第 47 卷 第 7 期 1998 年 7 月
1000-3290/98/47(7)/1071-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.47, No.7, July, 1998

含时谐振子系统的时间演化及压缩态

党兰芬
(河北大学物理系,保定 071002)
(1997 年 6 月 27 日收到;1997 年 12 月 19 日收到修改稿)

研究了有压缩和驱动项的含时谐振子系统的时间演化.通过适当选取厄密不变量,得到含时谐振子系统的量子态时间演化的封闭解及该系统的时间演化算符,给出产生压缩态的条件,得出驱动项不影响系统压缩态的结论.

PACC: 0413

1 引 言

含时哈密顿量的动力学系统的时间演变,因其广泛的应用价值成为近年人们感兴趣的研究课题.对该系统研究的典型方法有 LR 不变量理论,即用厄密不变量研究含时体系的动力学和量子化[1—4],还有 Berry 相位理论,即用 Berry 相位理论研究经典抽运简单参量量子放大器[5—7].LR 不变量理论的要点是寻找一厄密不变量,并以其本征态为基矢来求解含时系统,得到其精确的量子态时间演化.本文通过适当选取厄密不变量,对有压缩和驱动项的含时谐振子系统进行讨论,推广了文献[4,6]的模型,得出较文献[4,6]更有普遍意义的结论.给出系统压缩态产生的条件,并分析了影响压缩态的有关因素.

2 厄密不变量、量子态时间演化和 LR 几何相位

本文讨论的含时哈密顿算符有如下形式:

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + G(t)[\hat{a}^{+2}\exp(\mathrm{i}\phi(t)) + \hat{a}^{2}\exp(-\mathrm{i}\phi(t))] + Q(t)[(\hat{a}^{+}\exp(\mathrm{i}\varphi(t)) + \hat{a}\exp(-\mathrm{i}\varphi(t))] + g(t), \tag{1}$$

其中 $\hat{a}^{+}$ 和 $\hat{a}$ 是通常的玻色子产生算符和湮没算符,$\omega(t)$, $G(t)$, $Q(t)$, $\phi(t)$, $\varphi(t)$ 和 $g(t)$ 均是任意的实时间函数,等号右端第二项代表压缩,第三项代表驱动.为了简单,以下将时间 t 的函数 $f(t)$ 均记为 f,将 $f(0)$ 记为 f_0.

量子态的时间演化遵从 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \tag{2}$$

(使用自然单位制 $\hbar=1$, $c=1$).假定存在一厄密不变量 $\hat{I}(t)$,满足条件

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) + [\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0, \tag{3}$$

问题的关键是利用厄密算符 $\hat{K}_0=\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}$ 的幺正变换来构造这个厄密不变量.引入

$$\hat{I}(t)=\hat{D}(z(t))\hat{S}(\zeta(t))\hat{K}_0\hat{S}^+(\zeta(t))\hat{D}^+(z(t)), \tag{4}$$

其中 $\hat{D}(z(t))$ 是平移算符,其定义为

$$\hat{D}(z)=\exp(z\hat{a}^+-z^*\hat{a}), \tag{5}$$

$\hat{S}(\zeta(t))$ 是压缩算符,其定义为

$$\hat{S}(\zeta)=\exp\left(\frac{1}{2}\zeta^*\hat{a}^2-\frac{1}{2}\zeta\hat{a}^{+2}\right), \tag{6}$$

其中

$$z(t)=r(t)\exp(\mathrm{i}\delta(t)),\quad \zeta(t)=s(t)\exp(\mathrm{i}\theta(t))\quad (s(t)\geqslant 0, 0\leqslant\theta(t)\leqslant 2\pi), \tag{7}$$

并且, $r(t)$, $s(t)$, $\delta(t)$ 和 $\theta(t)$ 均是实时间函数,采用上面的记号,可简记为 r, s, δ 和 θ,这4个参量要由(1)和(3)式来确定.利用下面关系式:

$$\begin{aligned}\hat{S}\hat{a}\hat{S}^+&=\hat{a}\cosh s+\hat{a}^+\sinh s\exp(\mathrm{i}\theta),\\ \hat{S}\hat{a}^+\hat{S}^+&=\hat{a}^+\cosh s+\hat{a}\sinh s\exp(-\mathrm{i}\theta),\\ \hat{D}\hat{a}\hat{D}^+&=\hat{a}-z,\\ \hat{D}\hat{a}^+\hat{D}^+&=\hat{a}^+-z^*,\end{aligned} \tag{8}$$

