

平行速度剪切驱动湍流引起的粒子输运

傅新宇 董家齐¹⁾ 应纯同 刘广均

(清华大学工程物理系, 北京 100084)

¹⁾(核工业西南物理研究院, 成都 610041)

(1996 年 4 月 25 日收到)

通过离子温度梯度及平行速度剪切的准线性湍流理论, 得到了由杂质离子及低频 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 湍流所驱动的径向离子流及相应的输运系数. 理论分析表明, 主要离子和杂质离子的径向离子流具有相反的方向, 并随着平衡流速剪切以及杂质离子的密度梯度的变化而改变. 增强平行速度剪切对主要离子的约束可产生有利影响.

PACC: 5225F; 5235R

1 引 言

在磁约束核聚变研究中, 等离子体粒子、动量和能量输运所存在的反常现象一直是 Tokamak 及其他聚变实验和理论探讨的中心课题, 对于控制反常的粒子与能量损失以及优化聚变堆设计都具有重要价值, 但迄今尚未得到成功的理论解释. 虽然普遍认为 H 模的约束改善与极向流速剪切 dv_E/dr 有关, 并对此作了大量研究, 但同时 JT-60U 及 DIII-D 的实验还表明^[1], 当等离子体区内存在很陡的平行速度剪切层 $dv_{||}/dr$ 时, 该区域内等离子体的约束性能得到了很大的改善. 对于这一重要的实验现象, 目前见到的理论解释尚少.

同时, 对 $dv_{||}/dr$ 的研究都只局限于主要离子(氢及其同位素)而忽略杂质离子流的影响. 而实验结果表明^[2], 杂质离子和主要离子的输运行为有较大差异. 因此, 在研究 $dv_{||}/dr$ 引起的湍流及有关输运现象的过程中, 考虑杂质的影响十分必要. 现有的湍流输运理论已对离子的动量输运和能量输运进行了一定研究^[3,4], 但对粒子输运, 理论模型及结果较少, 而且基于密度或温度梯度单一的驱动机制, 预测与实验存在较大差距^[5]. 显然, 需考虑其他的自由能来源, 并希望对主要离子的粒子箍缩效应^[6]、杂质离子流方向^[7]等重要实验现象给出合理的预测.

本文通过离子温度梯度及平行速度剪切的准线性湍流理论, 对上述问题, 特别是平行速度剪切对湍流粒子输运的影响, 进行了分析研究, 并给予了物理上的解释.

2 径向离子流及输运系数

设平板磁场位形 $\mathbf{B} = B_0[\hat{z} + (x/L_s)\hat{y}]$, L_s 为磁剪切尺度, x, y, z 方向对应于 Toka-

mak 中的径向、极向和环向. 考虑离子温度梯度 (η_i) 效应, $\eta_i = d \ln T_i / d \ln n_i$, 以及线性变化的平行剪切流, $v'_{0//j}$ 为速度剪切, 脚标 $j = i, z$ 分别代表主要离子和杂质离子. 由双流体方程^[4]出发, 且对电子作绝热近似, 得本征模方程

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - b_s \phi(x) + \frac{1 - \hat{\omega}}{\tilde{f}_z(\hat{\omega} + \bar{K})} \phi(x) + \left(\frac{\tilde{v}'_{0//} S}{\hat{\omega} \tilde{f}_z(\hat{\omega} + \bar{K})} x + F(\hat{\omega})^2 \frac{S^2}{\hat{\omega}^2 x^2} \right) \phi(x) = 0, \quad (1)$$

及相应的本征函数, 其中

$$\begin{aligned} \tilde{v}'_{0//} &\equiv (1 - f_z) \tilde{v}'_{0//i} + f_z \tilde{v}'_{0//z}, \\ \bar{K} &\equiv \frac{(1 - f_z) L_{ei} K_i + f_z L_{ez} K_z \mu / Z^2}{1 - f_z + f_z \mu / Z}, \\ F(\hat{\omega}) &= \left[1 - (1 - Z^2 / \mu^2) \frac{f_z \mu (\hat{\omega} + L_{ez} K_z / Z)}{\tilde{f}_z Z (\hat{\omega} + \bar{K})} \right]^{1/2}, \\ \tilde{f}_z &\equiv 1 - f_z + \frac{\mu}{Z} f_z. \end{aligned}$$

