

# 量子点电子态的尺寸效应和磁场的影响<sup>\*</sup>

解文方 陈传誉

(广州师范学院物理系, 广州 510400)

(1997 年 1 月 21 日收到)

在有效质量近似下, 使用少体物理的方法, 计算了在不同大小约束势情况下二维量子点三电子系统的自旋极化态的能谱. 结果显示幻数角动量是否出现, 主要取决于量子力学对称性、约束势大小及磁场的强度.

PACC: 7155; 6848

## 1 引 言

近年来, 由于晶体生长技术的发展, 对二维量子阱、一维量子线和零维量子点等低维量子结构的理论研究和实验研究越来越广泛, 已发展成为一个引人注目的新领域. 人们通过控制门电压, 可以使量子点内的电子数从 1 开始逐个增加, 从而形成少电子系统. 它们遵从量子力学规律, 有极强的量子效应. 1983 年 Laughlin<sup>[1]</sup>在研究分数霍尔效应时, 研究了在强磁场下受简谐势约束的三个电子二维系统的量子态问题, 他研究了最低 Landau 能级的自旋极化态, 指出具有幻数角动量  $L = 3k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 的态是基态. Girvin 等<sup>[2]</sup>分析了包含 3, 4, 5 个电子的少电子系统, 幻数角动量虽然不同, 但它们确实存在. 利用公式  $\nu = n_e(n_e - 1)/2L$ , 对应出  $L = 3k$  系列的分数填充因子, 得出相应的  $\nu$  的系列为 1, 1/2, 1/3, 1/4,  $\dots$ , 相应的基态便称为分数量子霍尔效应态. 但对于量子点内的电子系统, 为什么会出现幻数角动量, 一直没有较好的解释. 文献[3, 4]分别由量子力学对称性, 给出  $n_e = 3, 4$  个电子系统幻数角动量起源一个简单合理的解释. 量子点通过改变其线度能够容易地得到一些特殊的性质. 当线度减小时, 空间的约束会增强, 导致电子的动能增加, 而电子间的库仑作用的有效强度也会发生变化, 所以电子系统的能量会发生显著的变化, 以致于对电子系统的能谱结构也会发生显著的变化. 本文利用少体物理的方法计算了不同尺度量子点、三电子系统自旋极化态的能谱及与角动量间的关系. 观察磁场强度对能谱的影响, 从而得出量子点少电子系统电子态的一些性质.

## 2 理论模型和计算方法

计算在有效质量近似下进行. 考虑三个电子被简谐势约束在一个二维圆形小区域中,

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金和广东省自然科学基金资助的课题.

外磁场沿  $z$  轴方向,则系统的 Hamilton 量可以写为

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_{i=1}^3 \left( \hat{\mathbf{P}}_i + \frac{e\mathbf{A}_i}{c} \right)^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0 \sum_{i=1}^3 r_i^2 + \sum_{i>j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} - g^* \mu_B B \sum_i \hat{S}_{iz}, \quad (1)$$

其中  $m^*$  为电子有效质量,  $\mathbf{A}_i$  为矢量势,  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ,  $g^*$  为朗德因子,  $\mu_B$  为玻尔磁子,  $\omega_0$  是简谐势的圆频率. 取  $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ , 则有

$$H = \frac{1}{2m^*} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{P}}_i^2 + \frac{1}{2} m^* \omega^2 \sum_{i=1}^3 r_i^2 + \sum_{i>j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} + \frac{1}{2} \omega_c \sum_i \hat{L}_{iz} - g^* \mu_B B \sum_i \hat{S}_{iz}, \quad (2)$$

其中杂化频率  $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$ ,  $\omega_c = \frac{eB}{m^* c}$ . 引入质心坐标和 Jacobian 坐标  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ , 则质心运动和内部运动可以分离为

$$H = H_{\text{cm}} + H_i, \quad (3)$$

$H_i$  是内部运动的 Hamilton 量,

$$H_i = \frac{\hat{\mathbf{P}}_r^2}{2\mu_r} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_R^2}{2\mu_R} + \sum_{i>j} U(r_{ij}) - g^* \mu_B B \sum_i \hat{S}_{iz} + \frac{1}{2} \omega_c \sum_i \hat{L}_{iz}, \quad (4)$$

其中

$$\mu_r = \frac{m^*}{2}, \quad \mu_R = \frac{2m^*}{3},$$

$$U(r_{ij}) = \frac{1}{6} m^* \omega^2 r_{ij}^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}}. \quad (5)$$

$U(r_{ij})$  存在一个势能为极小值的距离  $r_{ij} = r_0 = (3e^2/4\pi m^* \epsilon \omega^2)^{1/3}$ . 当三个电子之间的距离为  $r_0$  时, 系统的总势能  $\sum_{i>j} U(r_{ij})$  最低.  $H_{\text{cm}}$  是质心运动的 Hamilton 量, 质心运动简单的就像一个二维谐振了, 所以以下我们仅讨论内部运动.

