

三维各向同性谐振子的四类升、降算子^{*}

刘宇峰 曾谨言

(北京大学物理系, 北京 100871)

(1996 年 6 月 10 日收到)

用因式分解法求出了三维各向同性谐振子的四类升、降算子, 并讨论了相应的选择定则和守恒量子数.

PACC: 0365

1 引 言

一维谐振子的能量本征方程的因式分解法(factorization method)和升、降算子(raising and lowering operators)概念源于 Schrödinger 的工作^[1,2]. 在很多量子力学著作中已有详细介绍^[3-7]. 在近年来发展起来的超对称量子力学方法^[8-10]中, 又得到进一步应用和发展. 现有的超对称量子力学方法是针对一维体系的, 但也被用来讨论中心力场中粒子的径向方程^[11,12]. 众所周知, 一维规则势阱中束缚态是不简并的^[6,7], 所以只存在一类升、降算子. 而中心力场中粒子的束缚态一般是简并的, 特别是对于具有某种动力学对称性的中心势, 例如库仑势(O_4 对称)和各向同性谐振子势(SU_3 对称), 能级还存在着进一步的简并(l 简并), 因此就存在多种类型的升、降算子. 迄今尚未见有关这方面的系统研究. 本文将分析三维各向同性谐振子的四类升、降算子, 并讨论相应的选择定则和守恒量子数.

2 四类升、降算子

三维各向同性谐振子势 $V(r) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$ 中粒子的能量本征方程(采用球坐标)为

$$H\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hat{l}^2}{2Mr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \right] \psi = E\psi, \quad (1)$$

$\hat{l}$ 为角动量算子, ψ 取为守恒量完全集($H, \hat{l}^2, \hat{l}_z$)的共同本征态, 令

$$\psi = \frac{\chi_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = l, l-1, \dots, -l+1, -l, \quad (2)$$

则 $\chi_l(r)$ 满足下列径向方程(取自然单位 $\hbar = M = \omega = 1$):

$$D(l)\chi_l(r) = \lambda_l \chi_l(r) \quad \lambda_l = -2E, \quad \chi_l(0) = 0 \quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

$$D(l) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - r^2. \quad (4)$$

定义依赖于角动量 l 的算子

$$A_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + r, \quad A_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - r, \quad (5)$$

$$B_+(l) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} - r, \quad B_-(l) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} + r. \quad (6)$$

可以证明,它们满足下列因式分解关系式:

$$A_-(l+1)A_+(l) = D(l) + (2l+3), \quad (7)$$

$$A_+(l-1)A_-(l) = D(l) + (2l-1),$$

$$B_-(l+1)B_+(l) = D(l) - (2l+3), \quad (8)$$

$$B_+(l-1)B_-(l) = D(l) - (2l-1).$$

利用(7),(8)和(3)式,不难证明:

$$D(l)[A_+(l-1)\chi_{l-1}] = (\lambda_{l-1}+2)A_+(l-1)\chi_{l-1}, \quad (9a)$$

$$D(l)[A_-(l+1)\chi_{l+1}] = (\lambda_{l+1}-2)A_-(l+1)\chi_{l+1}, \quad (9b)$$

$$D(l)[B_+(l-1)\chi_{l-1}] = (\lambda_{l-1}-2)B_+(l-1)\chi_{l-1}, \quad (10a)$$

$$D(l)[B_-(l+1)\chi_{l+1}] = (\lambda_{l+1}+2)B_-(l+1)\chi_{l+1}. \quad (10b)$$

由(9a)式可看出,如 χ_{l-1} 是 $D(l-1)$ 的本征态,本征值为 λ_{l-1} , 则 $A_+(l-1)\chi_{l-1}$ 是 $D(l)$ 的本征态,本征值为 $\lambda_{l-1}+2$, 即相应能量(参见(3)式)本征值减小 1. 因此算子 A_+ 的作用是使量子态的角动量 l 增加 1, 同时使能量减小 1.