x 归一化为 ρ_s , $\rho_s = c_s / \Omega$, $c_s = (T_e / m_i)^{1/2}$, $\Omega = eB / m_i c$; $b_s = k_y^2 \rho_s^2$, $S = L_{ne} / L_s$, $\hat{\omega} = \omega / \omega_{*e}$, $\omega_{*e} = k_y \rho_s c_s / L_{ne}$; L_{ne} , L_{ni} , L_{nz} 为密度梯度尺度. $L_{ei} = L_{ne} / L_{ni}$, $L_{ez} = L_{ne} / L_{nz}$. $f_z = Zn_{0z} / n_{0e}$, $\mu = m_z / m_i$. $\tau_i = T_e / T_i$, $\tau_z = T_e / T_z$, $\eta_i = L_{ni} / L_{Ti}$, $\eta_z = L_{nz} / L_{Tz}$, $K_i = (1 + \eta_i) / \tau_i$, $K_z = (1 + \eta_z) / \tau_z$, $\tilde{v}'_{0//i} = v'_{0//i} L_{ne} / c_s$, $\tilde{v}'_{0//z} = v'_{0//z} L_{ne} / c_s$.

在有理面附近引入微观径向流函数 Γ_j ,

$$\Gamma_j = \tilde{v}_x^* \tilde{n}_j + \tilde{v}_x \tilde{n}_j^*, \quad (2)$$

其中

$$\tilde{v}_x = -\frac{c}{B} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}, \quad \tilde{\Phi} = \sum_{k_y} \phi_0 \phi(x) \exp(-i\omega t + ik_y y),$$

“*”为复共轭, B 为环向磁场, c 为光速, ϕ_0 为扰动模的饱和幅度, $\phi(x)$ 为归一化波函数. 将 Γ_j 在有理面 ($x=0$) 附近沿 x 积分, 得到宏观粒子流 $\langle \Gamma_j \rangle$.

主要离子的密度扰动量为

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &\equiv (1 - f_z) \frac{en_{0e}}{T_e} \left\{ \frac{L_{ei}}{\hat{\omega}} - \left(1 + \frac{L_{ei} K_i}{\hat{\omega}} \right) \frac{1 - \hat{\omega}}{\tilde{f}_z(\hat{\omega} + \bar{K})} + \left[\left(1 + \frac{L_{ei} K_i}{\hat{\omega}} \right) \frac{\tilde{v}'_{0//} S}{\tilde{f}_z \hat{\omega} (\hat{\omega} + \bar{K})} - \frac{\tilde{v}'_{0//i} S}{\hat{\omega}^2} \right] x \right. \\ &\quad \left. + (1 - F(\hat{\omega})^2) \left(1 + \frac{L_{ei} K_i}{\hat{\omega}} \right) \frac{S^2}{\hat{\omega}^2} x^2 \right\} \tilde{\Phi}, \end{aligned} \quad (3)$$

则其径向粒子流为

$$\langle \Gamma_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{v}_x^* \tilde{n}_i + \tilde{v}_x \tilde{n}_i^*) dx = -2 \sqrt{\pi} |\phi_0|^2 n_{0i} \frac{e c L_{ei}}{B T_e \rho_s} \Psi(S, K_i, L_{ez}, Z, \mu, f_z, \tilde{v}'_{0//i}, \tilde{v}'_{0//z}), \quad (4)$$

其中无量纲函数

$$\Psi(S, K_i, L_{ez}, Z, \mu, f_z, \tilde{v}'_{0//i}, \tilde{v}'_{0//z}) = \frac{b_s^{1/2} \gamma}{S^{1/2} \text{Im}(F^* \hat{\omega})^{1/2} |\hat{\omega}|} \left\{ -1 + \frac{(1 + \bar{K}) |\hat{\omega}|^2}{\tilde{f}_z L_{ei} |\hat{\omega} + \bar{K}|^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_i(2\omega_r + \bar{K} - |\hat{\omega}|^2)}{\tilde{f}_z |\hat{\omega} + \bar{K}|^2} + \frac{\alpha(\hat{\omega})}{2 |\hat{\omega} + \bar{K}|^2} \left\{ \frac{\bar{v}_{0//}^2 [K_i(\gamma^2 - 3\omega_r^2 - 2\omega_r \bar{K}) - (2\omega_r + \bar{K}) |\hat{\omega}|^2 / L_{ei}]}{\tilde{f}_z |\hat{\omega} + \bar{K}|^2} \right. \\
& \left. + 2\hat{v}'_{0//i} \bar{v}'_{0//} \omega_r / L_{ei} \right\} + G(\hat{\omega}) \left\{ \times \exp \left\{ \frac{\gamma^2 \bar{v}_{0//}^2 [\bar{K} - (1 - Z^2/\mu^2) L_{ez} K_z f_z \mu / Z \tilde{f}_z]^2}{4 S \text{Im}(\mathbf{F}^* \hat{\omega}) \tilde{f}_z^2 |\mathbf{F}|^6 |\hat{\omega} + \bar{K}|^4} \right\} \right\}, \quad (5)
\end{aligned}$$

