} (\epsilon_2^*)^{m_1}}{\sqrt{n_1! n_2! m_1! m_2!}} \rho_{n_1, m_1; n_2, m_2}, \quad (5)$$

取(5)式的时间导数并将方程(3)代入, 考虑通常的平均光子数远大于 1 的情况, $|\epsilon_i|^2 \gg 1$, $i=1, 2$, 得到光场的 Fokker-Planck 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & \left[-\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} d_1 \frac{\partial}{\partial \epsilon_2} d_2 + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1^2} D_{11} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_2^2} D_{22} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1 \partial \epsilon_2} D_{12} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1 \partial \epsilon_1^*} W_{11} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_2 \partial \epsilon_2^*} W_{22} + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1 \partial \epsilon_2^*} W_{12} + \text{c.c.} \right] Q, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, c.c. 为复共轭,

$$Q = Q(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*, t), \quad (6a)$$

$$d_i = \frac{\frac{\alpha}{2}(1-i\delta)(\rho_{aa} - \rho_{bb}) |\epsilon_i|^2 \epsilon_i - i S \rho_{ab} \left[1 + \frac{\beta}{2\alpha}(1+i\delta) |\epsilon_1 \epsilon_2|^2 \right] \epsilon_i^* + i S^* \rho_{ba} \frac{\beta}{2\alpha}(1-i\delta) |\epsilon_2|^2 \epsilon_2^*}{1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2}$$

$$- \frac{\gamma_1}{2} \epsilon_i - i(\Omega_i - \nu_i) \epsilon_i, \quad (6b)$$

$$d_2 = d_1(1 \leftrightarrow 2), \quad (6c)$$

$$\begin{aligned} D_{11} = & \frac{-\frac{\beta}{8}(1+\delta^2)(\rho_{aa} + \rho_{bb}) |\epsilon_2|^4 \epsilon_1^2 + i S \rho_{ab} \frac{\beta}{4\alpha}(1+i\delta) |\epsilon_2|^2 \epsilon_1 \epsilon_1^*}{1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2} \\ & + \frac{\left[d_{\epsilon_1} / \epsilon_1 + \frac{\gamma_1}{2} + i(\Omega_1 - \nu_1) \right] \frac{\beta}{2\alpha} |\epsilon_2|^2 \epsilon_1^2}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2 \right)^2}, \end{aligned} \quad (6d)$$

$$D_{22} = D_{11}(1 \leftrightarrow 2), \quad (6e)$$

$$\begin{aligned} D_{12} = & \frac{-\frac{\alpha}{2}(\rho_{aa} - \rho_{bb})(1-i\delta) \epsilon_1 \epsilon_2 - \frac{\beta}{4}(1+\delta^2)(\rho_{aa} + \rho_{bb}) |\epsilon_1 \epsilon_2|^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2} \\ & + \frac{i S \rho_{ab} \left[1 + \frac{\beta}{\alpha}(1+i\delta) |\epsilon_1 \epsilon_2|^2 \right] + i \rho_{ba}^* \rho_{ba} \frac{\beta}{2\alpha}(1-i\delta) \epsilon_1^2 \epsilon_2^2}{1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2} \\ & + \frac{\{ [2d_{\epsilon_1} / \epsilon_1 + \gamma_1 + 2i(\Omega_1 - \nu_1)] |\epsilon_1|^2 + [2d_{\epsilon_2} / \epsilon_2 + \gamma_2 + 2i(\Omega_2 - \nu_2)] |\epsilon_2|^2 \} \frac{\beta}{4\alpha} \epsilon_1 \epsilon_2}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} |\epsilon_1 \epsilon_2|^2 \right)^2}, \end{aligned} \quad (6f)$$