对自旋为 1/2 的三电子系统, 全反对称化的本征函数可以展开为

$$\tilde{\Psi} = \hat{A} | \varphi_{n_1 l_1}(\mathbf{r}) \varphi_{n_2 l_2}(\mathbf{R}) \chi_s^S |, \quad (6)$$

其中  $\varphi_{nl}$  是频率为  $\omega$  的二维谐振子波函数, 且能量为  $(2n + |l| + 1)\hbar\omega$ ,  $l$  是轨道角动量;  $\chi_s^S$  是自旋波函数,

$$\chi_s^S = [(\xi(1) \xi(2))_s \xi(3)]_S. \quad (7)$$

$\xi(i)$  是第  $i$  个粒子的自旋波函数, 角标  $s$  是 1 和 2 两个粒子组成子系统的自旋量子数, 角标  $S$  是三电子系统的总自旋量子数;  $\hat{A}$  是反对称化算符. 波函数的全反对称化采用二维的 Tamil-Moshinsky 系数<sup>[5]</sup>.

### 3 量子尺寸效应

我们取  $\epsilon_r = 13.1$ ,  $m^* = 0.067 m_e$ , 利用文献[5]中的计算方法, 对三电子系统的能量进行了计算. 图 1 给出  $\hbar\omega_0$  分别为 0.01, 0.1, 1.0, 10.0 meV 时, 自旋极化态的能量和角动量的关系.

从图 1(a) 可以看出, 极化态的角动量满足  $L = 3k$  ( $k$  为整数) 时能量较低, 具有幻数

角动量特点. 但当  $\hbar\omega_0 = 0.1 \text{ meV}$  (图 1(b)),  $L > 6$  以后不再出现幻数角动量.  $\hbar\omega_0$  继续增大, 则  $L = 6$  的幻数角动量都消失了, 而且  $L > 6$  后, 能量与角动量成线性关系 (见图 1