$\hat{\omega} = \omega_r + i\gamma$ 由(1)式求得. 在(4)式的定义中, 已考虑到峰值位于相邻有理面上的两个波对于总径向粒子流的相反贡献, 即有彼此相互抵消的作用, 这与 Zhang 等^[8]的“配对(paring)原则”是一致的. 因子

$$\alpha(\hat{\omega}) \equiv \frac{\text{Im}(\mathbf{F} \hat{\omega}) + \bar{K} \text{Im}(\mathbf{F})}{\tilde{f}_z |\mathbf{F}|^2 \text{Im}(\mathbf{F}^* \hat{\omega})},$$

$$\begin{aligned}
G(\hat{\omega}) \equiv & \left(1 - \frac{Z^2}{\mu^2} \right) \frac{\mu f_z S |\hat{\omega}|^2}{Z \tilde{f}_z |\hat{\omega} + \bar{K}|^2} \left(\frac{1}{2 \text{Im}(\mathbf{F}^* \hat{\omega})} + \frac{\bar{v}_{0//}^2 |\hat{\omega}|^2}{4 S |\hat{\omega} + \bar{K}|^4} \alpha(\hat{\omega})^2 \right) \\
& \times \left\{ - \frac{2\omega_r + \bar{K}}{L_{ei}} + \left(K_i + \frac{L_{ez} K_z}{Z L_{ei}} \right) \times \frac{\gamma^2 - 3\omega_r^2 - 2\omega_r \bar{K}}{|\hat{\omega}|^2} \right. \\
& \left. + \frac{K_i L_{ez} K_z}{Z |\hat{\omega}|^4} [4\omega_r(\gamma^2 - \omega_r^2) + \bar{K}(\gamma^2 - 3\omega_r^2)] \right\}
\end{aligned}$$

与杂质的 Z, μ 有关. 当 $Z = \mu$ 时, $\alpha(\hat{\omega}) \equiv 1, G(\hat{\omega}) \equiv 0$, (5)式的最后一项消失.

根据(2)式及电中性条件, 易得杂质离子的径向粒子流

$$\langle \Gamma_z \rangle = - \frac{1}{Z} \langle \Gamma_i \rangle. \quad (6)$$

上式表明, 主要离子与杂质离子的径向粒子流具有相反的方向, 且当不存在杂质离子时, 在绝热电子的假设下, 仅由速度剪切和 η_i 的驱动效应不会引起宏观上的径向粒子流动.

可定义离子径向输运系数 D_j 为

$$\langle \Gamma_j \rangle = - D_j \nabla_r n_{0j}, \quad (7)$$

∇_r 表示径向梯度. 主要离子的径向输运系数

$$D_i = - 2 \sqrt{\pi} |\phi_0|^2 \frac{ecL_{ne}}{BT_e \rho_s} \Psi(S, K_i, L_{ez}, Z, \mu, f_z, \hat{v}'_{0//i}, \hat{v}'_{0//z}). \quad (8)$$

3 计算与讨论

无疑, 径向离子流的方向在粒子输运研究中具有重要意义. $\langle \Gamma_i \rangle < 0$, 即主要离子向内流动(或称主要离子的粒子箍缩效应), 是非常理想的输运方式. 它不仅能改善主要离子的约束, 而且可将杂质离子向外排斥.

根据(4)式, 主要离子的粒子流方向完全由表达式 Ψ 的性质决定. $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 对应于 $\Psi > 0$, $\langle \Gamma_i \rangle$ 正负变化的转折点可由 $\Psi = 0$ 确定. 我们将 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 所对应的参数范围称为“理想参数”范围. 先分析离子温度梯度的影响. 图 1 给出 $\Psi = 0$ 时 $L_{ez} - \eta_i$ 的临界关系曲线. 杂质(C_6^{12})浓度分别取 $f_z = 0.1, 0.2$, 其他参数固定, 并满足 $L_{ei}(1 - f_z) + L_{ez} f_z = 1$ 和

