

CA 交通流模型的演化方程 与转向概率效应^{*}

吕晓阳

(华南师范大学行政学院, 广州 510631)

陈若航 刘慕仁 孔令江

(广西师范大学物理系, 桂林 541001)

(1996 年 4 月 9 日收到)

给出了二维 CA 交通流模型的演化方程和速度表达式. 引入转向概率, 在计算机上模拟了转向概率引起交通堵塞现象的临界密度和对交通状态的影响.

PACC: 0540

1 引 言

近年来, 交通流理论的研究显得日益重要^[1]. 细胞自动机 (cellular automaton, 简称 CA) 是只考虑近邻局部相互作用的, 而空间和时间完全离散的并行计算机模型. CA 已较为成功地仿真了某些复杂的物理系统^[2,3], 并已被应用于交通流理论的研究中. 最近, Biham 设计了一种简单的二维 CA 模型来模拟城市的交通流现象^[4], 以四方格子网格线和格点来代表道路和交叉口, 格点上以箭头的指向表示车辆的运动方向 (无箭头表示该格点上无车辆), 交通灯管制体现在奇数时步演化向上的箭头、偶数时步演化向右的箭头. 车辆的运动按如下规则演化: 偶数时步为对所有右行车 (右箭头) 的演化, 而所有上箭头都不动, 如果右箭头前方最近邻格点上无任何障碍 (包括 1. 上箭头; 2. 上时刻已经存在的右箭头), 则它可以移动到最近邻的前方格点上, 而奇数时步只对上行车进行演化, 演化规则与上相似. 计算机模拟显示, 对于这样一个模型, 存在一个临界密度 ρ_c ^[4], 当车辆密度小于 ρ_c 时, 车辆在交替的时步中是可以运动的; 当车辆密度等于或大于 ρ_c 时, 经过一定的演化时步后, 所有的车辆均不能运动, 即发生交通堵塞现象 (traffic jam). Nagatani^[5,6] 和 Chung^[7] 扩展了这一模型, 得到了一些有意义的结果.

为了提高演化的速度和对模型进行理论分析, 本文给出了 Biham 模型演化的布尔变量方程及速度的表示式, 并在 Biham 模型的基础上, 引入了转向概率, 以考虑车辆受阻时以一定的概率转向时演化的布尔变量方程, 在计算机上模拟了一条主干道上存在单一转向、两个方向转向及网格中所有格点上允许有两个方向转向的转向概率对交通流的影响, 从而给出了形成滞流与转向概率及与车辆密度的关系.

^{*} 国家自然科学基金资助的课题.

2 Biham CA 交通流模型的演化方程

假定在 $L \times L$ 的四方格子上以密度 ρ_0 随机地分布右箭头和上箭头, 东西、南北满足周期性边界条件, 设布尔变量 $e(i, j, t)$, $n(i, j, t)$, $s(i, j, t)$ 分别代表 t 时刻格点 (i, j) 向右、向上及是否有车辆的状态, 其定义为

$$\begin{aligned} e(i, j, t) &= \begin{cases} 1(\text{存在右箭头}) \\ 0(\text{不存在}), \end{cases} \\ n(i, j, t) &= \begin{cases} 1(\text{存在上箭头}) \\ 0(\text{不存在}), \end{cases} \\ s(i, j, t) &= \begin{cases} 1(\text{存在右或上箭头}) \\ 0(\text{不存在}), \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

$e(i, j, t)$ 与 $n(i, j, t)$ 满足排斥方程:

$$e(i, j, t) \cdot n(i, j, t) = 0, \quad (2)$$

$s(i, j, t)$ 可表示为 $e(i, j, t)$ 与 $n(i, j, t)$ 的布尔和:

$$s(i, j, t) = e(i, j, t) + n(i, j, t). \quad (3)$$

Biham 演化规则可表示成一组布尔方程:

偶数时步: $t \bmod 2 \equiv 0$.

$$e(i, j, t) = \bar{s}(i, j, t-1)e(i, j-1, t-1) + e(i, j, t-1)s(i, j+1, t-1), \quad (4)$$

$$n(i, j, t) = n(i, j, t-1).$$

奇数时步: $t \bmod 2 \equiv 1$.

$$e(i, j, t) = e(i, j, t-1), \quad (5)$$

$$n(i, j, t) = \bar{s}(i, j, t-1)n(i-1, j, t-1) + n(i, j, t-1)s(i+1, j, t-1).$$

(4)和(5)式中 $\bar{s}$ 表示 s 的补, 均为布尔运算. 周期性边界条件可表示为

$$n(L+1, j, t) = n(1, j, t), \quad e(i, L+1, t) = e(i, 1, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, L. \quad (6)$$