$$\begin{aligned}
W_{11} = & \frac{\frac{\beta}{4}(1+\delta^2)(\rho_{aa}+\rho_{bb})|\epsilon_1\epsilon_2|^2|\epsilon_1|^2+\alpha\rho_{bb}|\epsilon_1|^2}{2\left(1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2\right)} \\
& + \frac{-iS\rho_{ab}\frac{\beta}{4\alpha}(1+i\delta)|\epsilon_2|^2\epsilon_1^*\epsilon_2^*+iS^*\rho_{ba}\frac{\beta}{4\alpha}(1-i\delta)|\epsilon_1|^2\epsilon_1\epsilon_2}{2\left(1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2\right)} \\
& + \frac{\operatorname{Re}\left\{\left[d_{\epsilon_1}/\epsilon_1+\frac{\gamma_1}{2}+i(\Omega_1-\nu_1)\right]\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1|^2\epsilon_1\epsilon_2^*\right\}}{2\left(1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2\right)}+\frac{\gamma_1}{2}, \quad (6g)
\end{aligned}$$

$$W_{22} = W_{11}(1\leftrightarrow 2), \quad (6h)$$

$$\begin{aligned}
W_{12} = & \frac{\left[\frac{\beta}{4}(1+\delta^2)(\rho_{aa}+\rho_{bb})+\alpha\rho_{bb}\right]\epsilon_1\epsilon_2^*}{1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2} \\
& + \frac{-iS\rho_{ab}\frac{\beta}{4\alpha}(1+i\delta)|\epsilon_1|^2\epsilon_2^*+iS^*\rho_{ba}\frac{\beta}{4\alpha}(1-i\delta)|\epsilon_2|^2\epsilon_1^2}{1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2} \\
& + \frac{\{[2d_{\epsilon_1}/\epsilon_1+\gamma_1+2i(\Omega_1-\nu_1)]|\epsilon_1|^2+[2d_{\epsilon_2}/\epsilon_2+\gamma_2+2i(\Omega_2-\nu_2)]|\epsilon_2|^2\}\frac{\beta}{4\alpha}\epsilon_1\epsilon_2^*}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha}|\epsilon_1\epsilon_2|^2\right)^2}, \quad (6i)
\end{aligned}$$

其中, $d_1(1\leftrightarrow 2)$ 表示同时把表达式 d_1 中下标为 1 和 2 的诸物理量分别换为下标为 2 和 1 的物理量, $D_{11}(1\leftrightarrow 2)$ 和 $W_{11}(1\leftrightarrow 2)$ 也类似。

为便于分析双模系统的稳态性质,我们还需要作如下变换:

利用关系式

$$\epsilon_j = r_j e^{i\theta_j}, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

把方程(6)转化为以 $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ 为变量的 Fokker-Planck 方程. 然后利用关系式

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2}(r_1+r_2), \quad r = r_1-r_2, \\
\Phi &= \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2), \quad \theta = \theta_1-\theta_2,
\end{aligned} \quad (8)$$

并假定 $R \gg r$ 把方程(6)转化为以 R, r, Φ, θ 为变量的 Fokker-Planck 方程. 最后利用

$$I = R^2 \quad (9)$$

把方程(6)转换为以 I, Φ, r, θ 为变量的 Fokker-Planck 方程,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_2}{\partial t} = & \left[-\frac{\partial}{\partial I} d_I - \frac{\partial}{\partial r} d_r - \frac{\partial}{\partial \Phi} d_\Phi - \frac{\partial}{\partial \theta} d_\theta + \frac{\partial^2}{\partial I^2} d_{II} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} D_{rr} \right. \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} D_{\Phi\Phi} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} D_{\theta\theta} + 2\frac{\partial^2}{\partial I \partial r} D_{Ir} + 2\frac{\partial^2}{\partial \Phi \partial \theta} D_{\Phi\theta} + 2\frac{\partial^2}{\partial I \partial \Phi} D_{I\Phi} \\
& \left. + 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} D_{r\theta} + 2\frac{\partial^2}{\partial I \partial \theta} D_{I\theta} + 2\frac{\partial^2}{\partial r \partial \Phi} D_{r\Phi} \right] Q_2. \quad (10)
\end{aligned}$$