容易求得

$$\begin{aligned}\hat{I}(t)=&\hat{K}_0\cosh 2s+\frac{1}{2}\hat{a}^{+2}\sinh 2s\exp(\mathrm{i}\theta)+\frac{1}{2}\hat{a}^2\sinh 2s\exp(-\mathrm{i}\theta)\\ &-\hat{a}^+f-\hat{a}f^*+h,\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}f&=z\cosh 2s+z^*\sinh 2s\exp(\mathrm{i}\theta)=r[\cosh 2s\exp(\mathrm{i}\delta)+\sinh 2s\exp(\mathrm{i}(\theta-\delta))],\\ h&=z^*z[\cosh 2s+\sinh 2s\cos(2\delta-\theta)]=r^2[\cosh 2s+\sinh 2s\cos(2\delta-\theta)].\end{aligned} \tag{10}$$

由(1)和(9)式可求得 $\hat{I}(t)$ 与 $\hat{H}(t)$ 的对易关系

$$\begin{aligned}[\hat{I}(t),\hat{H}(t)]=&[2\cosh 2s\,G\exp(\mathrm{i}\phi)-\omega\sinh 2s\exp(\mathrm{i}\theta)]\hat{a}^{+2}\\ &-[2\cosh 2s\,G\exp(-\mathrm{i}\phi)-\omega\sinh 2s\exp(-\mathrm{i}\theta)]\hat{a}^2\\ &+2\sinh 2s\,G\mathrm{i}\sin(\phi-\theta)(\hat{a}\hat{a}^++\hat{a}^+\hat{a})\\ &+[Q\cosh 2s\exp(\mathrm{i}\varphi)-Q\sinh 2s\exp(\mathrm{i}(\theta-\varphi))-2f^*G\exp(\mathrm{i}\phi)\\ &+f\omega]\hat{a}^+-[Q\cosh 2s\exp(-\mathrm{i}\varphi)-Q\sinh 2s\exp(-\mathrm{i}(\theta-\varphi))\\ &-2fG\exp(-\mathrm{i}\phi)+f^*\omega]\hat{a}+Q[f\exp(-\mathrm{i}\varphi)-f^*\exp(\mathrm{i}\varphi)].\end{aligned} \tag{11}$$

将(9)和(11)式代入(3)式,经运算可知 r, s, θ 和 δ 满足下述辅助方程:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2G\sin(\theta-\phi), \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 4G\coth 2s\cos(\theta - \phi) - 2\omega, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}Q[f\exp(-\mathrm{i}\varphi) - f^*\exp(\mathrm{i}\varphi)], \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\{2Gf^*\exp(\mathrm{i}\phi) - \omega f - Q[\cosh 2s\exp(\mathrm{i}\varphi) - \sinh 2s\exp(\mathrm{i}(\theta - \varphi))]\}. \tag{15}$$

求解(12)和(13)式即可求出 s 和 θ. 将 s 和 θ 代入(14)和(15)式,可求出 r 和 δ 或 z^* 和 z. 由(9)式给出的 $\hat{I}(t)$即可完全确定. 可以证明 $\hat{I}(t)$是厄密的. 设$|n\rangle$为算符 $\hat{K}_0$ 的本征态,即

$$\hat{K}_0|n\rangle = K_n|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle. \tag{16}$$

显然 $\hat{I}(t)$的本征态为 $\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)|n\rangle$,简记为$|z,\zeta,n\rangle$,即

$$\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)|n\rangle = |z,\zeta,n\rangle. \tag{17}$$

这是因为

$$\hat{I}(t)\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)|n\rangle = \hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)\hat{K}_0\hat{S}^+(\zeta)\hat{D}^+(z)\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)|n\rangle = K_n|z,\zeta,n\rangle. \tag{18}$$

由 $\sum|n\rangle\langle n| = 1$ 及$(\hat{D}\hat{S})^+(\hat{D}\hat{S}) = 1$ 可知态 $|z,\zeta,n\rangle$ 是完备的,即

$$\sum|z,\zeta,n\rangle\langle z,\zeta,n| = 1. \tag{19}$$

按照 LR 不变量理论[2],含时 Schrödinger 方程(2)的通解可用 $\hat{I}(t)$的本征态表示为

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n\exp(\mathrm{i}\alpha_n)|z,\zeta,n\rangle = \sum_n C_n\exp(\mathrm{i}\alpha_n)\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)|n\rangle, \tag{20}$$

其中

$$\alpha_n = \int_0^t\langle z,\zeta,n|\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(t')|z,\zeta,n\rangle\mathrm{d}t', \tag{21}$$

等号右端第一项为 LR 几何相位,记为 γ_n,第二项为动力学相位,记为 β_n.