同样,从(9b)式可看出,算子 A_- 的作用是使角动量 l 减小 1, 同时使能量增加 1. 类似地,从(10)式可看出, B_+ (B_-) 算子的作用是使角动量增加(减小)1, 同时使能量也增加(减小)1. 为了更明显表示算子 A 和 B 的这种性质,不妨把它们改记为

$$A_+(l) \rightarrow A(l\uparrow, N\downarrow) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + r, \quad (11)$$

$$A_-(l) \rightarrow A(l\downarrow, N\uparrow) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} - r,$$

$$B_+(l) \rightarrow B(l\uparrow, N\uparrow) = \frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} - r, \quad (12)$$

$$B_-(l) \rightarrow B(l\downarrow, N\downarrow) = \frac{d}{dr} + \frac{l}{r} + r,$$

式中 N 为标记能量的量子数[见附录, $E = N + 3/2$, $N = l + 2n_r$ ($n_r = 0, 1, 2, \dots$) 为径向波函数的节点数(不包括 $r=0$ 和 $r=\infty$ 点)].

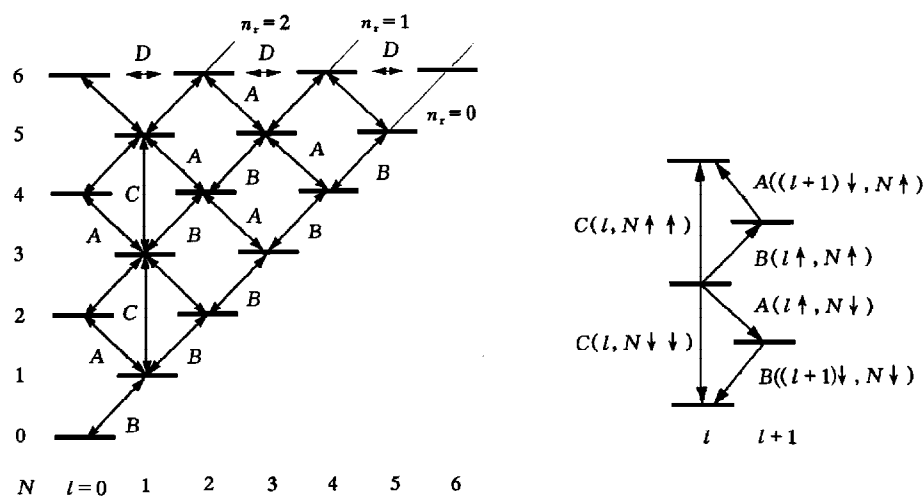
根据算子 A 和 B 的物理意义,可以构造出另外两类算子 C 和 D (见图 1). 利用(11), (12), (3)和(4)式,可以证明

$$A((l+1)\downarrow, N\uparrow)B(l\uparrow, N\uparrow) = D(l) - 2r \frac{d}{dr} + 2r^2 - 1, \quad (13)$$

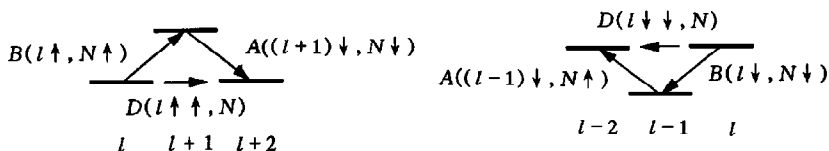
$$B((l+1)\downarrow, N\downarrow)A(l\uparrow, N\downarrow) = D(l) + 2r \frac{d}{dr} + 2r^2 + 1.$$

用(13)式对能量本征态 $|l, N\rangle$ 运算, 得

$$\begin{aligned} A((l+1)\downarrow, N\uparrow)B(l\uparrow, N\uparrow)|l, N\rangle &= -2\left(r\frac{d}{dr} - r^2 + N + 2\right)|l, N\rangle, \\ B((l+1)\downarrow, N\downarrow)A(l\uparrow, N\downarrow)|l, N\rangle &= 2\left(r\frac{d}{dr} + r^2 - N - 1\right)|l, N\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$



(b)



(c)