其中,

$$Q_2(I, r, R, \theta, t) = \frac{1}{2} Q(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1^*, \epsilon_2^*, t), \quad (10a)$$

$$d_I = 2\sqrt{I} \operatorname{Re}[d_1 e^{-i(\Phi + \frac{1}{2}\theta)} + d_2 e^{-i(\Phi - \frac{1}{2}\theta)}], \quad (10b)$$

$$d_r = \operatorname{Re}[d_1 e^{-i(\Phi + \frac{1}{2}\theta)} - d_2 e^{-i(\Phi - \frac{1}{2}\theta)}], \quad (10c)$$

$$d_\Phi = \frac{1}{2\sqrt{I}} \operatorname{Im}[d_1 e^{-i(\Phi + \frac{1}{2}\theta)} + d_2 e^{-i(\Phi - \frac{1}{2}\theta)}], \quad (10d)$$

$$d_\theta = \frac{1}{\sqrt{I}} \operatorname{Im}[d_1 e^{-i(\Phi + \frac{1}{2}\theta)} - d_2 e^{-i(\Phi - \frac{1}{2}\theta)}], \quad (10e)$$

$$D_{II} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[D_{11} e^{-i(2\Phi - \theta)} + D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)} + D_{12} e^{-i2\Phi} + W_{12} e^{-i\theta}] + \frac{1}{2} I(W_{11} + W_{22}), \quad (10f)$$

$$D_{rr} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} + D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)} + D_{12} e^{-i2\Phi} + W_{12} e^{-i\theta}] + \frac{1}{2} I(W_{11} + W_{22}), \quad (10g)$$

$$D_{\Phi\Phi} = \frac{1}{8I} \operatorname{Re}[-D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} - D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)} - D_{12} e^{-i2\Phi} + W_{12} e^{-i\theta}] + \frac{1}{8I} I(W_{11} + W_{22}), \quad (10h)$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{1}{2I} \operatorname{Re}[-D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} - D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)} + D_{12} e^{-i2\Phi} - W_{12} e^{-i\theta}] + \frac{1}{2I} I(W_{11} + W_{22}) \quad (10i)$$

$$D_{Ir} = \sqrt{I} \operatorname{Re}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} - D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)}] + \sqrt{I} I(W_{11} - W_{22}), \quad (10j)$$

$$D_{\Phi\theta} = \frac{1}{2I} \operatorname{Re}[-D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} + D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)}] + \frac{1}{2I} I(W_{11} + W_{22}), \quad (10k)$$

$$D_{I\Phi} = \operatorname{Im}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} + D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)} + D_{12} e^{-i2\Phi} - W_{12} e^{-i\theta}], \quad (10l)$$

$$D_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{I}} \operatorname{Im}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} + D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)}], \quad (10m)$$

$$D_{I\theta} = \operatorname{Im}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} - D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)}], \quad (10n)$$

$$D_{r\Phi} = \frac{1}{2\sqrt{I}} \operatorname{Im}[D_{11} e^{-i(2\Phi + \theta)} - D_{22} e^{-i(2\Phi - \theta)}]. \quad (10o)$$

在双模平均光子数远大于 1 且 $R \gg r$ 的情况(通常是这种情况)下, 方程(10)与方程(3)是等价的. 而从方程(10)可以很方便地讨论双模场的稳态行为及其量子噪声的压缩特性.

4 稳态运行

现在讨论双模场的稳态特性. 考虑 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ 的情形. 从(10b)–(10e)式得到 I, r, Φ, θ 的运动方程,

$$\dot{I} = d_I = (G - \gamma) I, \quad (11)$$

$$\dot{r} = d_r = -\frac{1}{2}(G + \gamma)r, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = d_\Phi = -|S| \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})\delta N + 2|\rho_{ab}|[\cos(\mu - 2\Phi - \arctg \delta) + N^2\sqrt{1 + \delta^2}\cos(\mu - 2\Phi)]}{2(1 + N^2)} \\ + \frac{1}{2}(\nu_1 - \Omega_1 + \nu_2 - \Omega_2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\theta} = d_\theta = \nu_1 - \Omega_1 + \nu_2 + \Omega_2. \quad (14)$$

其中,

$$N = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} I, \quad (15)$$

μ 是 $g^* \rho_{ab}$ 的幅角,

$$g^* \rho_{ab} = |g \rho_{ab}| e^{i\mu}, \quad (16)$$

G 是 I 的增益,

$$G(N) = |S| \frac{(\rho_{aa} - \rho_{bb})N + 2|\rho_{ab}|\sin(\mu - 2\Phi - \arctg \delta)}{1 + N^2}. \quad (17)$$

从方程(10)的推演知道,运动方程(11)–(14)只适用于 $I \gg 1$ 的情形,但由于与 I 相关的

项均以 $N = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} I$ 的形式出现,方程(11)也可以写为

$$\dot{N} = d_N = (G - r)N. \quad (11a)$$

因此,方程(11)–(14)仍然适用于 $N \ll 1$ 的情形.这样,我们可以近似地把 $N \ll 1$ 的情形看作 N 趋于零的情形^[22,24,25].