利用下面关系式:

$$\hat{D}(z) = \exp(z\hat{a}^+)\exp(-z^*\hat{a})\exp\left(-\frac{1}{2}z^*z\right),$$

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\exp(\mathrm{i}\theta)\tanh s\hat{a}^{+2}\right]\exp[-\ln\cosh s\hat{K}_0]\exp\left[\frac{1}{2}\exp(-\mathrm{i}\theta)\tanh s\hat{a}^2\right],$$

$$\hat{D}^+\hat{a}\hat{D} = \hat{a} + z,$$

$$\hat{D}^+\hat{a}^+\hat{D} = \hat{a}^+ + z^*,$$

$$\hat{S}^+\hat{a}\hat{S} = \hat{a}\cosh s - \hat{a}^+\sinh s\exp(\mathrm{i}\theta),$$

$$\hat{S}^+\hat{a}^+\hat{S} = \hat{a}^+\cosh s - \hat{a}\sinh s\exp(-\mathrm{i}\theta),$$

$$\hat{S}^+\hat{K}_0\hat{S} = \cosh 2s\hat{K}_0 - \frac{1}{2}\hat{a}^{+2}\sinh 2s\exp(\mathrm{i}\theta) - \frac{1}{2}\hat{a}^2\sinh 2s\exp(-\mathrm{i}\theta),$$

$$\hat{S}^+\hat{a}^{+2}\hat{S} = \hat{a}^{+2}\cosh^2 s - \hat{K}_0\sinh 2s\exp(-\mathrm{i}\theta) + \hat{a}^2\sinh^2 s\exp(-2\mathrm{i}\theta),$$

$$\hat{S}^{+}\hat{a}^{2}\hat{S}=\hat{a}^{2}\cosh^{2}s-\hat{K}_{0}\sinh 2s\exp(\mathrm{i}\theta)+\hat{a}^{+2}\sinh^{2}s\exp(2\mathrm{i}\theta),\tag{22}$$

可算得 LR 几何相位和动力学相位

$$\gamma_{n}=\int_{0}^{t}\langle z,\zeta,n|\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}|z,\zeta,n\rangle\mathrm{d}t'$$
$$=\int_{0}^{t}\frac{\mathrm{i}}{2}[z^{*}\dot{z}-\dot{z}^{*}z]\mathrm{d}t'-K_{n}\int_{0}^{t}\dot{\theta}\sinh^{2}s\,\mathrm{d}t',\tag{23}$$

$$\beta_{n}=-\int_{0}^{t}\langle z,\zeta,n|\hat{H}(t')|z,\zeta,n\rangle\mathrm{d}t'$$
$$=-K_{n}\int_{0}^{t}[\omega\cosh 2s-2G\sinh 2s\cos(\phi-\theta)]\mathrm{d}t'$$
$$-\int_{0}^{t}[\omega z^{*}z+G(\exp(\mathrm{i}\phi)z^{*2}+\exp(-\mathrm{i}\phi)z^{2})$$
$$+Q(\exp(\mathrm{i}\varphi)z^{*}+\exp(-\mathrm{i}\varphi)z)+g]\mathrm{d}t',\tag{24}$$

其中 $\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t'}$, $\dot{z}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t'}$.

3 时间演化算符

令

$$\alpha_{n}=-\varepsilon K_{n}+\sigma,\tag{25}$$

则

$$\varepsilon=\int_{0}^{t}[\dot{\theta}\sinh^{2}s+\omega\cosh 2s-2G\sinh 2s\cos(\phi-\theta)]\mathrm{d}t',\tag{26}$$

$$\sigma=\int_{0}^{t}\Big\{\frac{\mathrm{i}}{2}(\dot{z}z^{*}-\dot{z}^{*}z)-\omega z^{*}z-G[\exp(\mathrm{i}\phi)z^{*2}+\exp(-\mathrm{i}\phi)z^{2}]$$
$$-Q[\exp(\mathrm{i}\varphi)z^{*}+\exp(-\mathrm{i}\varphi)z]-g\Big\}\mathrm{d}t'.\tag{27}$$