$\eta_e = \eta_i (L_{ez}^{-1} - f_z) / (1 - f_z)$ (设 $T_i(r) = T_z(r)$) 的电中性条件. 主要离子分别取氢、氦、氟. 临界曲线以上的范围即为“理想参数”范围 ($\langle \Gamma_i \rangle < 0, \langle \Gamma_z \rangle > 0$). 结果表明, 随着离子温度梯度 η_i 的增大, 理想参数范围减小, 不利于形成向内的主要离子流. 同时可注意到, 氢、氦、氟三种不同的主要离子所对应的理想参数范围依次增大. 这意味着在相同的参数条件下, 以氟作为主要离子最易形成向内的粒子输运, 氦次之, 而氢最差. 这与等离子体约束实验呈现的“同位素效应”似有某种联系.

对于 $\hat{v}'_{0//i} \ll 1$, 临界参数关系可近似为 (氦为主要离子并假定 $|\bar{\omega}| \ll \bar{K}$)

$$L_{ez} = [((Z-1)/\eta_i + Z)(1-f_z) + f_z]^{-1}. \quad (9)$$

当 $\eta_i + 1 \ll Z$ 时, $L_{ez} \approx \eta_i / (Z-1)(1-f_z)$, $L_{ez}-\eta_i$ 呈线性关系.

下面重点讨论平行流速剪切所产生的影响. 图 2 计算了 $L_{ez}-\hat{v}'_{0//i}$ 的临界关系曲线. 可清楚看到, $\hat{v}'_{0//i}$ 的增强, 使“理想参数”范围显著扩大, 使得向内的主要离子流在更广的参数范围内出现. $\hat{v}'_{0//i}$ 越强, 效果越明显. 通过对 η_i 不同取值的比较, 发现虽然随着 η_i 的增大, 平行流速剪切的影响将逐渐减小, 但该效应对 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 参数范围的扩大在相当程度上抵消了由于离子温度梯度提高所产生的不利影响.

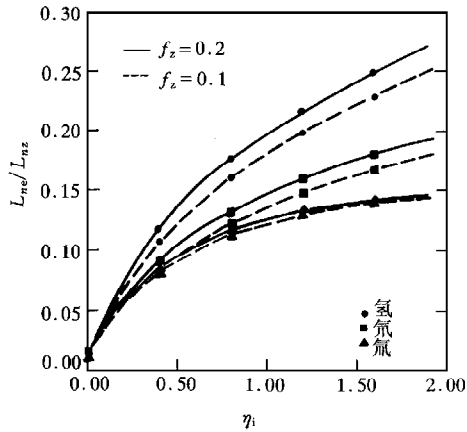


图 1 $L_{ez}-\eta_i$ 的临界关系曲线 $Z=2$ (氦), $f_z=0.1$, 0.2 , $\hat{v}'_{0//i}=0.5$, 主要离子为氢、氦、氟, $S=0.1$, $b_s=0.1$, $Z=6$ (碳)

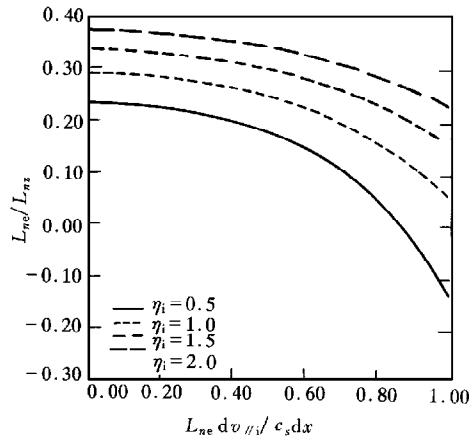


图 2 $L_{ez}-\hat{v}'_{0//i}$ 的临界关系曲线 主要离子为氦, $S=0.2$, $b_s=0.2$, $f_z=0.1$, $Z=6$ (碳)

研究发现增强平行速度剪切具有更为普遍的影响. 图 3 比较了不同的磁剪切度参量 S 值下 $L_{ez}-\hat{v}'_{0//i}$ 的临界曲线. 对 b_s 相同的模, 虽然 S 的增大使 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 的参数范围有所减小, 但如果此时存在较强的 $\hat{v}'_{0//i}$, 这种减小就会变得相当微弱. 在 b_s 取值不等时, 一般情况下较小的极向模数对应的 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 参数范围较大, 但当 $\hat{v}'_{0//i}$ 超过一定强度时, 将有利于 b_s 较大的模产生向内的离子输运.