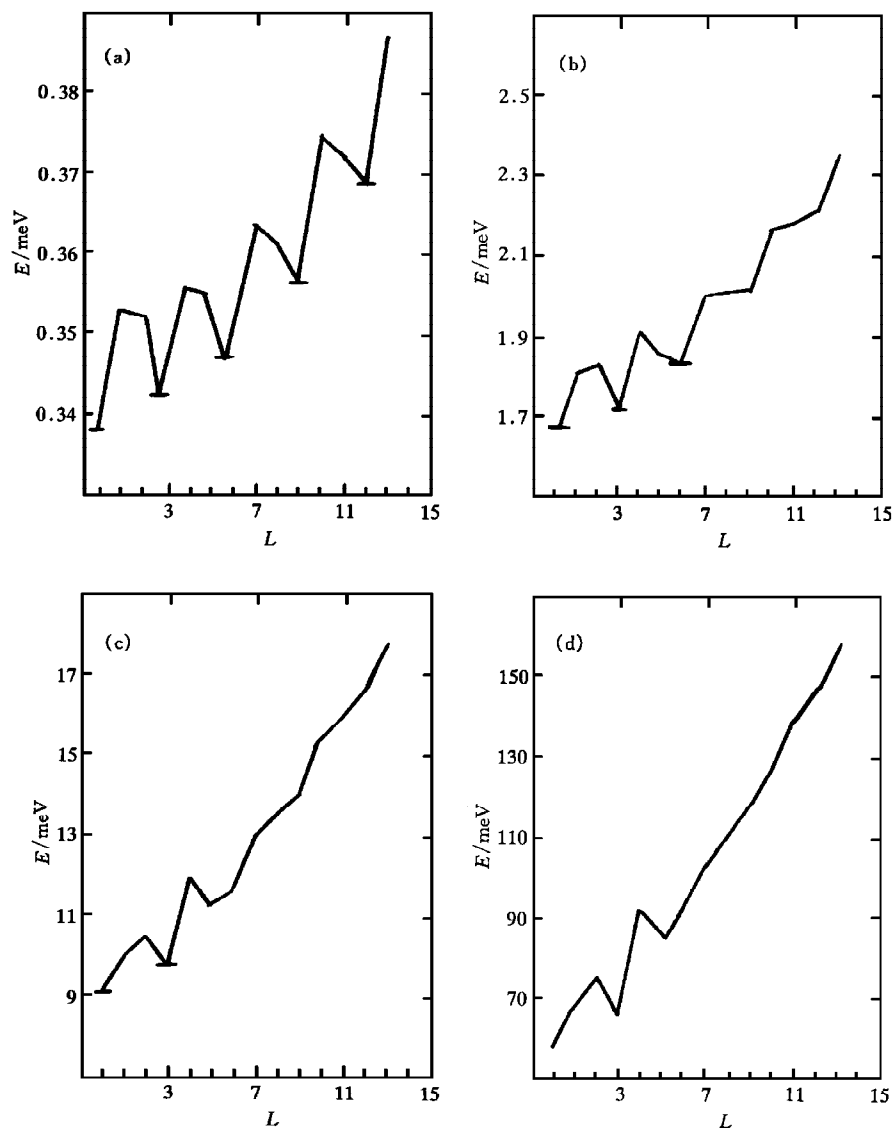


图 1 三电子系统极化态的能量和角动量间的关系 (a)为  $\hbar\omega_0 = 0.01 \text{ meV}$ ; (b)为  $\hbar\omega_0 = 0.1 \text{ meV}$ ; (c)为  $\hbar\omega_0 = 1.0 \text{ meV}$ ; (d)为  $\hbar\omega_0 = 10.0 \text{ meV}$

(c), (d)). 显然当  $\hbar\omega_0$  增大时, 量子点的线度减小, 空间上对电子的约束增强, 导致电子的动能增加, 当然电子间的库仑作用的有效强度也会增加. 但动能的增加要比势能增加得快. 如当  $\hbar\omega_0 = 0.01 \text{ meV}$  时, 三电子系统取能态较低的正三角形 ( $r_0 = 4.624 \text{ nm}$ ) 结构, 则  $U(r_0) = 0.318 \text{ meV}$ , 从图 1(a) 中可以看出, 电子态的能量中势能占主导地位. 所以系统尽可能取几何结构对称性高的, 使得系统的能量尽可能地低, 结构更稳定. 但当  $\hbar\omega_0$  增加到  $1.0 \text{ meV}$  时, 体系若取边长  $r_0 = 0.2146 \text{ nm}$  (最佳值) 的等边三角形结构,  $U(r_0) = 6.86$

meV. 而取边长为  $0.17, 0.21, 0.30 \text{ nm}$  的三角形时, 总势能  $U = 7.26 \text{ meV}$ . 对于角动量较大 ( $L > 6$ ) 的态, 电子动能的增加已远大于由于采取不同几何结构而引起的势能变化 (见