当 $t=0$ 时,系统的量子态为

$$|\Psi(0)\rangle=\hat{D}(z_{0})\hat{S}(\zeta_{0})\sum_{n}C_{n}|n\rangle,\tag{28}$$

因而

$$\sum_{n}C_{n}|n\rangle=\hat{S}^{+}(\zeta_{0})\hat{D}^{+}(z_{0})|\Psi(0)\rangle,\tag{29}$$

所以由(20)式给出的时间演化量子态为

$$|\Psi(t)\rangle=\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)\exp(-\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_{0})\exp(\mathrm{i}\sigma)\hat{S}^{+}(\zeta_{0})\hat{D}^{+}(z_{0})|\Psi(0)\rangle.\tag{30}$$

显然系统的时间演变算符为

$$\hat{U}(t,0)=\hat{D}(z)\hat{S}(\zeta)\exp(-\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_{0})\exp(\mathrm{i}\sigma)\hat{S}^{+}(\zeta_{0})\hat{D}^{+}(z_{0}),\tag{31}$$

$$\hat{U}^{+}(t,0)=\hat{D}(z_{0})\hat{S}(\zeta_{0})\exp(\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_{0})\exp(-\mathrm{i}\sigma)\hat{S}^{+}(\zeta)\hat{D}^{+}(z).\tag{32}$$

在 Heisenberg 表象中,算符的时间演变由下式给出:

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^{+}(t,0)\hat{A}(0)\hat{U}(t,0). \tag{33}$$

4 系统的压缩态

考虑由(1)式给出的哈密顿量所描述的系统,使用(23)式给出的时间演变算符,不难算出玻色子产生和湮没算符的时间演变

$$\hat{a}(t) = \hat{U}^{+}(t,0)\hat{a}\hat{U}(t,0), \tag{34}$$

$$\hat{a}^{+}(t) = \hat{U}^{+}(t,0)\hat{a}^{+}\hat{U}(t,0), \tag{35}$$

并注意到

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_0)\hat{a}\exp(-\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_0) &= \hat{a}\exp(-\mathrm{i}\varepsilon), \\ \exp(\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_0)\hat{a}^{+}\exp(-\mathrm{i}\varepsilon\hat{K}_0) &= \hat{a}^{+}\exp(\mathrm{i}\varepsilon). \end{aligned} \tag{36}$$

利用(22)式,经运算可得

$$\begin{aligned} \hat{a}(t) &= f_1(t)\hat{a} + f_2(t)\hat{a}^{+} + f_3(t), \\ \hat{a}^{+}(t) &= f_1^{*}(t)\hat{a}^{+} + f_2^{*}(t)\hat{a} + f_3^{*}(t), \end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$f_1(t) = \cosh s_0 \cosh s \exp(-\mathrm{i}\varepsilon) - \sinh s_0 \sinh s \exp[\mathrm{i}(\varepsilon + \theta - \theta_0)], \tag{38}$$

$$f_2(t) = \sinh s_0 \cosh s \exp[-\mathrm{i}(\varepsilon - \theta_0)] - \cosh s_0 \sinh s \exp[\mathrm{i}(\varepsilon + \theta)], \tag{39}$$

$$f_3(t) = z - z_0 f_1 - z_0^{*} f_2. \tag{40}$$

设系统初始时刻处在相干态$|\alpha\rangle$,即 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$,则 $t>0$ 以后系统将处于时间演化量子态

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)|\alpha\rangle. \tag{41}$$

下面证明它可以是压缩态.定义两个正交算符

$$\hat{X} = \frac{1}{2}(\hat{a}^{+} + \hat{a}), \quad \hat{Y} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\hat{a}^{+} - \hat{a}), \tag{42}$$

利用(31),(32),(37),(41)和(42)式,可算出 $\hat{X}$和 $\hat{Y}$的偏差为

$$<(\Delta\hat{X})^2> = \frac{1}{4}(f_2^{*} f_2 + f_1^{*} f_1 + f_1^{*} f_2^{*} + f_1 f_2), \tag{43}$$

$$<(\Delta\hat{Y})^2> = \frac{1}{4}(f_2^{*} f_2 + f_1^{*} f_1 - f_1^{*} f_2^{*} - f_1 f_2). \tag{44}$$