方程(11a),(12)–(14)中,都与相对相位 θ 无关,对于 OL 情形, $\rho_{ab} = 0$, 这些方程也与平均相位 Φ 无关.然而,对于 CEL 情形, $\rho_{ab} \neq 0$, Φ 可以锁定,这与线性理论^[15]的结果是一致的.在 CEL 情形^[6],平均相位 Φ 锁定在 $\frac{\partial d_\Phi(\Phi_0)}{\partial \Phi} < 0$ 和 $\left| \frac{\partial d_\Phi(\Phi)}{\partial \Phi} \right|$ 作为 Φ 的函数取最大值的点 Φ_0 .考虑共振情形, $\delta = 0$,从(12)式得锁定的相位为

$$\Phi_0^k = \frac{1}{2} \left[\mu + \frac{\pi}{2} + (-1)^k \pi \right], \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

从(13)和(14)式得到激光频率为

$$\nu_1 = \Omega_1, \quad \nu_2 = \Omega_2. \quad (19)$$

从(12)式得到相对振幅的稳态值

$$r_0 = 0. \quad (20)$$

利用(8)式,我们得到,双模光强 $I_1 = r_1^2$ 和 $I_2 = r_2^2$ 用 I 表示为

$$I_1 = I_2 = I. \quad (21)$$

因此, I 可以代表双模光子数(或光强), N 则代表归一化光子数.

在稳定的锁相点 Φ_0 , 激光增益为

$$G(N) = |S| \frac{(\rho_{aa}\rho_{bb})N + 2|\rho_{ab}|}{1 + N^2}, \quad (22)$$

N 的稳态解必须满足

$$G(N_0) = \gamma, \quad \frac{\partial d_N(N_0)}{\partial N} = N \frac{\partial G(N_0)}{\partial N} < 0. \quad (23)$$

OL 和 CEL 的增益 G 与 N 的函数关系示于图 2. 从(23)式可知, N 的稳态解 N_0 只能分布在 $G > 0$ 且 G 随 N 的增加而减少的区域. 对于 OL 情形, $\rho_{ab} = 0$, 稳态解为

$$N_0 = \frac{|S|(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{2\gamma} + \sqrt{\frac{|S|^2(\rho_{aa} - \rho_{bb})^2}{4\gamma^2} - 1}, \quad (24)$$

取值范围为

$$N_0 > 1. \quad (25)$$

反转条件是

$$\rho_{aa} - \rho_{bb} > \frac{2\gamma}{|S|}. \quad (26)$$

对于 CEL 情形, $\rho_{ab} \neq 0$, 稳态解为

$$N_0 = \frac{|S|(\rho_{aa} - \rho_{bb})}{2\gamma} + \sqrt{\frac{|S|^2(\rho_{aa} - \rho_{bb})^2}{4\gamma^2} + \frac{2|S\rho_{ab}|}{\gamma} - 1}. \quad (27)$$

反转和无反转情形的取值范围及相应的条件为

$$\begin{aligned} N_0 &> \sqrt{\eta^2 + 1} - \eta, \quad \rho_{bb} > \rho_{bb} \text{ 且 } G(\sqrt{\eta^2 + 1} - \eta) > \gamma, \\ N_0 &> 0, \quad \rho_{aa} = \rho_{bb} \text{ 且 } 2|S\rho_{ab}| > \gamma, \\ N_0 &< \eta, \quad \rho_{aa} < \rho_{bb} \text{ 且 } 2|S\rho_{ab}| > \gamma, \end{aligned} \quad (28)$$

其中

$$\eta = \frac{2|S\rho_{ab}|}{|\rho_{aa} - \rho_{bb}|}. \quad (28a)$$

可见, 系统在 CEL 情形可以建立双模无反转激光. 而且, 由于 $G(0) = 2|S\rho_{ab}|$, 所以当 $G(0) > \gamma$ 时, 无论是反转情形还是无反转情形, 都不需要触发信号来诱导激光的产生.