图 1

根据 A, B 算子的物理意义, 算子 $A((l+1)\downarrow, N\uparrow)B(l\uparrow, N\uparrow)$ 的作用是使 N (能量) 增加 2, 但 l 不变, 而算子 $B((l+1)\downarrow, N\downarrow)A(l\uparrow, N\downarrow)$ 是使 N 减小 2, 但保持 l 不变. 这样就得出下列一类升、降算子:

$$\begin{aligned} C(l, N\uparrow\uparrow) &= r\frac{d}{dr} - r^2 + (N + 2), \\ C(l, N\downarrow\downarrow) &= r\frac{d}{dr} + r^2 - (N + 1). \end{aligned} \quad (15)$$

类似地可以证明

$$\begin{aligned} A((l-1)\downarrow, N\uparrow)B(l\downarrow, N\downarrow) &= D(l) + \frac{2l-1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(2l-1)}{r^2}, \\ A((l+1)\uparrow, N\downarrow)B(l\uparrow, N\uparrow) &= D(l) - \frac{2l+3}{r}\frac{d}{dr} + \frac{(l+1)(2l+3)}{r^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

用(16)式作用于能量本征态 $|l, N\rangle$ 上, 得

$$A((l-1)\downarrow, N\uparrow)B(l\downarrow, N\downarrow)|l, N\rangle = (2l-1)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l}{r^2} - \frac{2N+3}{2l-1}\right]|l, N\rangle,$$

$$A((l+1)\uparrow, N\downarrow)B(l\uparrow, N\uparrow)|l, N\rangle = -(2l+3)\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r^2} + \frac{2N+3}{2l+3}\right]|l, N\rangle. \quad (17)$$

根据算子 A, B 的物理意义, $A((l-1)\downarrow, N\uparrow)B(l\downarrow, N\downarrow)$ 的作用是使角动量 l 减小 2, 但保持能量不变, 而 $A((l+1)\uparrow, N\downarrow)B(l\uparrow, N\uparrow)$ 的作用是使角动量 l 增加 2, 同时保持能量不变. 由此, 可得出另一类升、降算子 D ,

$$D(l\downarrow\downarrow, N) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l}{r^2} - \frac{2N+3}{2l-1}\right),$$

$$D(l\uparrow\uparrow, N) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r^2} + \frac{2N+3}{2l+3}\right). \quad (18)$$

这样就找出了三维各向同性谐振子的四类升、降算子 A, B, C 和 D . 它们相应的选择定则和守恒量子数列于表 1.

表 1

升、降算子	l	n_r	$N = l + 2n_r$	守恒量子数
$A(l\uparrow, N\downarrow)$	$l \rightarrow l+1$	$n_r \rightarrow n_r-1$	$N \rightarrow N-1$	$l + n_r = N - n_r$
$A(l\downarrow, N\uparrow)$	$l \rightarrow l-1$	$n_r \rightarrow n_r+1$	$N \rightarrow N+1$	
$B(l\uparrow, N\uparrow)$	$l \rightarrow l+1$	$n_r \rightarrow n_r$	$N \rightarrow N+1$	n_r
$B(l\downarrow, N\downarrow)$	$l \rightarrow l-1$	$n_r \rightarrow n_r$	$N \rightarrow N-1$	
$C(l, N\uparrow\uparrow)$	$l \rightarrow l$	$n_r \rightarrow n_r+1$	$N \rightarrow N+2$	l
$C(l, N\downarrow\downarrow)$	$l \rightarrow l$	$n_r \rightarrow n_r-1$	$N \rightarrow N-2$	
$D(l\uparrow\uparrow, N)$	$l \rightarrow l+2$	$n_r \rightarrow n_r-1$	$N \rightarrow N$	N
$D(l\downarrow\downarrow, N)$	$l \rightarrow l-2$	$n_r \rightarrow n_r+1$	$N \rightarrow N$	

应该提到, 根据径向方程(3)的合流超几何函数解的递推关系^[13], 也可直接找出算子 C 和 D 的表示式(15)和(18)(见附录).