下面分析产生压缩态的条件.因为 s_0, θ_0 和 z_0 是辅助方程(12)—(15)所满足的初始条件,该初始条件并不影响利用厄密不变量 $\hat{I}(t)$求解系统的时间演化.在文献[4]中直接认为 s 是一个从 0 到 t 的积分,即认为 $s_0=0$.实际上,因为 s 表示压缩因子,$s_0=0$ 表示初始时刻系统无压缩,随着时间的演化,系统才有可能处于压缩态,所以假设 $s_0=0$ 具有一般意义.在 $s_0=0$ 的条件下,由(38),(39),(43)和(44)式,可得

$$<(\Delta\hat{X})^2> = \frac{1}{4}(\cosh 2s - \sinh 2s\cos\theta),$$

$$< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{4}(\cosh 2s + \sinh 2s \cos\theta). \tag{45}$$

由(45)式可知 $\hat{X}$分量被压缩的条件为

$$\cos\theta > \tanh s. \tag{46}$$

特别是当 $\theta=0$ 时，$<(\Delta\hat{X})^2><(\Delta\hat{Y})^2>$达最小值

$$< (\Delta \hat{X})^2 > = \frac{1}{4}\exp(-2s),$$

$$< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{4}\exp(2s), \tag{47}$$

$$< (\Delta \hat{X})^2 >< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{16}.$$

由(45)式可知 $\hat{Y}$分量被压缩的条件为

$$\cos\theta < -\tanh s. \tag{48}$$

特别是当 $\theta=\pi$ 时，$<(\Delta\hat{X})^2><(\Delta\hat{Y})^2>$达最小值

$$< (\Delta \hat{X})^2 > = \frac{1}{4}\exp(2s),$$

$$< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{4}\exp(-2s), \tag{49}$$

$$< (\Delta \hat{X})^2 >< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{16}.$$

对于其他角度测不准量较大，极大条件是 $\theta=\pi/2$ 或 $\theta=3\pi/2$，极大值为

$$< (\Delta \hat{X})^2 >< (\Delta \hat{Y})^2 > = \frac{1}{16}\cosh^2 2s. \tag{50}$$

5 讨 论

当 $Q(t)=0$ 时，(1)式给出的哈密顿算符与文献[4]所给含时 SU(1,1)算子所描述的系统一致．因为 $z=0$ 是方程(14)和(15)的特解，从而，平移算符变为 $\hat{D}(z)=1$，厄密不变量算符变为 $\hat{I}(t)=\hat{S}(\zeta)\hat{K}_0\hat{S}^+(\zeta)$，此时，由(30)，(31)和(32)式给出的时间演化量子态和时间演化算符与文献[4]所给结果一致．因此，本文推广了文献[4,6]的模型．

从产生压缩态的条件(46)和(48)式及辅助方程(12)—(15)可看出，压缩效应只与 $\omega(t)$，$G(t)$有关，而与含 $Q(t)$的驱动项无关．因驱动项只影响参量 z，不影响均方差，故驱动项对压缩态无影响．这些结论比文献[4]在特殊情况下所得结论更具有一般性．由本文所给出的时间演化量子态和时间演化算符，还可计算由(1)式所描述的系统的其他物理效应，如玻色子分布、聚束效应和反聚束效应等．

[1] H.R.Lewis, Jr., *Math. Phys.*, **9**(1968), 1976.
[2] H.R.Lewis, Jr., W.B.Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10**(1969), 1458.
[3] J.B.Xu, T.Z.Qian, X.C.Gao, *Phys. Lett.*, **A159**(1991), 113.

[4] Lai Yun-zhong, Liang Jiu-qing, *Acta Physica Sinica*, **45**(1996), 738(in Chinese).
[5] M.V.Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A392**(1984), 45.
[6] C.C.Gerry, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 3204.
[7] Gao Xiao-chun, Xu Jing-bo, Qian Tie-zheng, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 25(in Chinese).

TIME EVOLUTION AND SQUEEZED STATES OF A TIME-DEPEDENT OSCILLATOR SYSTEM

DANG LAN-FEN
(*Department of Physics, Hebei University, Baoding* 071002)
(Received 27 June 1997; revised manuscript received 19 December 1997)

ABSTRACT

In this paper are discussed the time evolution and squeezed states of a time-depedent oscillator system. We obtain closed formulas for the time evolution of quantum states and the evolution operator of the system by selecting proper Hermitian invariant operator. We derive the condition generating squeezed states and obtain that the drive part does not influence the squeezed states of the system.

PACC: 0413