通过上述结果, 我们发现, 虽然 η_i 和 $\hat{v}'_{0//i}$ 都是不稳定性的驱动机制, 但 η_i 的增加不利于 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 的粒子输运, 而 $\hat{v}'_{0//i}$ 的作用则相反, 它的增强将对该范围内主要离子的有效约束和杂质离子的向外排斥产生良好的作用.

由于 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 对应于 $\Psi > 0$, 分析(5)式也可看出, $\bar{v}'_{0//}$ 的影响主要由等号右端第四项决定; 该项总为非负值, 且约正比于 $\bar{v}'_{0//}$ 增长; 与此同时, η_h 的作用主要在等号右端第三项, 而在 $L_{ez} \leq 1$ 的所有范围内, 该项的值随 η_h 的增大而减小.

为了计算输运系数 D_i , 这里采用与文献[9]相似的估算方法确定饱和幅度 $|\phi_0|$, 可认为不稳定性模的波能密度约等于主要离子和杂质离子的流速剪切及离子温度梯度所具有的自由能密度总和. 作为上限, $|\phi_0|$ 可估算为

$$|\phi_0|^2 = \frac{T_e^2 \rho_s^2}{e^2 \tau_i L_{ne}^2} \hat{E}_{iz}, \quad (10)$$

其中

$$\hat{E}_{iz} = \frac{|\hat{\omega}|}{S |F|} [\tau_i (1 - f_z) + \tau_z Z f_z]^{-1} \left\{ \frac{1}{3} [(1 - f_z) \hat{v}_{//i}^2 + \frac{\mu}{Z} f_z \hat{v}_{//z}^2] + \frac{15}{8} \left[\eta_h^2 L_{ei}^2 (1 - f_z) + \frac{f_z}{Z \tau_z} \eta_h^2 L_{ez}^2 \right] \right\},$$

则粒子输运系数

$$D_i = -2 \sqrt{\pi} \frac{c_s \rho_s^2}{L_{ne}} \Psi(S, K_i, L_{ez}, Z, \mu, f_z, \hat{v}'_{0//i}, \hat{v}'_{0//z}) \hat{E}_{iz}, \quad (11)$$

径向粒子流

$$\langle \Gamma_i \rangle = n_{0i} c_s \left(\frac{\rho_s^2}{L_{ni} L_{ne}} \right) A_i,$$

$$A_i = -2 \sqrt{\pi} \Psi(S, K_i, L_{ez}, Z, \mu, f_z, \hat{v}'_{0//i}, \hat{v}'_{0//z}) \hat{E}_{iz}, \quad (12)$$

可以看出(12)式存在着 $\langle \Gamma_i \rangle \propto n_{0i} B^{-2}$ 的定标关系.

根据以下参数: $B = 2T$, $T_e = 30$ eV, $L_{ne} = 3$ cm, 氦为主要离子, 图4计算了 D_i -

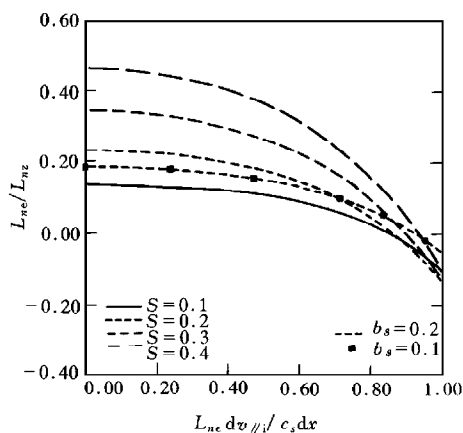


图3 $L_{ez} - \bar{v}'_{0//i}$ 的临界关系曲线 对 $S = 0.1, 0.3, 0.4$, $b_s = 0.1$; 对 $S = 0.2$, $b_s = 0.1, 0.2$, $\eta_h = 0.5$, $f_z = 0.1$, $Z = 6$ (碳), 主要离子为氦

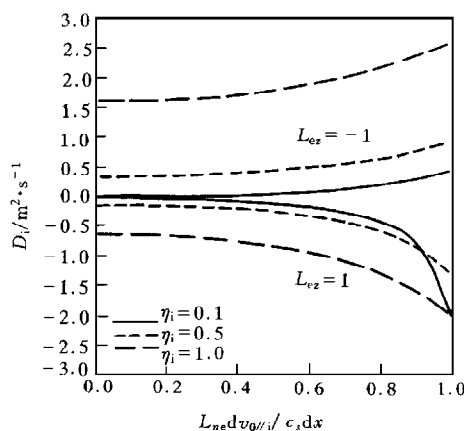


图4 主要离子的径向输运系数随平行流速剪切的变化 $B = 2T$, $T_e = 30$ eV, $L_{ne} = 3$ cm, $f_z = 0.2$, 主要离子为氦, 其他参数同图1

$L_{ne} dv_{//i}/c_s dx$ 的定量关系. 可以看出, 虽然 D_i 的绝对幅度随流速剪切的增大而增大, 但向内主要离子流随 $\tilde{v}_{0//i}$ 增长更快, 说明平行速度剪切的提高从影响输运的绝对幅度上也对主要离子的粒子约束有利.

