

二维各向同性谐振子的四类升、降算子^{*}

刘宇峰 曾谨言

(北京大学物理系, 北京 100871)

(1996 年 7 月 8 日收到)

用因式分解法求出了二维各向同性谐振子的四类升、降算子. 它们与三维各向同性谐振子的升、降算子有很大的相似性. 讨论了相应的选择定则和守恒量子数.

PACC: 0365

1 引 言

文献[1]中, 我们用因式分解法^[2,3]找出了三维各向同性谐振子的四类升、降算子. 本文将研究二维各向同性谐振子的四类升、降算子. 它们与三维各向同性谐振子有很大的相似性. 二维各向同性谐振子是低维物理中感兴趣的课题. 带电粒子在恒定均匀的外磁场中的能量本征值问题(Landau 能级^[4]), 就与二维各向同性谐振子问题有密切的关系. 所以二维各向同性谐振子有其特殊的重要性.

2 四类升、降算子

二维中心力场 $V(\rho)$ 中粒子的能量本征方程(平面极坐标)为

$$H\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + V(\rho) \right\} \psi = E\psi. \quad (1)$$

取 ψ 为守恒量完全集 $\left(H, l_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$ 的共同本征态, 令

$$\psi = \frac{\chi_m(\rho)}{\sqrt{\rho}} e^{im\phi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

则 $\chi_m(\rho)$ 满足下列径向方程:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{4\rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + V(\rho) \right] \chi_m(\rho) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m-1/2)(m+1/2)}{\rho^2} \right) + V(\rho) \right] \chi_m(\rho) \\ &= E\chi_m(\rho). \end{aligned} \quad (3)$$

注意: 方程中只出现 m^2 . 与三维中心力场中粒子的径向方程比较,

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] \chi_l(r) = E \chi_l(r), \quad (4)$$

参数对应关系为

$$l(l+1) \leftrightarrow (m-1/2)(m+1/2) = (|m|-1/2)(|m|+1/2). \quad (5)$$

因此二维中心力场中粒子的径向波函数的性质可从三维中心力场中的径向波函数类比而得出(详见文献[5]第300—306页).

对于二维各向同性谐振子, $V(\rho) = \frac{1}{2} M \omega^2 \rho^2$, 径向方程(取自然单位 $\hbar = M = \omega = 1$)可表示为

$$\begin{aligned} D(m) \chi_m(\rho) &= \lambda_m \chi_m(\rho) \quad \lambda_m = -2E, \\ D(m) &\equiv \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{(m-1/2)(m+1/2)}{\rho^2} = \rho^2. \end{aligned} \quad (6)$$

先讨论 $m \geq 0$ 的情况(由此可自然延拓到 $m \leq 0$ 的情况). 与三维各向同性谐振子相似, 可定义两类升、降算子,

$$A_+(m) = \frac{d}{d\rho} - \frac{m+1/2}{\rho} + \rho, \quad A_-(m) = \frac{d}{d\rho} + \frac{m-1/2}{\rho} - \rho, \quad (7)$$

$$B_+(m) = \frac{d}{d\rho} - \frac{m+1/2}{\rho} - \rho, \quad B_-(m) = \frac{d}{d\rho} + \frac{m-1/2}{\rho} + \rho. \quad (8)$$

可以证明, 它们满足下列因式分解关系式:

$$A_-(m+1) A_+(m) = D(m) + 2(m+1), \quad (9)$$

$$A_+(m-1) A_-(m) = D(m) + 2(m-1),$$

$$B_-(m+1) B_+(m) = D(m) - 2(m+1), \quad (10)$$

$$B_+(m-1) B_-(m) = D(m) - 2(m-1).$$

利用(9), (10)和(6)式, 可以证明

$$D(m) [A_+(m-1) \chi_{m-1}] = (\lambda_{m-1} + 2) A_+(m-1) \chi_{m-1}, \quad (11a)$$

$$D(m) [A_-(m+1) \chi_{m+1}] = (\lambda_{m+1} - 2) A_-(m+1) \chi_{m+1}, \quad (11b)$$

$$D(m) [B_+(m-1) \chi_{m-1}] = (\lambda_{m-1} - 2) B_+(m-1) \chi_{m-1}, \quad (12a)$$

$$D(m) [B_-(m+1) \chi_{m+1}] = (\lambda_{m+1} + 2) B_-(m+1) \chi_{m+1}. \quad (12b)$$