交通速度定义为

$$U = \text{可移动的箭头数} / \text{箭头总数} = 1/2(U_x + U_y), \quad (7)$$

其中 U_x 表示 x 方向的速度, 它可表示为

$$U_x = \sum_{i,j} (|e(i, j, t) - e(i, j, t-1)|) / 2N_x, \quad t \bmod 2 \equiv 0.$$

而 $N_x = \rho_x \times L \times L$, 将(4)式代入, 得

$$\begin{aligned} U_x(t) &= \sum_{i,j} (|\bar{s}(i, j, t-1)e(i, j-1, t-1) - \bar{s}(i, j+1, t-1)e(i, j, t-1)|) / 2N_x, \\ &t \bmod 2 \equiv 0, \end{aligned} \quad (8)$$

同样可得 y 方向的速度 U_y .

在此模型中取 $\rho_x = \rho_y = \rho_0$, 其中 ρ_0 为初始分布密度, 当 (i, j) 格点所有的箭头在 t 时刻均能移动时, $U = 1$. 如果 (i, j) 格点所有的箭头在 t 时刻均不能移动时, $U = 0$. 这就是前面所说的发生交通堵塞现象, 此时的密度 ρ_0 为临界密度 ρ_c . 可见速度 U 描述了整个格子的宏观行为.

方程(4)–(8)即为描述 Biham 二维 CA 交通流模型的布尔变量演化方程组. 利用该方程组可方便地给出并行演化算法, 提高模拟效率.

3 存在转向概率的 CA 交通流模型

在 Biham 模型的基础上, 我们增加一个随机性转向规则:

在奇数时步时, 所有的上箭头按 Biham 规则演化, 对于右箭头, 若满足下列条件之一: 1. 右边最近邻格点存在右箭头; 2. 右边最近邻格点存在上箭头, 而该上箭头在同一时步是不能移动的. 同时它的上边最近邻格点没有箭头占据, 则该右箭头以概率 $P_{x \rightarrow y}$ 转向, 成为上箭头, 即作为上箭头移动一步.

该规则可用图 1 表示, 其中若格点为空, 标以 $\circ$, 格点被占据, 标以 $\odot$, 任意态, 标以 $\bullet$.

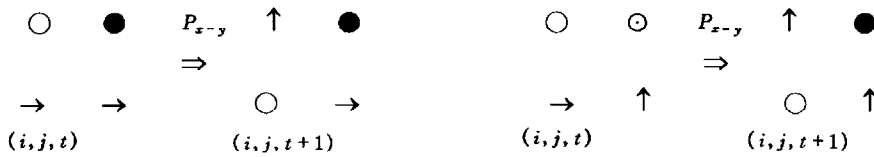


图 1 奇数时步, 格点 (i, j) 右箭头以概率 $P_{x \rightarrow y}$ 转为上边格点上箭头的各种情况

在偶数时步, 同样右箭头按 Biham 规则演化, 而上箭头若满足如图 2 所示情况之一, 则以 $P_{y \rightarrow x}$ 的概率转向, 变成右箭头往右移动一格.



图 2 偶数时步, 格点 (i, j) 上箭头以概率 $P_{y \rightarrow x}$ 转为右边格点右箭头的各种情况

本文所讨论的情形分为以下两类:

一类情形为格点 (i, j) 遇上与图 1 所定义的情况时, 则车辆以概率 $P_{x \rightarrow y}$ 发生转向, 转向条件的布尔表示为

$$T_{x \rightarrow y} = e(i, j, t) \bar{s}(i+1, j, t) (e(i, j+1, t) + n(i, j+1, t) s(i+1, j+1, t)), \\ (t+1) \bmod 2 \equiv 1, \quad (9)$$

所以在奇数时步, 存在转向的概率为 $P_{x \rightarrow y} \times T_{x \rightarrow y}$, 与 Biham 模型相比, 由于考虑了次近邻对格点的影响, 因此这种情况更接近真实交通状况.

另一类情形是在格点 (i, j) 上可以发生图 1 和图 2 所示的转向行为, 这时就需进一步考虑 $T_{y \rightarrow x}$:

$$T_{y \rightarrow x} = n(i, j, t) \bar{s}(i, j+1, t) (n(i+1, j, t) + e(i+1, j, t) s(i+1, j+1, t)),$$

$$(t+1) \bmod 2 \equiv 0. \quad (10)$$

这种情形下同样考虑了次近邻对格点的影响.

