

新型 Wiggler 谐波自由电子激光

文双春

(衡阳师范高等专科学校物理系, 衡阳 421008)

(1996 年 2 月 2 日收到)

用单粒子方法推导出了 Pinhas 提出的一种新型摆动器的谐波自由电子激光的小信号增益. 结果表明, 它与普通平面摆动器自由电子激光的小信号增益有非常相似的形式.

PACC: 4255T

1 引 言

Pinhas 提出了一种新型摆动器^[1]. 一般而言, 该摆动器的空间磁场分布是十分复杂的^[2], 但是在 xz 平面的傍轴情形, 磁场呈简单的线性形式, 相对论性电子在这个平面内的运动轨迹与在普通平面摆动器中的运动轨迹相似^[1], 已经从理论上证明利用该摆动器产生自由电子激光的可能性^[3-5]. 文献[4]计算出了电子在这种摆动器中运动产生的自发辐射谱分布, 文献[3]和[5]计算了该摆动器自由电子激光的小信号增益, 但他们都忽略了电子的纵向振荡运动, 而纵向振荡是产生高次谐波的原因, 因此, 在他们的结果中不可能出现高次谐波项, 而且对于基波情形, 其结果也是不够准确的. 与文献[3]一样, 本文也采用文献[6]的单粒子方法, 并考虑电子的纵向振荡运动, 将新型摆动器自由电子激光的小信号增益推广到谐波情形, 我们将发现, 新型摆动器自由电子激光的小信号增益与普通摆动器有相似的形式; 忽略纵向振荡运动时, 结果与 Pinhas 的结果^[3]完全一致.

2 基本计算公式

新型 Wiggler 的磁场为

$$\mathbf{B}_m = \hat{y}Px, \quad (1)$$

式中 P 是常数, 电子在电磁场中运动遵循 Lorentz 力方程

$$\frac{d}{dt}(\gamma\boldsymbol{\beta}) = -\frac{e}{mc}[\mathbf{E}_r + \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{B}_m + \mathbf{B}_r)], \quad (2a)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}_r, \quad (2b)$$

式中 e 和 m 分别是电子的电荷和质量, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ 是归一化速度, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ 是相对论能量因子, $\mathbf{E}_r$ 和 $\mathbf{B}_r$ 分别是电磁波的电场和磁场分量, 我们设电磁波是平面偏振波

$$\mathbf{E}_r = \hat{x}E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi), \quad (3a)$$

$$\mathbf{B}_r = \hat{y}E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi), \quad (3b)$$

式中 E_0 , k_r , ω_r 和 φ 分别是电磁波的振幅、波数、圆频率和初位相, $\omega_r = ck_r$, 将(1), (3a), (3b)式代入(2a), (2b)式, 得

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta_x) = -\frac{e}{mc}[E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi) + \beta_z Px - \beta_z E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi)], \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma\beta_z) = -\frac{e}{mc}[-\beta_x Px + \beta_x E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi)], \quad (4b)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{e}{mc}\beta_x E_0\cos(k_r z - \omega_r t + \varphi). \quad (4c)$$

由(4b)和(4c)式, 我们可以得到一个常量

$$\gamma(1 - \beta_z) + \frac{eP}{2mc^2}x^2 = \text{const.} \quad (5)$$

同时将 γ 表示为

$$\gamma^{-2} = 1 - \beta_x^2 - \beta_z^2. \quad (6)$$

这里只考虑小信号情形, 即 E_0 是小量, 相对于摆动器场来说可以看作是微扰, 由(4)式容易求得电子的零级未扰轨道为

$$x_s = x_0 \cos \omega_0 t, \quad (7a)$$

$$z_s = \beta_{\parallel} ct + \frac{\omega_0 x_0^2 \sin(2\omega_0 t)}{8\beta_{\parallel} c}, \quad (7b)$$

式中 x_0 是电子的横向初始位移(为方便计, 我们已假定电子的初始纵向位移和初位相均为零), $\beta_{\parallel}$ 是归一化纵向平均速度, $\omega_0 = \sqrt{e\beta_{\parallel} P / m\gamma_s}$, γ_s 是电子的未扰相对论能量因子. 分别将电子的轨迹 $\mathbf{r}(t) = x\hat{x} + z\hat{z}$ 和 γ 因子展开成 E_0 的幂级数

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_s(t) + \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) + \cdots, \quad (8)$$

$$\gamma(t) = \gamma_s(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \cdots, \quad (9)$$