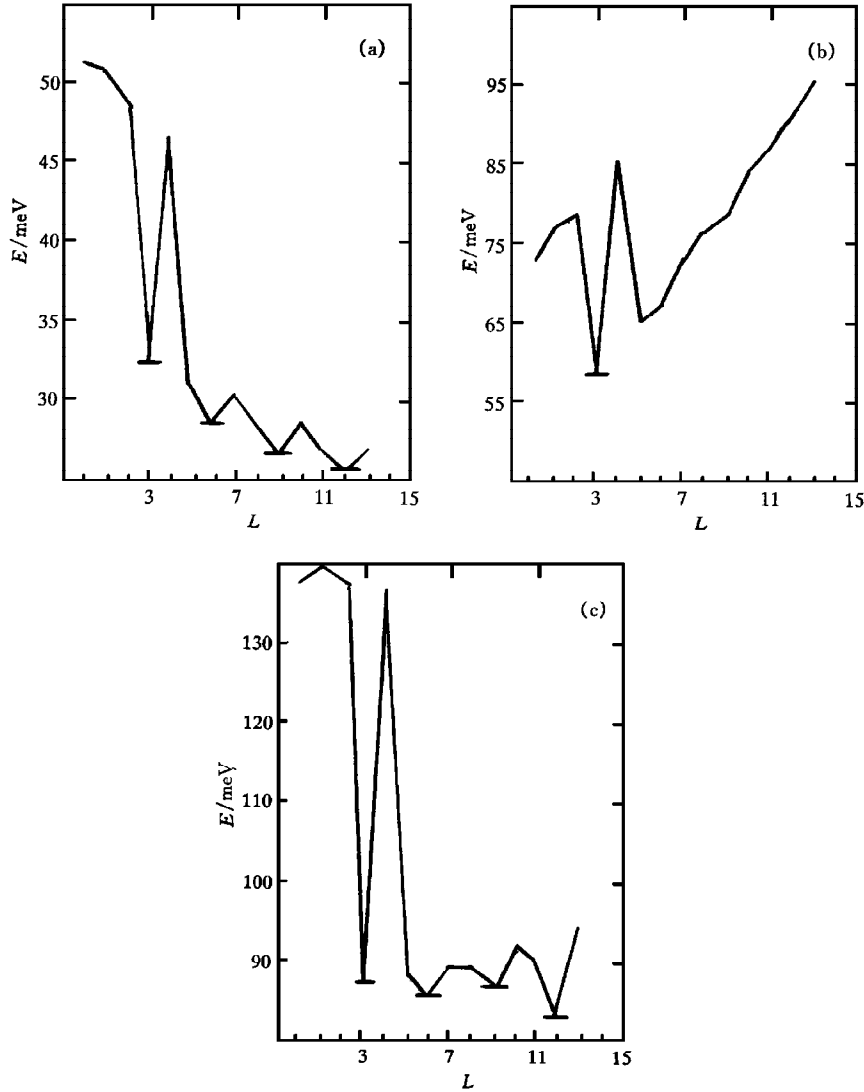


图2 磁场中三电子系统白旋极化态能量与角动量间的关系 (a)为  $B=10 \text{ T}$ ,  $\hbar\omega_0=1.0 \text{ meV}$ ; (b)为  $B=10 \text{ T}$ ,  $\hbar\omega_0=10.0 \text{ meV}$ ; (c)为  $B=30 \text{ T}$ ,  $\hbar\omega_0=10.0 \text{ meV}$

图 1(c)), 所以这种由于电子组态不同结构引起的势能改变不再能观察出来 (但系统仍然尽量取对称性较高的几何结构). 能量随  $L$  的增加而单调增加, 从图上不再看出幻数角动量的特征. 由图 1(c), 可以得出对于  $\hbar\omega_0=1.0 \text{ meV}$ , 能量与角动量间的关系为

$$E = U(r_0) + 0.8217 L \quad (L > 6), \quad (8)$$

同样, 对于  $\hbar\omega_0=10.0 \text{ meV}$ , 也可以得到类似的关系式

$$E = U(r_0) + 9.95 L \quad (L > 5), \quad (9)$$

其中  $U(r_0) = 31.84 \text{ meV}$ .

#### 4 磁场的作用

图 2 给出磁场中三电子系统自旋极化态能量与角动量间的关系.

从图 2(a) 可以看出, 磁场效应与增大约束是相反效应. 此时角动量满足  $L = 3k$  的能量比相邻的要低, 可以看出幻数角动量的特征. 另外我们可以看出在有磁场时,  $L = 0$  的态能量较高, 而在无磁场存在时,  $L = 0$  的态能量最低. 由于 Laughlin 是在强磁场下观察到幻数角动量的, 所以  $L = 0$  的态不包括在内. 若从量子力学对称性分析,  $L = 0$  也应是幻数角动量. 图 2(b) 显示了如果保持  $B = 10 \text{ T}$  不变, 而使约束势  $\hbar\omega_0$  增大到  $10.0 \text{ meV}$ , 此时当  $L > 6$ , 幻数角动量不再能观察到. 图 2(c) 显示了在增大约束势的同时也增大磁场强度, 则仍然可以观察到幻数角动量.

综上所述, 量子点中的少电子系统的幻数角动量的出现, 主要取决于量子力学对称性、约束势的大小及磁场强度的大小.

- [1] R. B. Laughlin, *Phys. Rev.*, **B27**(1983), 3383.
- [2] S. M. Girvin, J. Jach, *Phys. Rev.*, **B28**(1983), 4506.
- [3] W. Y. Ruan, Y. Y. Liu, C. G. Bao *et al.*, *Phys. Rev.*, **B51**(1995), 7942.
- [4] Bao Chengguang, Ruan Wenying, Liu Youyang, *Phys. Rev.*, **B53**(1996), 10820.
- [5] W. Y. Ruan, *J. Math. Phys.*, **37**(1996), 3760.

## THE SIZE EFFECT OF ELECTRONIC STATES OF QUANTUM DOTS AND THE INFLUENCES OF MAGNETIC FIELDS

XIE WEN-FANG CHEN CHUAN-YU

(Department of Physics, Guangzhou Teachers' College, Guangzhou 510400)

(Received 21 January 1997)

### ABSTRACT

Within the effective mass approximation, the energy spectra of the three-electron system in two-dimensional quantum dots subjected to different confinement potential are calculated by using the method of few-body physics. The results show that the appearance of magic angular momentum arises from the quantum mechanical symmetry, the size of confinement potential and the strength of magnetic field.

PACC: 7155; 6848