

具有有限温度的热克尔态

董传华

(上海大学物理系, 上海 200072)

(1996 年 4 月 8 日收到)

利用热场动力学方法, 提出了具有有限温度的热克尔态, 研究了这些态的量子统计性质及其与温度的关系, 讨论了这些态中场振幅的涨落与压缩性质. 对于热化的场, 还提出了热压缩的定义, 并对热克尔态, 讨论了温度对热压缩的影响.

PACC: 4250

1 引 言

如果把相干态场输入克尔媒质中, 那么输出态就是克尔态^[1]. 这样一个克尔系统可用下列哈密顿量描述:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\chi a^{\dagger 2} a^2, \quad (1)$$

其中 χ 是与克尔媒质的三阶极化率有关. 所产生的克尔态 $|\psi\rangle_K$ 实际上是相干态 $|\alpha\rangle$ 的一个变换

$$|\psi\rangle_K = U_K(\gamma) |\alpha\rangle. \quad (2)$$

根据系统的哈密顿量, 这变换算符 $U_K(\gamma)$ 具有下列形式:

$$U_K(\gamma) = \exp\left(\frac{i}{2}\gamma a^{\dagger 2} a^2\right) = \exp\left[\frac{i}{2}\gamma N(N-1)\right], \quad (3)$$

其中 $N = a^\dagger a$, $\gamma = 2\chi L/V$, L 是克尔媒质的长度, V 是其中的相速度. 对于克尔态及一些与克尔态有关的态已有不少研究^[2-4]. 但这些态都是在零温度下, 而无论在实验室中还是在实际应用中, 温度不会为零. 这有限的温度必然会对克尔态的性质产生影响. 因此研究具有有限温度的热克尔态是有实际意义的. 本文利用热场动力学(TFD)^[5]方法, 旨在引入这种热克尔态, 并研究其性质. 已有人利用这种方法, 对热相干态和热压缩态^[6,7]作过研究.

2 TFD 的有关结论

以前讨论量子光学中的一些非经典态, 通常是零温度下的希尔伯空间中的态, 关心的也往往只是量子噪声而不涉及热噪声的影响. 为了考虑有限温度下的情况, TFD 除了希尔伯空间外, 还引入了一个对偶空间, 称为 tilde 空间. 在由这两个空间构成的直积空间中, 自由度增加了一倍. 对于每一个算符 A , 在 tilde 空间中也存在一个相应的 tilde 算符.

对于场态的每个真实模,也存在一个相应的“虚拟”模,即 **tilde** 模. 因此在这样的直积空间中的态相当于一个双模态,一个真实模和一个 **tilde** 模. 例如,在直积空间中的真空态是 $|0\tilde{0}\rangle$, 相干态是 $|\alpha\tilde{\alpha}\rangle$, 光子数态 $|n\tilde{n}\rangle$. 与玻色算符 a, a^+ 相对应的 **tilde** 算符是 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{a}^+$. $\tilde{a}$ 的本征态是 $|\tilde{\alpha}\rangle$, 相应的本征值是 $\tilde{\alpha}$. 在热平衡条件下有 $\tilde{\alpha} = \alpha^*$. $\tilde{a}$ 与 $\tilde{a}^+$ 的对易关系和 a, a^+ 的一样, 为 $[\tilde{a}, \tilde{a}^+] = 1$. 真实空间与 **tilde** 空间中的算符是相互独立的, 因此可对易. 有限温度下的直积空间与零温度下的直积空间可由一个热化算符 $T(\theta)$ 联系起来.

$$T(\theta) = \exp[-\theta(a\tilde{a} - a^+\tilde{a}^+)], \quad (4)$$

其中 θ 和平均热光子数 n_0 有关, 即 $n_0 = \sinh^2 \theta$, n_0 可由温度唯一地确定, 此即玻色-爱因斯坦分布

$$n_0 = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (5)$$

因此 n_0 和 θ 都可用来说明温度. 热真空态定义为 $|0\tilde{0}\rangle_T = T(\theta)|0\tilde{0}\rangle$. 热化后的玻色算符 $a(\theta)$ 和 $a^+(\theta)$ 为

$$a(\theta) = T(\theta)aT^+(\theta) = ua - v\tilde{a}^+, \quad (6a)$$

$$a^+(\theta) = T(\theta)a^+T^+(\theta) = ua^+ - v\tilde{a}, \quad (6b)$$

其中 $u = \sqrt{1+n_0} = \cosh \theta$, $v = \sqrt{n_0} = \sinh \theta$. 下面用到的关系式是 $T^+(\theta)aT(\theta) = ua + v\tilde{a}^+$, $T^+(\theta)a^+T(\theta) = ua^+ + v\tilde{a}$.