从(11a)式可以看出, 如 χ_{m-1} 是 $D(m-1)$ 的本征态, 本征值为 λ_{m-1} , 则 $A_+(m-1) \chi_{m-1}$ 是 $D(m)$ 的本征态, 本征值为 $\lambda_{m-1} + 2$, 即相应能量 E (参见(6)式)本征值减小 1. 因此算子 A_+ 的作用在于使量子态的角动量 m 增加 1, 同时使能量减小 1. 类似地, 从(11b)式可看出算子 A_- 的作用是使 m 减小 1, 同时使能量增加 1. 从(12)式可知 B_+ (B_-) 算子的作用在于使 m 增加(减小) 1, 同时使能量也增加(减小) 1. 根据 A, B 算子的这种性质, 不妨把它们改记为

$$\begin{aligned} A_+(m) &\rightarrow A(m \uparrow, N \downarrow) = \frac{d}{d\rho} - \frac{m+1/2}{\rho} + \rho, \\ A_-(m) &\rightarrow A(m \downarrow, N \uparrow) = \frac{d}{d\rho} + \frac{m-1/2}{\rho} - \rho, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 B_+(m) \rightarrow B(m \uparrow, N \uparrow) &= \frac{d}{d\rho} - \frac{m+1/2}{\rho} - \rho, \\
 B_-(m) \rightarrow B(m \downarrow, N \downarrow) &= \frac{d}{d\rho} + \frac{m-1/2}{\rho} + \rho,
 \end{aligned} \quad (14)$$

式中 N 是标记能量的量子数.(见附录, $E = N + 1$, $N = |m| + 2n_\rho$, $n_\rho = 0, 1, 2, \dots$ 是径向波函数的节点数($\rho=0, \infty$ 点除外).)

根据与三维各向同性谐振子中相似的道理,按 A, B 的物理意义,可以构造出另外两类算子 C 和 D (见图 1):

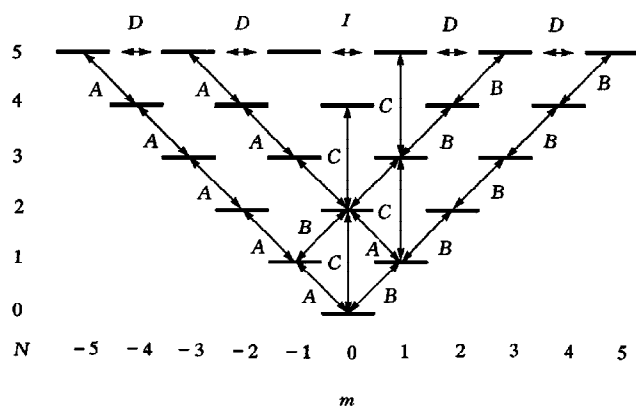


图 1

$$C(m, N \uparrow \uparrow) = \rho \frac{d}{d\rho} - \rho^2 + N + 3/2, \quad (15)$$

$$C(m, N \downarrow \downarrow) = \rho \frac{d}{d\rho} + \rho^2 - N - 1/2,$$

$$D(m \downarrow \downarrow, N) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{m-1/2}{\rho^2} - \frac{N+1}{m-1}, \quad (16)$$

$$D(m \uparrow \uparrow, N) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m+1/2}{\rho^2} + \frac{N+1}{m+1}.$$

考虑到径向方程(3)中只出现 $|m|$, 径向波函数 $\chi_{-m, n_\rho} = \chi_{m, n_\rho}$, 可把以上所述的升、降算子的表示式延拓到 $m \leq 0$ 情况. 此时算子 C 的形式不变, 而 A 与 B 有下列关系:

$$A((-m) \downarrow, N \uparrow) = B(m \uparrow, N \uparrow), \text{ 或 } B((-m) \uparrow, N \uparrow) = A(m \downarrow, N \uparrow),$$

$$A((-m) \uparrow, N \downarrow) = B(m \downarrow, N \downarrow), \text{ 或 } B((-m) \downarrow, N \downarrow) = A(m \uparrow, N \downarrow).$$

(17)

而对算子 D , 有

$$D((-m) \uparrow \uparrow, N) = D(m \downarrow \downarrow, N) \quad m \neq \pm 1. \quad (18)$$

对于 $m = \pm 1$, 考虑到 $\chi_{-1, n_\rho} = \chi_{1, n_\rho}$, 所以可取

$$D((-1) \uparrow \uparrow, N) = D(1 \downarrow \downarrow, N) = 1. \quad (19)$$

这样, 我们就给出了二维各向同性谐振子的四类升、降算子 A, B, C, D 的表示式. 它

们相应的选择定则和守恒量子数见表 1.