另一方面, CEL 在反转条件下, 即使没有触发信号, 系统能够呈现双模滞后现象. 当抽运速率 r_a 从零开始逐渐增加时, 激光增益 $G(N)$ 随之增加, 当 r_a 增至 $G(0) = \gamma$ 时, $r_a = P_p$,

$$P_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2|S\rho_{ab}|} \right) P_m, \quad P_m = \frac{2\gamma\Gamma(1 - 2|S\rho_{ab}|)}{|g|(\rho_{aa} - \rho_{bb})^2}. \quad (29)$$

如果 r_a 再增加, 越过 P_p , 双模光场发生从 $N=0$ 到 $N=N_p$ 的跳变,

$$\begin{aligned} N_p &= \left(1 + \frac{1}{2|S\rho_{ab}|} \right) N_m, \\ N_m &= \frac{1 - 2|S\rho_{ab}|}{\rho_{aa} - \rho_{bb}}. \end{aligned} \quad (30)$$

如果 r_a 继续增加, N 随之增加. 如果连续减少抽运速率 r_a , N 则随之减少. 当 r_a 减至 $G_{\max}(N) = \gamma$ 时, $r_a = P_m$, 光强减至 N_m . 如果 r_a 再减少, 越过 P_m , 双模光场发生从 $N =$

N_m 到 $N=0$ 的跳变. 上述滞后过程如图 3 所示. (29) 和 (30) 式的计算用到纯态, $|\rho_{ab}| = \sqrt{\rho_{aa}\rho_{bb}}$.

总之, 在没有触发信号的情况下, 系统一方面可以建立双模无反转激光, 另一方面, 在反转时可以呈现双模滞后现象.

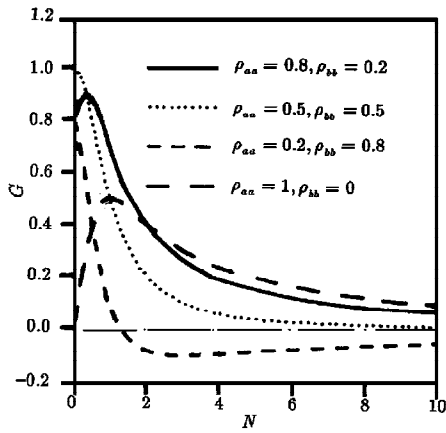


图2 双模双光子 CEL 在锁相点 Φ_0 的增益 G 与归一化光强 N 的函数关系 参数: $\alpha = 10^{-2}$, $\beta = 10^{-6}$, $|\rho_{ab}| = \sqrt{\rho_{aa}\rho_{bb}}$

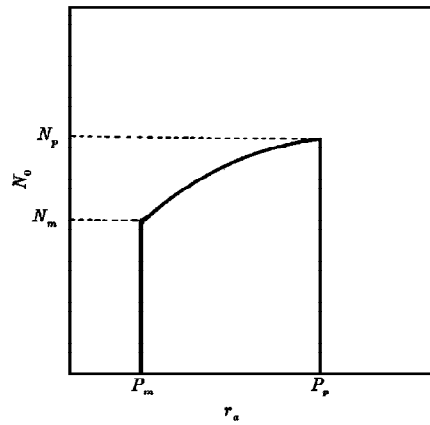


图3 归一化光子数 N_0 对抽运速率 r_a 的滞后关系 没有注入信号

5 量子噪声压缩

这里讨论在稳态条件下, 双模双光子 CEL 相对振幅和平均相位量子噪声压缩的特点. 相对振幅和平均相位的真空噪声水平分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{8I_0}$ ^[6]. 从方程(10)可以写出 Q 表示中 I, r, Φ, θ 的方差运动方程,