3 克尔态与热克尔态

由(2)式定义的克尔态实际上是一种广义相干态, 它可以展开成光子数态

$$|\phi\rangle_K = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{i}{2}\gamma n(n-1)} |n\rangle. \quad (7)$$

算符 U_K 对 a 和 a^+ 的变换分别是

$$U_K^\dagger a U_K = e^{-i2\gamma a^+ a} a, \quad U_K^\dagger a^+ U_K = a^+ e^{i2\gamma a^+ a}. \quad (8)$$

在克尔态中 $a^+ p a^q$ 的平均值是^[8]

$$\langle a^+ p a^q \rangle_K = \alpha^{*p} \alpha^q \exp\{i\gamma[p(p-1) - q(q-1)]\} \exp\{|\alpha|^2 [e^{-i2\gamma(q-p)} - 1]\}. \quad (9)$$

相应地, 在 **tilde** 空间中也存在 $|\tilde{\phi}\rangle_K$ 和 $\tilde{U}_K$

$$|\tilde{\phi}\rangle_K = \tilde{U}_K |\tilde{\alpha}\rangle, \quad \tilde{U}_K = \exp\left(-\frac{i}{2}\gamma \tilde{a}^{+2} \tilde{a}^2\right). \quad (10)$$

$\tilde{U}_K$ 对 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{a}^+$ 的变换分别是

$$\tilde{U}_K^\dagger \tilde{a} \tilde{U}_K = e^{i2\gamma \tilde{a}^+ \tilde{a}} \tilde{a}, \quad \tilde{U}_K^\dagger \tilde{a}^+ \tilde{U}_K = \tilde{a}^+ e^{-i2\gamma \tilde{a}^+ \tilde{a}}. \quad (11)$$

与(7)式相对应, $|\tilde{\phi}\rangle_K$ 也可按 $|\tilde{n}\rangle$ 展开为

$$|\tilde{\phi}\rangle_K = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{2}\gamma n(n-1)} |\tilde{n}\rangle. \quad (12)$$

$\tilde{a}^+ p \tilde{a}^q$ 在 $|\tilde{\phi}\rangle_K$ 中的平均值是(9)式的共轭值.

热克尔态是由热相干态经过热克尔媒质后产生的态. 热相干态是 $T(\theta)|\alpha\tilde{\alpha}\rangle$. 直积空间中的相干态 $|\alpha\tilde{\alpha}\rangle$ 是由位移算符 $D(\alpha)\tilde{D}(\tilde{\alpha})$ 作用于 $|0\tilde{0}\rangle$ 后得到. 在直积空间中的克尔态是 $|\psi\tilde{\psi}\rangle_K = U_K\tilde{U}_K|\alpha\tilde{\alpha}\rangle$. 热克尔媒质的作用由 $T(\theta)U_K\tilde{U}_KT^+(\theta)$ 表示. 因此上述热克尔态可以写作如下形式:

$$|\psi\rangle_{TK} = T(\theta)U_K\tilde{U}_KT^+(\theta)T(\theta)|\alpha\tilde{\alpha}\rangle = T(\theta)U_K\tilde{U}_K|\alpha\tilde{\alpha}\rangle = T(\theta)|\psi\tilde{\psi}\rangle_K. \quad (13)$$

如果考虑的是热相干态通过(非热化)的克尔媒质, 那么得到的另一种热克尔态 $|\psi\rangle_{KT} = U_K\tilde{U}_KT(\theta)|\alpha\tilde{\alpha}\rangle$, 因此, 对应于不同的物理过程, 可定义不同的热克尔态, 这正如可定义不同的热相干态和不同的热压缩态一样^[9]. 本文只限于讨论(13)式所定义的热克尔态 $|\psi\rangle_{TK}$.