$\mathbf{r}_1$, γ_1 和 $\mathbf{r}_2$, γ_2 分别是借助于电场强度 E_0 定标的一阶和二阶扰动量, 各阶扰动量的初始条件为

$$x_1(t=0) = z_1(t=0) = 0, \quad (10a)$$

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{z}_1(t=0) = 0, \quad (10b)$$

$$\gamma_1(t=0) = 0. \quad (10c)$$

由(4c)和(7a), (7b)式得

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{eE_0}{mc^2} \dot{x}_s \cos\left\{\frac{\omega_r}{\omega_R}[\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + k_r z_0 + \varphi\right\} \\ &= \frac{eE_0 \omega_0 x_0}{2mc^2} \left\{ \sin\left[\frac{\omega_R - \omega_r}{\omega_r} \omega_0 t + \frac{\omega_r}{\omega_R} \xi \sin(2\omega_0 t) + \varphi\right] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left[\frac{\omega_R + \omega_r}{\omega_r} \omega_0 t - \frac{\omega_r}{\omega_R} \xi \sin(2\omega_0 t) - \varphi\right] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2 &= -\frac{eE_0}{mc^2} \left\{ \dot{x}_1 \cos\left[\frac{\omega_r}{\omega_R}[\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + k_r z_0 + \varphi\right] \right. \\ &\quad \left. + \dot{x}_s k_r \dot{z}_1 \sin\left[\frac{\omega_r}{\omega_R}[\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + k_r z_0 + \varphi\right] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\omega_R = \omega_0/(1 - \beta_{//})$ 是电磁波的共振圆频率, 第 f 次谐波的圆频率为 $\omega_r = f\omega_R \pm \delta\omega$, $\delta\omega$ 是失谐量, ξ 定义为:

$$\xi = \frac{\omega_0^2 x_0^2}{8\beta_{//}(1 - \beta_{//})c^2}. \quad (13)$$

由(5)和(6)式, 我们可以得到下列方程

$$\gamma_1 - \beta_{//} \gamma_1 - \gamma_s \frac{\dot{z}_1}{c} = -\frac{eP}{mc^2} x_s x_1, \quad (14a)$$

$$-\frac{2}{\gamma_s^3} \gamma_1 = -2 \frac{\dot{x}_s \dot{x}_1}{c} - 2\beta_{//} \frac{\dot{z}_1}{c}. \quad (14b)$$

3 一阶扰动量和二阶扰动量

利用下列恒等式^[7]

$$\cos(\alpha \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n}(\alpha) \cos(2n\theta),$$

$$\sin(\alpha \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\alpha) \sin((2n+1)\theta),$$

式中 $J_n(\alpha)$ 是第一类整数阶 Bessel 函数. 改写(11)式, 然后在 $(0, t)$ 上积分之, 得

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & \frac{eE_0 \omega_0 x_0}{2mc^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) \\ & \times \left\{ \frac{1}{\left(f-1-2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0} \left[\cos\varphi - \cos\left(\left(f-1-2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0 t + \varphi\right) \right] \right. \\ & - \frac{1}{\left(f+1-2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0} \left[\cos\varphi - \cos\left(\left(f+1-2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0 t + \varphi\right) \right] \\ & + \frac{1}{\left(f-1+2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0} \left[\cos\varphi - \cos\left(\left(f-1+2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0 t + \varphi\right) \right] \\ & \left. - \frac{1}{\left(f+1+2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0} \left[\cos\varphi - \cos\left(\left(f+1+2n+\frac{\delta\omega}{\omega_R}\right)\omega_0 t + \varphi\right) \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

考虑到激光器主要在共振频率附近运转, 上式可进一步简化为

$$\gamma_1 = \frac{eE_0 \omega_0 x_0}{2mc^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) \frac{\cos\varphi - \cos\left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t\right)}{\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0} (\delta_{f-1, 2n} - \delta_{f+1, 2n}), \quad (16)$$

式中 $\delta_{i,j}$ 是 Kronecker 符号, 我们已经略去了(15)式中的非共振项. 由(12)式知, 为了求得二阶扰动量 γ_2 , 还必须求出 $\dot{x}_1$, $\dot{z}_1$, 联立(14a), (14b)两式并利用(11)式得

$$\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -D \cos \left[-\frac{\omega_r}{\omega_R} [\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + \varphi \right], \quad (17a)$$

$$2c\beta_{//}\dot{z}_1 - \omega_0^2 x_s x_1 + \dot{x}_s \dot{x}_1 = c^2 \left(\frac{\beta_{//}}{\gamma_s} - \frac{\beta_{//}^2}{\gamma_s} + \frac{1}{\gamma_s^3} \right) \gamma_1, \quad (17b)$$