4 模拟结果与讨论

我们按方程(4),(5)和(9),(10)在计算机上进行了模拟.选取从南往北位于格子东西向的中线为主干道,该主干道的车辆遵守 Biham 及图 1 的转向规则.模拟结果表明:当随

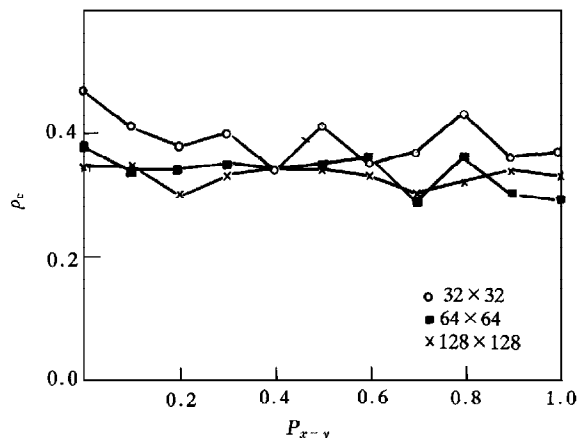
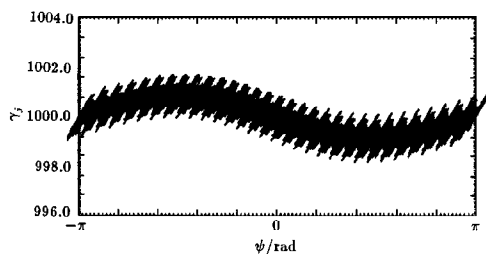


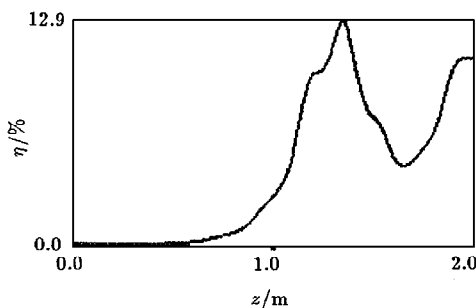
图3 不同格子大小的 ρ_c - P_{x-y} 曲线图

机分布初始密度小于临界密度时,格点上的车辆处于活动态,但由于转向概率 P_{x-y} 的存在,使得在相同格点数(格子尺寸)下发生交通堵塞时,车辆的临界密度下降.图3给出三种尺寸格子发生交通堵塞的临界密度值 ρ_c 随 P_{x-y} 的变化,其中 $P_{x-y}=0$ 时的 ρ_c 值取自文献[4].从图3还可看到,随着 P_{x-y} 的增加, ρ_c - P_{x-y} 曲线存在波动,若将格子尺寸增加,这种波动相对小一些.图4(a)和(b)是 $L=64$, $\rho_0=0.345$, $P_{x-y}=0.5$, $P_{y-x}=0$ 的两个典型的位形演化图,其中(a)是演化2000步时的位形图,(b)

是最后达到堵塞状态的位形图.



(a)单一转向演化2000步时($U_x=0.72$, $U_y=0.74$)的位形图



(b)单一转向演化4782步时($U_x=U_y=0$)的位形图

4 两个典型的位形演化图 $L \times L = 64 \times 64$, $\rho_0 = 0.345$

如果在主干道上再附加满足条件(图 2)的转向概率 P_{y-x} , 计算机模拟的结果如图 5(a)所示, 从图中可看出, 当在主干道上存在 $P_{x-y} = P_{y-x}$ 的等概率转向时, 临界密度 ρ_c 比在主干道只存在 P_{x-y} 时的临界密度提高了, 且当 $P_{x-y} = P_{y-x}$ 在 0.3 至 0.7 之间时, 临界密度基本保持在 $\rho_c = 0.41$ 不变. 从理论上分析, 由于在主干道上存在等概率的两种转向行为 ($P_{x-y} = P_{y-x}$), 因而 ρ_c 具有统计不变性. 当保持 P_{x-y} 不变, ρ_c 随 P_{y-x} 变化曲线如图 5(b)所示, 这时的临界密度随 P_{y-x} 的变化趋势与存在等概率的两种转向的临界密度变化趋势是相似的.