考虑到算子 $A(l\uparrow, N\downarrow)$ 的作用, 而 n_r 的极小值为零(见附录), 可以看出(见图 1 和表 1)

$$A(l\uparrow, N\downarrow)\chi_{l, n_r=0} = \left(\frac{d}{dr} - \frac{l+1}{r} + r\right)\chi_{l,0}(r) = 0. \quad (19)$$

解之可得出 $n_r=0$ 的所有径向波函数

$$\chi_{l,0} \sim r^{l+1}e^{-r^2/2} \quad l = 0, 1, 2, \dots. \quad (20)$$

用 $A((l+1)\downarrow, N\uparrow)$ 对(19)式运算, 利用(7)式, 得

$$[D(l) + (2l+3)]\chi_{l,0} = [\lambda_{l,0} + (2l+3)]\chi_{l,0} = 0,$$

所以 $\lambda_{l,0} = -(2l+3)$, 即

$$E_{l, n_r=0} = l + 3/2 \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

这是 $E = N + 3/2$ 的特殊情况($n_r=0, N=l$)(见附录).

从 $\chi_{l,0}(l=1, 2, \dots)$ 出发, 依次用 $A(l\downarrow, N\uparrow), A((l-1)\downarrow, N\uparrow), \dots$ 运算, 可得 $\chi_{l-1,1}, \chi_{l-2,2}, \dots, \chi_{0,l}$. 这样即可求出所有径向波函数.

附 录

根据方程(3)的解在 $r \rightarrow 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 的渐近行为,可以令^[6,7] $\chi_l(r) = r^{l+1}e^{-r^2/2}u(r)$, $u(r)$ 满足

$$u'' + \frac{2}{r}(l+1-r^2)u' - (\lambda_l + 2l+3)u = 0. \quad (\text{A1})$$

令 $\xi = r^2$, 上式化为合流超几何方程

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + [l+3/2-\xi] \frac{du}{d\xi} - \frac{1}{4}[\lambda_l + 2l+3]u = 0. \quad (\text{A2})$$

满足 $\chi_l(0)=0$ 的解,可表成合流超几何函数 $F(\alpha, \gamma, r^2)$, 其中

$$\alpha = \frac{1}{4}(\lambda_l + 2l+3), \quad \gamma = l+3/2. \quad (\text{A3})$$

对于束缚态,要求 F 中断为一个多项式,即要求 $\alpha = -n_r$ ($n_r = 0, 1, 2, \dots$). 由此得出 $E = (l+2n_r) + 3/2$, 或记为

$$E = E_N = N + 3/2 \quad N = l + 2n_r = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A4})$$

相应的本征函数(径向)为

$$\chi_{l, n_r}(r) \sim r^{l+1}e^{-r^2/2}F(-n_r, l+3/2, r^2). \quad (\text{A5})$$

对给定的能级(N),简并度为 $f_N = (N+1)(N+2)/2$.

利用合流超几何函数的微商公式和基本递推关系^[13]

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{d}{dx}F(\alpha, \gamma, x) = \frac{\alpha}{\gamma}F(\alpha+1, \gamma+1, x), \\ (2) \quad & (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \gamma, x) - \alpha F(\alpha+1, \gamma, x) = (\gamma-2\alpha-x)F(\alpha, \gamma, x), \\ (3) \quad & \gamma(\gamma-1)F(\alpha, \gamma-1, x) + (\gamma-\alpha)x F(\alpha, \gamma+1, x) = \gamma(\gamma-1+x)F(\alpha, \gamma, x), \\ (4) \quad & \gamma F(\alpha-1, \gamma, x) + x F(\alpha, \gamma+1, x) = \gamma F(\alpha, \gamma, x), \\ (5) \quad & (\gamma-1)F(\alpha, \gamma-1, x) - \alpha F(\alpha+1, \gamma, x) = (\gamma-\alpha-1)F(\alpha, \gamma, x), \\ (6) \quad & (\gamma-\alpha)x F(\alpha, \gamma+1, x) + \alpha \gamma F(\alpha+1, \gamma, x) = \gamma(\alpha+x)F(\alpha, \gamma, x), \\ (7) \quad & (\gamma-1)F(\alpha, \gamma-1, x) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \gamma, x) = (\alpha-1+x)F(\alpha, \gamma, x), \end{aligned}$$