式中

$$D = -\frac{eE_0}{m} \left(\frac{\beta_{//}}{\gamma_s} - \frac{\beta_{//}^2}{\gamma_s} - \frac{1}{\gamma_s^3} \right).$$

方程(17a)为非齐次谐振动方程,其通解为

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{D \sin \omega_0 t}{\omega_0} \int \cos \left[-\frac{\omega_r}{\omega_R} [\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + \varphi \right] \cos \omega_0 t dt \\ + \frac{D \cos \omega_0 t}{\omega_0} \int \cos \left[-\frac{\omega_r}{\omega_R} [\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)] + \varphi \right] \sin \omega_0 t dt,$$

式中 C_1, C_2 是常数,由初始条件(10)决定. 求出上式积分并考虑初始条件后得

$$x_1 = \frac{D}{2\omega_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \\ \times \left[\frac{\cos \varphi - \cos \left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \right)}{\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0} \cos \omega_0 t - \frac{\sin \varphi - \sin \left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \right)}{\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0} \sin \omega_0 t \right]. \quad (18)$$

联立(16), (17b), (18)式并利用初始条件(10a)式,得

$$z_1 = \frac{UeE_0\omega_0 x_0}{8m\beta_{//}(1-\beta_{//})c^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \\ \times \sin \left[-\frac{\omega_r}{\omega_R} (\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)) + \varphi \right] \frac{\sin \left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \right) + \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \cos \varphi - \sin \varphi}{\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 \right)^2}, \quad (19)$$

式中 $U = c^2 \left[\frac{\beta_{//}}{\gamma_s} - \frac{\beta_{//}^2}{\gamma_s} + \frac{1}{\gamma_s^3} \right]$, 将(7a), (18), (19)式代入(12)式,考虑到(18)式的共振项正比于 $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 \right)^{-1}$, 而(19)式的共振项正比于 $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 \right)^{-2}$, 因此,相对于 z_1 来说, $\dot{z}_1$ 是非共振项,可以略去,只有 z_1 对(12)式的共振项有贡献,这样(12)式变成

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{Ufe^2 E_0^2 \omega_0^3 x_0^2}{8m^2 \beta_{//}(1-\beta_{//})c^6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \\ \times \sin \omega_0 t \sin \left[-\frac{\omega_r}{\omega_R} (\omega_0 t - \xi \sin(2\omega_0 t)) + \varphi \right] \frac{\sin \left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \right) + \frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 t \cos \varphi - \sin \varphi}{\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R} \omega_0 \right)^2}, \quad (20)$$

在(0, t)上对上式积分,得

$$\gamma_2 = \frac{Ufe^2 E_0^2 \omega_0^3 x_0^2}{8m^2 \beta_{//}(1-\beta_{//})c^6} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \right)^2$$

$$\times \frac{1 - \cos\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0 t\right) + \frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0 t \cos\varphi \sin\left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0 t\right) + \frac{1}{2}\sin^2\left(\varphi - \frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0 t\right) - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}{\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0\right)^3}, \quad (21)$$

4 小信号增益

自由电子激光的小信号增益为^[6]

$$G(t) = - \frac{\langle \gamma(t) - \gamma_s \rangle mc^2 \rho_e}{(E_0^2/8\pi)}, \quad (22)$$

式中 ρ_e 是电子数密度, $\langle \gamma(t) - \gamma_s \rangle$ 通过对(9)式在 $(0, 2\pi)$ 上对 φ 求平均得到. 对 γ_1 求平均, 得

$$\langle \gamma_1 \rangle = 0. \quad (23)$$

对 γ_2 求平均, 得

$$\langle \gamma_2 \rangle = \frac{Ufe^2 E_0^2 \omega_0^3 x_0^2}{8m^2 \beta_{//} (1 - \beta_{//}) c^6} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1, 2n} - \delta_{f+1, 2n}) \right)^2 g\left(\frac{\delta\omega}{\omega_R}\omega_0 t\right), \quad (24)$$

式中

$$g(u) = \frac{1}{u^3} \left[1 - \cos(u) - \frac{1}{2} u \sin(u) \right],$$

因此, 小信号增益为

$$G(t) = \frac{\pi \rho_e U f e^2 \omega_0^3 x_0^2 t^3}{m \beta_{//} (1 - \beta_{//}) c^4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1, 2n} - \delta_{f+1, 2n}) \right)^2 g(u). \quad (25)$$

忽略纵向振荡时, $\xi=0$, 由于 $J_0(0)=1, J_n(0)=0 (n>0)$, 所以, (25)式中的求和只有 $n=0, f=1$ (谐波) 一项, 即

$$G(t) = \frac{\pi \rho_e U e^2 \omega_0^3 x_0^2 t^3}{m \beta_{//} (1 - \beta_{//}) c^4} g(u). \quad (26)$$

上式与文献[3]的结果((36)式)完全一致.