4 结 论

在杂质离子、平行流速剪切及离子温度梯度 (η_i) 的共同驱动下, 出现了径向上宏观的粒子流动, 主要离子和杂质离子的粒子流具有相反方向. 在较大的 η_i 参数范围内, 当杂质密度梯度小于某一正值时, 出现向内的杂质粒子流以及向外的主要离子流; 而大于该正值时, 则形成向外的杂质离子流和向内的主要离子流, 即主要离子的“反常箍缩”效应 ($\langle \Gamma_i \rangle < 0$), 使得主要离子的粒子约束得到改善, 并将杂质离子排除在外, 抑制杂质的积累.

最为重要的是, 本文的理论结果表明, 虽然 η_i 的增加使 $\langle \Gamma_i \rangle < 0$ 的参数范围缩小, 但 $v'_{//}$ 的作用却相反: 增强平行流速剪切能够有效地扩大向内主要离子流的范围, 从而使约束大为改善.

JT-60U 和 DIII-D 的实验结果均表明, 在 $dv_{//}/dr$ 很强的区域里, 等离子体的约束性质得到很大改善, 本文的理论对这一重要现象给予了明确的物理解释. 本文所预计的定标率与实验结果^[5] $\langle \Gamma_i \rangle \sim n_{0i} B^{-2}$ 相似, 其粒子输运系数数值大小与实验所得在数量级上相当.

等离子体的粒子输运是一个相当复杂的课题, 实际上存在着多种支配输运的物理机制, 本文所研究的只是其中之一. 另外文中对湍流饱和幅度的估算尚未考虑垂直流速剪切对不稳定性的抑制作用, 有待进一步修正.

- [1] Y. Koide, M. Kikuchi, M. Mori, S. Tsuji, S. Ishida, N. Asakura, Y. Kamada, T. Nishitani, Y. Kawano, T. Hatae, T. Fujita, T. Fukuda, A. Sakasai, T. Kondoh and Y. Neyatani, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 3662.
- [2] J. Kim, K. H. Burrell *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994), 2199.
- [3] J. Q. Dong, W. Horton, R. D. Bengtson and G. X. Li, *Phys. Plasmas*, **1**(1994), 3250.
- [4] N. Mattor and P. H. Diamond, *Phys. Fluids*, **31**(1988), 1180.
- [5] T. L. Rhodes, C. P. Ritz, R. D. Bengtson, *Nucl. Fusion*, **33**(1993), 1147.
- [6] R. R. Dominguez, *Phys. Fluids*, **B5**(1993), 1782.
- [7] M. Shimada, *Fusion Engineering and Design*, **15**(1992), 325.
- [8] Y. Z. Zhang, S. M. Mahajan, *Phys. Plasmas*, **2**(1995), 4236.
- [9] C. S. Liu, M. N. Rosenbluth, W. M. Tang, *Phys. Fluids*, **19**(1976), 1040.

PARTICLE TRANSPORT FROM TURBULENCE DRIVEN BY PARALLEL VELOCITY SHEAR

FU XIN-YU DONG JIA-QI¹⁾ YING CHUN-TONG LIU GUANG-JUN

(*Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084*)

¹⁾(*Southwestern Institute of Physics, Chengdu 610041*)

(Received 25 April 1996)

ABSTRACT

The turbulence driven by ion temperature gradient, mass flow shear, parallel to the magnetic field, and the impurity ion density gradient in plasmas with multiple ion species is studied in a sheared slab magnetic configuration. The particle diffusion induced by the turbulence is obtained with quasi-linear fluid theory. The possible inward 'pinch' of the majority ions and the inward flow of the impurity ions, depending on plasma parameters, are both calculated, and the corresponding diffusion coefficients are given. It is shown that the increase of parallel velocity shear may have beneficial effects on plasma confinement. The correlations with Tokamak experimental observations are discussed.

PACC: 5225F; 5235R