表 1

升、降算子	m	n_ρ	$N = m + 2n_\rho$	守恒量子数
$A(m \uparrow, N \downarrow)$	$m \rightarrow m + 1$	$n_\rho \rightarrow n_\rho - 1$	$N \rightarrow N - 1$	$ m + n_\rho, N - n_\rho$
$A(m \downarrow, N \uparrow)$	$m \rightarrow m - 1$	$n_\rho \rightarrow n_\rho + 1$	$N \rightarrow N + 1$	
$B(m \uparrow, N \uparrow)$	$m \rightarrow m + 1$	$n_\rho \rightarrow n_\rho$	$N \rightarrow N + 1$	
$B(m \downarrow, N \downarrow)$	$m \rightarrow m - 1$	$n_\rho \rightarrow n_\rho$	$N \rightarrow N - 1$	n_ρ
$C(m, N \uparrow \uparrow)$	$m \rightarrow m$	$n_\rho \rightarrow n_\rho + 1$	$N \rightarrow N + 2$	m
$C(m, N \downarrow \downarrow)$	$m \rightarrow m$	$n_\rho \rightarrow n_\rho - 1$	$N \rightarrow N - 2$	
$D(m \uparrow \uparrow, N)$	$m \rightarrow m + 2$	$n_\rho \rightarrow n_\rho - 1$	$N \rightarrow N$	N
$D(m \downarrow \downarrow, N)$	$m \rightarrow m - 2$	$n_\rho \rightarrow n_\rho + 1$	$N \rightarrow N$	

附 录

二维各向同性谐振子的径向方程(取自然单位 $\hbar = M = \omega = 1$)可表示为

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{4\rho^2} - \frac{m^2}{\rho^2} - \rho^2 \right] \chi_m(\rho) = \lambda_m \chi_m(\rho) \quad \lambda_m = -2E, \quad \chi_m(0) = 0.$$

(A1)

考虑到解在 $\rho \rightarrow 0$ 和 $\rho \rightarrow \infty$ 的渐近行为^[5], 令

$$\chi_m(\rho) = \rho^{|m|+1/2} e^{-\rho^2/2} u,$$

(A2)

则 u 满足

$$u'' + \left(\frac{2|m|+1}{\rho} - 2\rho \right) u' - (\lambda_m + 2|m|+2) u = 0.$$

(A3)

令 $\xi = \rho^2$, 上式化为合流超几何方程

$$\xi \frac{d^2 u}{d\xi^2} + (|m|+1-\xi) \frac{du}{d\xi} - \left(\frac{|m|+1}{2} + \frac{\lambda_m}{4} \right) u = 0.$$

(A4)

满足 $\chi_m(0) = 0$ 的解, 可表成合流超几何函数 $F(\alpha, \gamma; \rho^2)$, 其中

$$\alpha = \frac{|m|+1}{2} + \frac{\lambda_m}{4}, \quad \gamma = |m|+1.$$

(A5)

对于束缚态, 要求 F 中断为一个多项式, 即要求 $\alpha = -n_\rho$ ($n_\rho = 0, 1, 2, \dots$), 即 $\lambda_m = -2(|m|+1) - 4n_\rho$, $E = |m|+1 + 2n_\rho$, 或记为

$$E = E_N = N + 1, \quad N = |m| + 2n_\rho = 0, 1, 2, \dots$$

(A6)

对于给定的能级 E_N , $|m| = N, N-2, \dots, 1$ (N 为奇数) 或 0 (N 为偶数), 简并度 $f_N = N+1$.

[1] 刘宇峰、曾谨言, 物理学报, **46**(1997), 417.

[2] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **A46**(1940), 9; **A46**(1941), 183; **A47**(1942), 53.

[3] L. Infeld and T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.*, **23**(1951), 21.

[4] L. D. Landau and M. E. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, 1977), p. 465.

[5] 曾谨言, 量子力学, 卷 I(科学出版社, 北京, 1990).

FOUR KINDS OF RAISING AND LOWERING OPERATORS OF A TWO-DIMENSIONAL ISOTROPIC HARMONIC OSCILLATOR

LIU YU-FENG ZENG JIN-YAN

(*Department of Physics, Peking University, Beijing 100871*)

(Received 8 July 1996)

ABSTRACT

Using the factorization method, four kinds of raising and lowering operators of a two-dimensional isotropic harmonic oscillator were derived, and the corresponding selection rules and conserved quantum numbers were discussed.

PACC: 0365