4 热克尔态 $|\psi\rangle_{TK}$ 的量子统计性质

首先, 利用(6), (8), (9)和(11)式, 可得热克尔态中光子数的平均值是

$$\langle N \rangle_{TK} = v^2 + (u^2 + v^2 + 2uve^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma})|\alpha|^2, \quad (14)$$

其中等号右端第一项 $v^2 = n_0$ 是热真空态中热光子数平均值. 当温度为零时(即 $v=0$), $\langle N \rangle_{0K} = |\alpha|^2$, 这就是普通零温度的克尔态中光子数平均值. 在热克尔态中, $a^{+2}a^2$ 的平均值为

$$\begin{aligned} \langle a^{+2}a^2 \rangle_{TK} = & 2v^4 + 4v^2(u^2 + v^2 + 2uve^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma})|\alpha|^2 \\ & + [(u^2 + v^2)^2 + 2u^2v^2(1 + e^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma}) \\ & + 4uv(u^2 + v^2)\cos 2\gamma e^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma}]|\alpha|^4, \end{aligned} \quad (15)$$

由此可得热克尔态中光子数的涨落是

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N)^2 \rangle_{TK} = & u^2v^2 + 2u^2v^2|\alpha|^4(1 - 2e^{-8|\alpha|^2\sin^2\gamma} + e^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma}) \\ & + (u^2 + v^2)|\alpha|^2[u^2 + v^2 + 2uv(1 - 4|\alpha|^2\sin^2\gamma)e^{-4|\alpha|^2\sin^2\gamma}], \end{aligned} \quad (16)$$

其中等号右端第一项 $u^2v^2 = n_0(n_0 + 1)$ 是热真空态中热光子数的涨落. 温度为零时($v=0$)就简化为零温度克尔态中光子数涨落 $|\alpha|^2$. 图 1 示出 $|\alpha|^2 = 0.1, 0.5$ 和 1.0 时热克尔态中光子数涨落与温度的关系, 其中 $\gamma = \pi/2$.

利用(14)和(15)式, 可得热克尔态的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$, 其表达式较复杂. 当 $\gamma = \pi$ 时, $g^{(2)}(0)$ 表达式特别简单, 写作

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{v^4 + 2|\alpha|^2v^2(u+v)^2}{[v^2 + |\alpha|^2(u+v)^2]^2} > 1 \quad (\gamma = \pi \text{ 时}). \quad (17)$$

对于零温度克尔态而言, $g^{(2)}(0) = 1$.

在直积空间中, 克尔态 $|\psi\tilde{\psi}\rangle_K$ 按 $|n\tilde{n}\rangle$ 展开成

$$|\psi\tilde{\psi}\rangle_K = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |n\tilde{n}\rangle. \quad (18)$$

用热化算符 $T(\theta)$ 的分解形式^[10]

$$T(\theta) = \text{sech } \theta e^{a^+ \bar{a}^+ \tanh \theta} e^{(a^+ \alpha + \bar{a}^+ \bar{\alpha}) \ln(\text{sech } \theta)} e^{-a \bar{a} \tanh \theta}, \quad (19)$$

可得 $T(\theta)$ 在直积空间中以 $|n\bar{n}\rangle$ 为基的矩阵元 $T_{ln} = \langle l\bar{l} | T(\theta) | n\bar{n} \rangle$

$$T_{ln} = \begin{cases} \frac{(\sinh \theta)^{l-n}}{(\cosh \theta)^{l+n+1}} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^{n-j} C_l^{n-j} (\sinh \theta)^{2j} & (l \geq n \text{ 时}), \\ \frac{(-\sinh \theta)^{n-l}}{(\cosh \theta)^{l+n+1}} \sum_{j=0}^l (-1)^j C_n^{l-j} C_l^{l-j} (\sinh \theta)^{2j} & (l < n \text{ 时}). \end{cases} \quad (20)$$