可导出下列递推关系:

$$\begin{aligned} (8) \quad & \gamma F(\alpha+1, \gamma, x) - x F(\alpha+1, \gamma+1, x) = \gamma F(\alpha, \gamma, x), \\ (9) \quad & \gamma(\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \gamma, x) - \alpha x F(\alpha+1, \gamma+1, x) = \gamma(\gamma-\alpha-x)F(\alpha, \gamma, x), \\ (10) \quad & (\gamma-\alpha)F(\alpha, \gamma+1, x) + \alpha F(\alpha+1, \gamma+1, x) = \gamma F(\alpha, \gamma, x), \\ (11) \quad & \gamma(\gamma-1)F(\alpha, \gamma-1, x) - \alpha x F(\alpha+1, \gamma+1, x) = \gamma(\gamma-1)F(\alpha, \gamma, x). \end{aligned}$$

利用这些公式可以证明

$$\left[2\alpha + x \frac{d}{dx}\right]F(\alpha, \gamma, x^2) = 2\alpha F(\alpha+1, \gamma, x^2), \quad (\text{A6})$$

$$\left[2(\gamma-\alpha-x^2) + x \frac{d}{dx}\right]F(\alpha, \gamma, x^2) = 2(\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \gamma, x^2), \quad (\text{A7})$$

$$\left[-\frac{2\alpha}{\gamma} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right]F(\alpha, \gamma, x^2) = \frac{2\alpha(\gamma-\alpha)}{\gamma^2(\gamma+1)}x^2 F(\alpha+1, \gamma+2, x^2), \quad (\text{A8})$$

$$\left[2(\gamma-1) - \frac{2(\gamma-\alpha-1)}{\gamma-2}x^2 + x \frac{d}{dx}\right]F(\alpha, \gamma, x^2) = 2(\gamma-1)F(\alpha-1, \gamma-2, x^2). \quad (\text{A9})$$

由(A6)–(A9)式即可导出算子 C 和 D 的表示式(15)和(18).

- [1] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **A46**(1940), 9; **A46**(1941), 183; **A47**(1942), 53.
- [2] L. Infeld and T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.*, **23**(1951), 21.
- [3] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 3rd. ed. (Oxford University Press, 1947), Chap. 6.
- [4] D. Bohm, *Quantum Theory* (Constable, London, 1954), Chap. 13.

- [5] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd. ed. (McGraw-Hill, 1967), p. 182.
- [6] L. D. Landau and M. E. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, 1977), p. 126.
- [7] 曾谨言, 量子力学, 卷 I (科学出版社, 北京, 1990), 第 393 页.
- [8] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Phys. Rep.*, **251** (1995), 267.
- [9] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B185** (1981), 513; F. Cooper and B. Freedman, *Ann. Phys.*, **146** (1983), 262.
- [10] L. Gendenshtein, *JETP Lett.*, **38** (1983), 356; F. Cooper, J. Ginocchio and A. Khare, *Phys. Rev.*, **D36** (1987), 2458.
- [11] V. A. Kosteletzky and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984), 2285.
- [12] R. W. Haymaker and A. R. P. Rau, *Am. J. Phys.*, **54** (1986), 928; A. R. P. Rau, *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986), 95; V. A. Kosteletzky and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986), 96.
- [13] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论 (科学出版社, 北京, 1979), 第 330, 370 页.

FOUR KINDS OF RAISING AND LOWERING OPERATORS OF A THREE-DIMENSIONAL ISOTROPIC HARMONIC OSCILLATOR

LIU YU-FENG ZENG JIN-YAN

(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871)

(Received 10 June 1996)

ABSTRACT

Using the factorization method, four kinds of raising and lowering operators of a three-dimensional isotropic harmonic oscillator were derived and the corresponding selection rules and conserved quantum numbers were discussed.

PACC: 0365