$$\frac{d}{dt} \langle (\delta I)^2 \rangle = 2 \langle d_I \delta I \rangle + 2 \langle D_{II} \rangle, \quad (31a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\delta r)^2 \rangle = 2 \langle d_r \delta r \rangle + 2 \langle D_{rr} \rangle, \quad (31b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\delta \Phi)^2 \rangle = 2 \langle d_\Phi \delta \Phi \rangle + 2 \langle D_{\Phi\Phi} \rangle, \quad (31c)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\delta \theta)^2 \rangle = 2 \langle d_\theta \delta \theta \rangle + 2 \langle D_{\theta\theta} \rangle, \quad (31d)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta I \delta r \rangle = \langle d_I \delta r \rangle + \langle d_r \delta I \rangle + 2 \langle D_{Ir} \rangle, \quad (31e)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta \Phi \delta \theta \rangle = \langle d_\Phi \delta \theta \rangle + \langle d_\theta \delta \Phi \rangle + 2 \langle D_{\Phi\theta} \rangle, \quad (31f)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta I \delta \Phi \rangle = \langle d_I \delta \Phi \rangle + \langle d_\Phi \delta I \rangle + 2 \langle D_{I\Phi} \rangle, \quad (31g)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta r \delta \theta \rangle = \langle d_r \delta \theta \rangle + \langle d_\theta \delta r \rangle + 2 \langle D_{r\theta} \rangle, \quad (31h)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta I \delta \theta \rangle = \langle d_I \delta \theta \rangle + \langle d_\theta \delta I \rangle + 2 \langle D_{I\theta} \rangle, \quad (31i)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta r \delta \Phi \rangle = \langle d_r \delta \Phi \rangle + \langle d_\Phi \delta r \rangle + 2 \langle D_{r\Phi} \rangle, \quad (31j)$$

其中, $\langle \cdot \rangle$ 表示对分布函数 Q_2 求平均. 在稳态时 $\frac{d}{dt} = 0$. 由于平均光子数远大于 1, 方程 (31) 中的扩散系数是 (10f) — (10o) 式中扩散系数的稳态值. 下面用上标 “°” 表示稳态扩散系数、漂移系数及其导数. 在稳态点 (I_0, r_0, Φ_0) , 相对振幅和平均相位的扩散系数为

$$D_{rr}^\circ = \frac{3}{4} \gamma, \quad (32)$$

$$D_{\Phi\Phi}^\circ = \frac{[2 |S| (\rho_{aa} + \rho_{bb}) N_0^2 + |S| (3\rho_{aa} + \rho_{bb})] N_0 + 2 |S\rho_{ab}|}{16 I_0 (1 + N_0^2)} + \frac{|S\rho_{ab}|}{4 I_0}, \quad (33)$$

从方程 (11) — (14) 有

$$\frac{\partial d_r^\circ}{\partial \Phi} = \frac{\partial d_r^\circ}{\partial \theta} = \frac{\partial d_r^\circ}{\partial I} = \frac{\partial d_\Phi^\circ}{\partial I} = \frac{\partial d_\Phi^\circ}{\partial r} = \frac{\partial d_\Phi^\circ}{\partial \theta} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial d_r^\circ}{\partial r} = -\gamma, \quad \frac{\partial d_\Phi^\circ}{\partial \Phi} = -2 |S\rho_{ab}|, \quad (35)$$

在稳态点 (I_0, r_0, Φ_0) 附近把相对振幅和平均相位的漂移系数展开至 $\delta I, \delta r, \delta \Phi$ 的一次幂. 根据 Q 表示分布函数的特点, 从方程 (31b) 和 (31c) 得到在稳态时相对振幅和平均相位的量子噪声

$$\langle (\Delta r)^2 \rangle = \frac{D_{rr}^\circ}{|\partial d_r^\circ / \partial r|} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \Phi)^2 \rangle &= \frac{D_{\Phi\Phi}^\circ}{|\partial d_\Phi^\circ / \partial \Phi|} - \frac{1}{8 I_0} \\ &= \frac{N_0 [2(\rho_{aa} + \rho_{bb}) N_0^2 + (3\rho_{aa} + \rho_{bb})] + 2 |\rho_{ab}|}{32 I_0 |\rho_{ab}| (1 + N_0^2)}. \end{aligned} \quad (37)$$