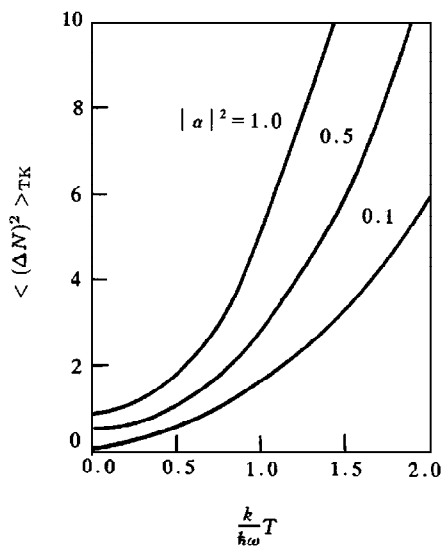


图 1 热克尔态中的光子数涨落与温度的关系
 $\gamma = \pi/2$

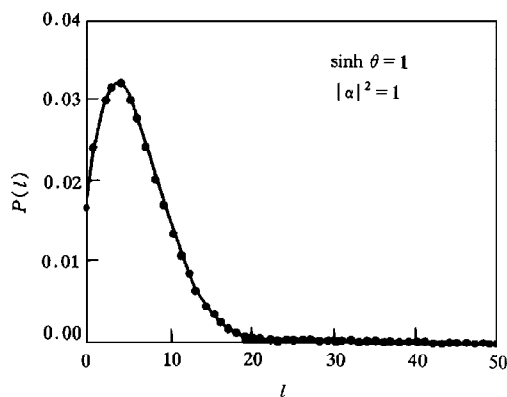


图 2 热克尔态中光子数分布 $n_0 = 1$

利用(18)和(20)式可得直积空间中热克尔态的光子数分布 $P(l)$

$$P(l) = |\langle l\bar{l} | T(\theta) | \psi \tilde{\psi} \rangle_K|^2 = e^{-2|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} T_{ln} \right|^2. \quad (21)$$

图 2 示出 $|\alpha|^2 = 1$, $\sinh \theta = 1$ (对应于 $\frac{k}{\hbar\omega} T = \frac{1}{\ln 2}$) 时直积空间中的光子数分布 $P(l)$. 温度为零时, $T_{ln} = \delta_{ln}$, 这时光子数分布为

$$P(l) = \left(e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2l}}{l!} \right)^2, \quad (22)$$

但这是零温度直积空间中克尔态 $|\psi \tilde{\psi}\rangle_K$ 中的分布, 它是通常零温度克尔态 $|\psi\rangle_K$ 中光子数分布的平方. 随着温度升高, (21) 式整个分布的峰值下降, 分布将趋于平坦.

5 热克尔态 $|\psi\rangle_{\text{TK}}$ 中的振幅压缩特性

光场的振幅压缩是指振幅的某个分量的涨落小于它在真空态中的涨落. 这种压缩性质是一种典型的非经典特性. 光场的振幅的两个正交分量 a_1 和 a_2 分别定义为

$$a_1 = \frac{1}{2}(a^+ + a), \quad a_2 = \frac{i}{2}(a^+ - a). \quad (23)$$

如果某个分量 a_j ($j=1$ 或 2) 在某个态中的涨落 $\langle (\Delta a_j)^2 \rangle$ 小于 $1/4$ (即 a_j 在真空态中的涨落), 则称该态发生了寻常意义上的压缩. 首先讨论热克尔态的这种寻常压缩. 利用 (6) 和 (9) 式, 可得 a 和 a^2 在热克尔态中的平均值

$$\langle a \rangle_{\text{TK}} = (u + v) \alpha \exp[|\alpha|^2 (e^{-i2\gamma} - 1)], \quad (24a)$$

$$\langle a^2 \rangle_{\text{TK}} = (u^2 + v^2) \alpha^2 e^{-i2\gamma} \exp[|\alpha|^2 (e^{-i4\gamma} - 1)] + 2uv\alpha^2 \exp[2|\alpha|^2 (e^{-i2\gamma} - 1)], \quad (24b)$$

a^+ 和 a^{+2} 的平均值是上式的复共轭, 于是 a_1 和 a_2 的平均值是

$$\langle a_1 \rangle_{\text{TK}} = (u + v) |\alpha| e^{-2|\alpha|^2 \sin^2 \gamma} \cos(\phi - |\alpha|^2 \sin 2\gamma), \quad (25a)$$

$$\langle a_2 \rangle_{\text{TK}} = (u + v) |\alpha| e^{-2|\alpha|^2 \sin^2 \gamma} \sin(\phi - |\alpha|^2 \sin 2\gamma), \quad (25b)$$