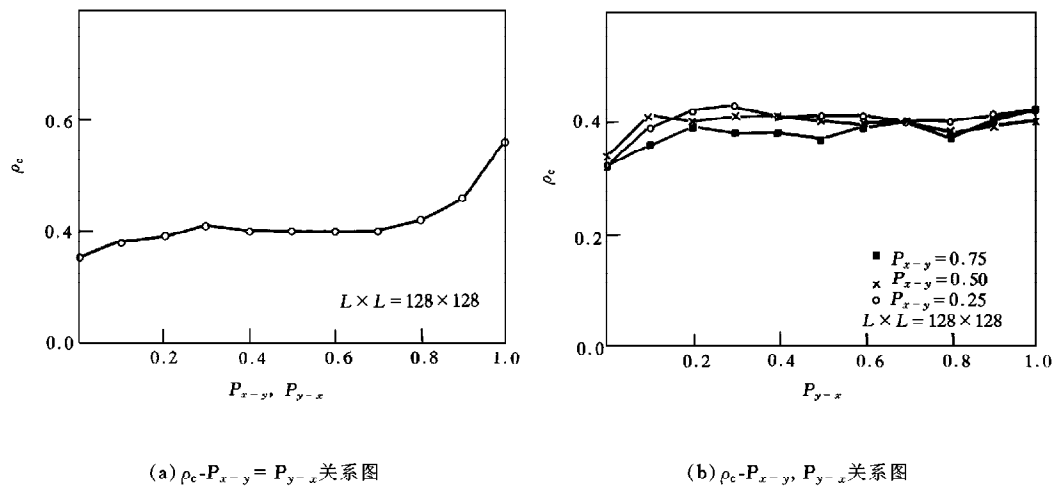
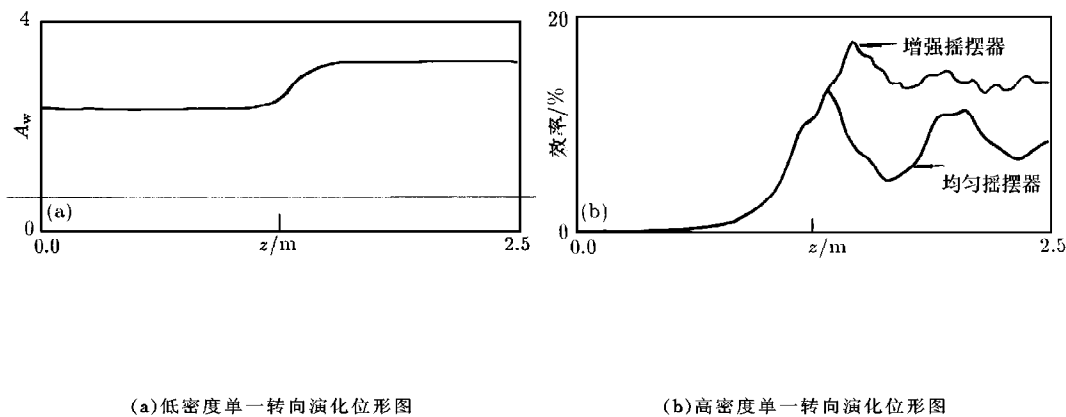
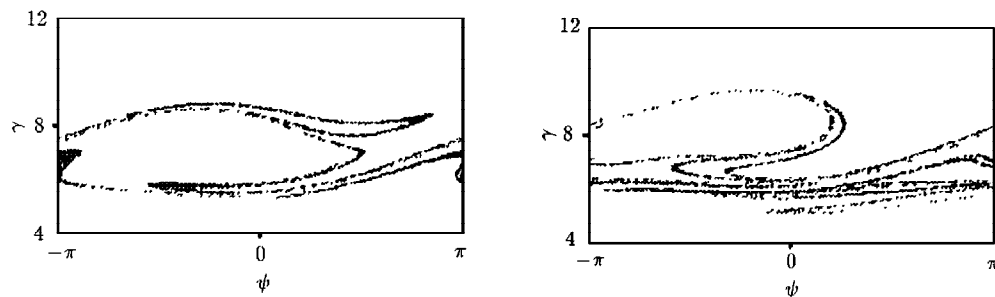


图 5

图 6 单一转向演化位形图 $L \times L = 64 \times 64$

总之, 在主干道上存在两个方向的转向概率时的 ρ_c 比只存在单一转向时提高了. 从位形演化图也可看出, 存在一条南北主干道时的交通堵塞, 主要是由于当东西方向的车辆受阻时, 以一定概率转向主干道, 而使主干道车辆密度增大, 首先形成南北主干道上的滞

流,从而进一步造成整个网络的交通堵塞现象.若在这种情况下加入转向概率 P_{y-x} ,可以起到分流作用,相应地提高了临界密度 ρ_c 值.