考虑 $\beta_{//} \approx 1$ 的极限情形, 这时 ω_0, a_w 的定义式^[1,3]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e\beta_{//} P}{m\gamma_s}}, \quad a_w = \frac{\gamma_s \omega_0 x_0}{\sqrt{2} c \beta_{//}},$$

可写成

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{eP}{m\gamma_s}}, \quad \bar{a}_w = \frac{\gamma_s \bar{\omega}_0 x_0}{\sqrt{2} c}, \quad (27)$$

因此

$$1 - \beta_{//} \approx \frac{1 + a_w^2}{2 \gamma_s^2}, \quad (28)$$

$$G(t) = \frac{2\pi\rho_e f e^2 \bar{\omega}_0 a_w^2 t^3}{m\gamma^3} \left(1 + \frac{2}{1 + a_w^2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \right)^2 g(u). \quad (29)$$

为了求得在相互作用区域(设长度为 L_w)出口处的增益,将上式中的时间 t 也展开成 E_0 的幂级数

$$t = t_0 + t_1 + \dots,$$

其中 $t_0 = L_w/(c\beta_{\parallel})$, $t_1 = z_1(t = L_w/(c\beta_{\parallel}))/c\beta_{\parallel}$, 考虑到 E_0 的一级近似,在相互作用长度的终端处, t_1 对 $G(t)$ 的贡献为

$$< t_1 \cdot \dot{\gamma}_1(t = L_w/c\beta_{\parallel}) > \cdot \frac{mc^2 \rho_e}{2E_0^2/8\pi},$$

它是非共振的,因此可以用 $t = L_w/(c\beta_{\parallel})$ 来代替(29)式中的 t ,以求得在相互作用区域出口处的增益,结果为

$$G = \frac{4\pi^2 e^2 a_w^2 L_w^2 \rho_e N_w f}{m\gamma^3 c^2} \left(1 + \frac{2}{1 + a_w^2} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n(f\xi) (\delta_{f-1,2n} - \delta_{f+1,2n}) \right)^2 g(u), \quad (30)$$

式中 $\xi = \frac{a_w^2}{2(1 + a_w^2)}$, $N_w = \bar{\omega}_0 L_w/(2\pi c\beta_{\parallel})$ 是电子在相互作用区域内摆动的周期数.将上式与普通平面摆动器自由电子激光的小信号增益^[8]比较,可以发现,它们是相似的,只是(30)式中多了一个倍乘系数 $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{1 + a_w^2} \right)$. 对(30)式的分析与文献[8]相同,在此不再赘述.

感谢华中师范大学物理系祝家清教授对本文工作的指导.

- [1] S. Pinhas, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-26**(1990), 1332.
- [2] 文双春、游开明、祝家清, *光电子·激光*, **6**(1995), 337.
- [3] S. Pinhas, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-28**(1992), 2567.
- [4] 祝家清、文双春, *中国激光*, **A21**(1994), 693.
- [5] 程 亚、陈建文、朱佩平等, *中国激光*, **A22**(1995), 737.
- [6] S. K. Ride, W. B. Colson, *Appl. Phys.*, **20**(1979), 41.
- [7] 沈永欢、梁在中、许履珊等, *实用数学手册* (科学出版社, 北京, 1992), 第 674 页.
- [8] C. A. Brau, *Free-Electron Lasers* (Academic Press, INC, 1990), p. 105.

HARMONICS IN NOVEL WIGGLER FREE-ELECTRON LASER

WEN SHUANG-CHUN

(*Department of Physics, Hengyang Teachers' College, Hengyang 421008*)

(Received 2 February 1996)

ABSTRACT

A single-particle approach is used to derive the small signal gain for harmonics in the novel wiggler proposed by Pinhas. The results are similar to that in ordinary planar undulator free-electron lasers.

PACC: 4255T