其中 ϕ 是 α 的幅角, $\alpha = \exp(i\phi)$. 于是, 振幅的一个分量 a_j 在热克尔态中的涨落是

$$\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{\text{TK}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n_0 + (2n_0 + 1) A_j + \sqrt{n_0(n_0 + 1)} B_j - (\sqrt{n_0} + \sqrt{n_0 + 1})^2 C_j, \quad (26)$$

$$\text{其中 } A_j = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \{1 - (-1)^j e^{-2|\alpha|^2 \sin^2 \gamma} \cos[2(\phi - \gamma) - |\alpha|^2 \sin 4\gamma]\}, \quad (27a)$$

$$B_j = |\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2 \sin^2 \gamma} [1 - (-1)^j \cos(2\phi - |\alpha|^2 \sin 2\gamma)], \quad (27b)$$

$$C_j = \frac{1}{2} |\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2 \sin^2 \gamma} [1 - (-1)^j \cos(2\phi - 2|\alpha|^2 \sin 2\gamma)]. \quad (27c)$$

当 $|\alpha|^2 = 0$, 即热真空态中, a_j 的涨落 $\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{\text{TK}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n_0$. 当温度为零, 即 $n_0 = 0$, (26) 式就简化为

$$\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{0\text{K}} = \frac{1}{4} + A_j - C_j. \quad (28)$$

这就是普通零温度下的克尔态中 a_j 的涨落. 图 3 示出热克尔态中 a_1 的涨落与温度的关系. a_1 的涨落随温度升高而增加, 这也是意料之中的. 按寻常压缩的定义, 即使零温度克尔态能压缩, 但升高到某一温度 T_c 以上时, 就不再发生压缩. 例如, 在 $\phi = 0$, $\gamma = \pi/2$ 时, 这 T_c 可简单地由下式决定:

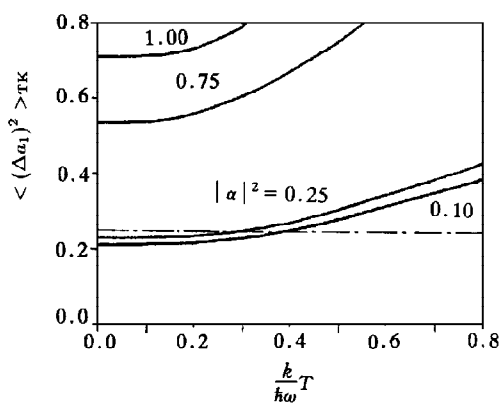
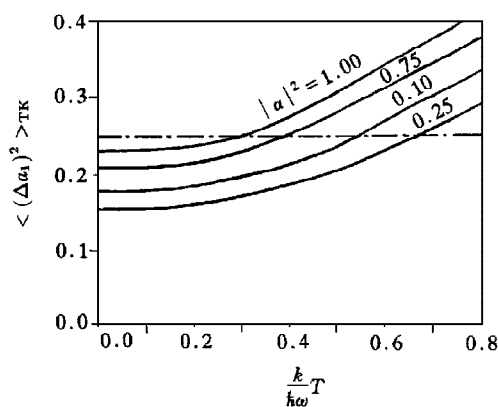
$$\frac{\hbar\omega}{kT_c} = 4|\alpha|^2 + \ln\left(\frac{1}{2|\alpha|^2} - e^{-4|\alpha|^2}\right), \quad (29)$$

其中 $\hbar$ 是普朗克常数, k 为玻耳兹曼常数.

上述的寻常压缩是以零温度真空态中的基础量子涨落 $1/4$ 作为判断有限温度时态是否发生压缩的准则. 对于热化态, 还可引入另外一种压缩定义, 即以有限温度的热真空态

中的基础量子涨落 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} n_0$ 作为判断在同一温度下的态是否被压缩的准则. 我们称这种压缩为热压缩. 因此, 热压缩条件是

$$\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_T < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} n_0. \quad (30)$$

(a) $\gamma = \pi/4$ (b) $\gamma = \pi/2$ 图3 热克尔态中振幅分量 a_1 的涨落与温度的关系 $\phi = 0$

研究这种热压缩的意义在于实际情况中总是处于有限的温度中, 而在这有限温度中量子

涨落的极限是 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} n_0$. 与寻常压缩的做法相似, 也可定义一个热压缩参量来描述热化态中涨落低于热真空态中涨落的程度. 该热压缩参量记为 S_{Tj} ($j=1$ 或 2), 定义为

$$S_{Tj} = \frac{\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_T - \langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{T0}}{\langle (\Delta a_j)^2 \rangle_{T0}}, \quad (31)$$