(a)低密度两个方向转向演化 10000 时步的位形图 ($U_x = 0.95, U_y = 0.98$) (b)高密度两个方向转向演化 10000 时步的位形图 ($U_x = 0.34, U_y = 0.35$)

图 7 两个方向转向演化位形图 $L \times L = 64 \times 64$, $\rho_0 = 0.25$ (a); 0.75 (b)

在所有的格点均可发生图 1 和图 2 所示的转向时,首先考虑只有 P_{x-y} ($P_{y-x} = 0$) 的情形,给定初始密度 ρ_0 ,当初始密度较小时,所有车辆都能运动.图 6(a)为这种演化的位形图,其中 $\rho_0 = 0.25$,演化时步为 10000, $U_x = 1.000$, $U_y = 1.000$.当初始密度较大时,经过一定的演化时步后格点上向右运动的车辆转向南北方向,而形成高密度的堵塞区(车辆不能运动)和低密度的交通区(车辆能运动),其演化的位形如图 6(b)所示,其中 $\rho_0 = 0.75$,演化时步为 10000, $U_x = 0$, $U_y = 0.196$.其次,我们考虑在所有的格点上均存在

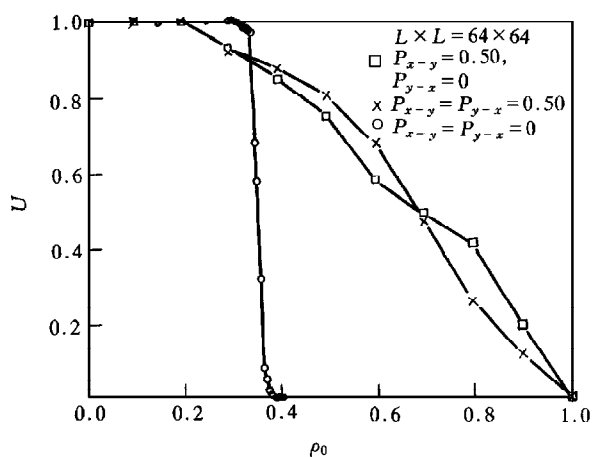


图 8 U - ρ_0 关系图

$P_{x-y} = P_{y-x}$ 的转向概率时,模拟实验显示了与上一种情况相似的结果,当车辆的初始密度较小时,网格上的大部分车辆都处于运动态,而当车辆的初始密度较大时,同样出现高密度的堵塞区和低密度的交通区相间隔的情形,其演化的位形如图 7(a) 和 (b) 所示.在这两种情况下,交通速度随车辆密度增加而逐渐接近于零,当车辆的初始密度等于 1 时, $U_x = U_y = 0$, 车辆全部被堵塞.

图 8 给出交通速度 U 随 ρ_0 的变化关系,可见在所有格点存在单

一转向或两种转向时,其临界密度为 1.

综上所述,我们给出一组描述二维 CA 交通流模型的布尔函数方程组,给定随机分布的初始密度 ρ_0 , 格点上的状态分奇、偶时步按 Biham 规则同步更新. 由于对于给定的 ρ_0 , 存在许多对应的初始分布位形, 从而难以确定网格的一个具体终态, 用(7)式定义的速度描述整个网格的宏观行为比较恰当. 在车辆受阻时做适当的转向可以局部地加快车辆的流通, 但在典型的南北主干道上的单一转向行为将降低临界密度. 同时允许有两种转向, 提高了临界密度值. 在所有格点存在单一转向或两种转向时, 临界密度趋于 1. 研究交通速度及最终位形结构与初始密度及初始分布的关系是我们下一步工作的重点.

- [1] 王明琪, 力学进展, **25**(1995), 343.
- [2] S. Wolfram, Theory and Application of Cellular Automata(World Scientific, Singapore, 1986).
- [3] V. Frisch *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **156**(1986), 1505.
- [4] O. Biham, A. A. Middleton and D. Levine, *Phys. Rev.*, **A46**(1992), R6124.
- [5] T. Nagatani, *Physica*, **A198**(1994), 108.
- [6] T. Nagatani, T. Seno, *Physica*, **A207**(1994), 574.
- [7] K. H. Chung, P. M. Hui, G. Q. Gu, *Phys. Rev.*, **E51**(1995), 772.

THE EVOLUTION EQUATION OF THE CA TRAFFIC-FLOW MODE AND THE EFFECT OF TURNING PROBABILITY

LÜ XIAO-YANG

(Administration Institute, South China Normal University, Guangzhou 510631)

CHEN RUO-HANG LIU MU-REN KONG LING-JIANG

(Department of Physics, Guangxi Normal University, Guilin 541001)

(Received 9 April 1996)

ABSTRACT

A group of evolution equations and a expression of the flow speed, in traffic describing a 2D cellular automaton traffic-flow model are presented. A turning probability is introduced into the model to simulate the traffic jam. The effects caused by the turning probability are abserved in computer simulation.

PACC: 0540