可见, 相对振幅的量子噪声与光强 I_0 无关. 无论是在反转区域还是在无反转区域, 也无论是强场还是弱场, 相对振幅保持 50% 的压缩. 平均相位 Φ 的量子噪声则依赖于光场强度 N_0 . 只有当 N_0 小于某值时, $\langle (\Delta \Phi)^2 \rangle$ 才可能小于 $\frac{1}{8 I_0}$, 平均相位才能产生压缩. 在无反转区域, N_0 可以取较小值, 因而在无反转区域, 压缩比较明显. 当 $2 |S\rho_{ab}| = \gamma \rightarrow 0^+$,

$\frac{\alpha}{\beta} > 10^5$, 可以保证 $N_0 \ll 1$, 但仍有 $I_0 \gg 1$, 即 $1 \ll I_0 \ll \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$. 此时, 平均相位的量子噪声为

$$\langle (\Delta \Phi)^2 \rangle \approx \frac{1}{16 I_0}. \quad (38)$$

因此, 在小光强极限, 平均相位有 50% 的压缩.

6 结 论

通过推导光场的约化密度矩阵主方程,并把它转换为 Q 表示分布函数的 Fokker-Planck 方程,研究了双模双光子 CEL 的稳态行为,以及在稳态时相对振幅和平均相位的量子噪声压缩特性.我们的结果表明在没有触发信号的情况下,系统一方面可以建立双模无反转激光,另一方面,在反转时系统能够呈现双模滞后现象.我们的结果还表明相对振幅和平均相位能同时产生压缩.相对振幅产生压缩的特点是无论在反转区域还是在无反转区域,也无论光场多强,它总是保持 50% 的压缩.平均相位压缩的特点是必须在光强小于某值时才能产生,在无反转区域能产生明显的压缩,在小光强极限,压缩量接近 50%.

- [1] M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2802.
- [2] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 752.
- [3] J. Bergou, M. Orszag, M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 754.
- [4] J. Bergou, M. Orszag, M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 768.
- [5] K. Zaheer, M. S. Zubairy, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 5227.
- [6] N. Lu, *J. Opt. Soc. Am.*, **B7**(1990), 2025.
- [7] N. Lu, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 8154.
- [8] 胡响明, 光电子·激光, **6**(1995), 108.
- [9] M. P. Winters, J. L. Hall *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **65**(1990), 3116.
- [10] J. Bergou, M. Orszag, *J. Opt. Soc. Am.*, **B5**(1988), 249.
- [11] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche *et. al.*, *Rev. Mode. Phys.*, **57**(1985), 61.
- [12] M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 452.
- [13] J. Krause, M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 1771.
- [14] M. O. Scully, J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 4043.
- [15] N. Lu, S. Y. Zhu, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2685.
- [16] K. J. McNeil, D. F. Walls, *J. Phys.*, **A8**(1975)104;111.
- [17] Y. Kano, *J. Math. Phys.*, **6**(1965), 1913.
- [18] C. L. Mehta, E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev.*, **138**(1965), B247.
- [19] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**(1965), 2226.
- [20] S. Y. Zhu, M. O. Scully, *Phys. Rev.*, **A38**(1988), 5433.
- [21] N. Lu, J. Bergou, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 237.
- [22] N. Lu, F. X. Zhao, J. Bergou, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 5189.
- [23] M. Sargent, M. O. Scully, W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics*(Addison-Wesley, Reading, WA, 1974), p. 281.
- [24] N. Lu, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 6756.
- [25] N. Lu, S. Y. Zhu, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 5737.

THE OPERATION IN THE STEADY STATE AND SQUEEZING OF QUANTUM NOISE IN TWO-MODE TWO-PHOTON CORRELATED-SPONTANEOUS-EMISSION LASERS

HU XIANG-MING

(*Institute of Applied Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

PENG JIN-SHENG

(*Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

(Received 13 December 1995)

ABSTRACT

Operation in the steady state and squeezing of quantum noise in two-mode two-photon correlated-spontaneous-emission lasers(CEL) are studied via nonlinear quantum theory. It is shown that the two-mode two-photon CEL exhibits lasing without inversion and two-mode hysteresis even without triggering. The features of squeezing of quantum noise in the relative amplitude and the average phase are given.

PACC: 4250