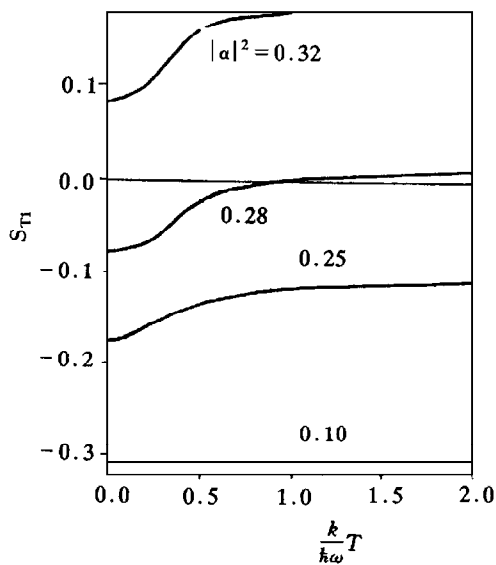
于是, 热压缩条件也可写为 $S_{Tj} < 0$. 对于热克尔态, S_{Tj} 是

$$S_{Tj} = 4 \left[A_j - C_j + \frac{\sqrt{n_0(n_0 + 1)}}{1 + 2n_0} (B_j - 2C_j) \right]. \quad (32)$$

当 $\phi = 0$, $\gamma = \pi/2$ 时, 热克尔态中 a_1 的热压缩参量 S_{T1} 与温度无关, 即为

$$S_{T1} = -4 |\alpha|^2 e^{-4|\alpha|^2} < 0. \quad (33)$$

因此, 在这种情况下, 虽然寻常压缩不一定

图4 热克尔态中振幅分量 a_1 的热压缩参量 S_{T1} 与温度的关系 $\phi = 0$; $\gamma = \pi/4$

发生(例如在某些较高温度时),但 a_1 的热压缩总能发生.相应地,在 $\phi=0$, $\gamma=\pi/2$ 时, a_2 的热压缩参量 $S_{T2}=|\alpha|^2>0$,即 a_2 不可能发生热压缩.在 $\phi=0$, $\gamma=\pi/4$ 时, a_1 的热压缩参量是

$$S_{T1} = 4 \left[\frac{1}{2} |\alpha|^2 (1 - 2e^{-2|\alpha|^2} \cos^2 |\alpha|^2) + \frac{\sqrt{n_0(n_0+1)}}{1+2n_0} |\alpha|^2 e^{-2|\alpha|^2} (\cos |\alpha|^2 - \cos 2|\alpha|^2) \right]. \quad (34)$$

图 4 示出这种情况下 S_{T1} 与温度的关系.

总之,本文用 TFD 方法,在直积空间中定义了热克尔态.研究了这种在有限温度下的热克尔态的量子统计性质和光子数分布.可看出这种态的光子数平均值及光子数涨落都将随温度升高而增大.场振幅的涨落也将随温度升高而增大.当温度高于一定值时,振幅的寻常压缩不再发生,但在某些条件下和一定温度以下时,热压缩仍可发生.

- [1] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 3974.
- [2] C. C. Gerry and E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 1779.
- [3] A. D. Wilson-Gordon, V. Buzek and P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 7647.
- [4] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A49**(1994), 2033.
- [5] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Adv. Phys.*, **37**(1988), 531.
- [6] A. Mann and M. Revzen, *Phys. Lett.*, **A134**(1989), 273.
- [7] J. Oz-Vogt, A. Mann and M. Revzen, *J. Mod. Opt.*, **38**(1991), 2339.
- [8] C. C. Gerry and S. Redriques, *Phys. Rev.*, **A35**(1987), 4440.
- [9] H. Fearn and M. J. Collett, *J. Mod. Opt.*, **35**(1988), 553.
- [10] Ching Tsung Lee, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 4193.

THERMAL KERR STATES WITH FINITE TEMPERATURE

DONG CHUAN-HUA

(Department of Physics, Shanghai University, Shanghai 200072)

(Received 8 April 1996)

ABSTRACT

By making use of thermo-field dynamics (TFD), we construct the thermal Kerr states with finite temperature. We investigate the quantum statistical properties of these states and their dependence on temperature. We discuss the fluctuations of amplitude in these states and squeezing. We also introduce the definition of thermosqueezing for thermalized states and discuss the effect of temperature on thermosqueezing for thermal Kerr states.

PACC: 4250