

V 型阵发李雅普诺夫指数标度律的验证^{*}

范建平

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

侯榆青

(西北大学电子科学系, 西安 710069)

汪颖梅 何大韧[†]

(扬州大学师范学院物理系, 扬州 225002)

吴顺光

(西北大学物理系, 西安 710069)

(1997 年 7 月 10 日收到; 1997 年 11 月 14 日收到修改稿)

报道在一个张弛振荡电路中获得的 V 型阵发李雅普诺夫指数标度律的实验证据. 对这个电路的理论模型进行了数值计算, 所得结果与实验一致.

PACC: 0545

1 引 言

由周期或准周期向混沌的过渡曾是 70 年代末、80 年代初大家关心的研究课题^[1]. 由周期向混沌过渡的类型至今只发现两种, 即倍周期分岔和阵发. 然而, 阵发的类型有了很大增长. 除 Pomeau 和 Manneville 建议的 I, II, III 型阵发^[2]外, 还有 Grebogi 等人建议的“激变导致阵发”^[3], He 等人建议的“V 型阵发”^[4], 以及 Platt 等人建议的“开关型阵发”^[5]. 其中 V 型阵发仅发生在“分段光滑”, 即函数值或其某阶导数在定义域的某个子集上不连续的系统. 这个子集称为“不连续集”. 当一个稳定周期轨道与不连续集碰撞时, 这个周期轨道将通过一个“不连续分岔”^[6]或称“边界碰撞分岔”^[7]而失稳. Nusse 等人曾讨论了决定在这样一个分岔后出现一个新的周期吸引子, 还是出现一个混沌吸引子的条件^[7]. 刚产生的混沌吸引子常常把绝大多数时间耗费在一个以“原周期轨道与不连续集碰撞的位置”为终点的、被称为“隧道”的区域中, 看起来以某个一定规律叠代, 只有极少数时间才作离开隧道的、看起来好像随机的叠代. 这就称为 V 型阵发. 随着控制参数逐步远离发生阵发的阈值, 叠代离开隧道的时间也逐步加长. 通常规定每次进入隧道后在其中运动的时间为“层流相长度” l , l 对时间的长期平均值称“平均层流相长度” $\langle l \rangle$. He 等人

^{*} 国家自然科学基金资助的课题(批准号: 19575037).

[†] 通讯联系人.

用解析与数值方法证明了 V 型阵发平均层流相遵循 $\langle l \rangle = h \ln \epsilon + g = h \ln |A - A_c| + g$ 的规律^[4], 其中 A 为系统的控制参数, A_c 为 A 的阵发阈值, g 和 h 为常数; 各 l 的概率分布函数 $P(l)$ 为一个 l 的双曲正割函数^[8]. 这两种主要的规律已在一个电子张弛振子^[8,9]、一个辉光放电系统^[10]及一种锗自激振荡系统^[11]中得到了实验验证. 除了这两种性质之外, 阵发的另一条重要规律是标志叠代长期行为对初值依赖的敏感程度的李雅普诺夫指数随 ϵ 的变化. 1995 年, Wu 等人^[12]和 Lamba, Budd^[6]两个小组相互独立地用解析和数值方法证明了 V 型阵发的李雅普诺夫指数标度律为 $\lambda = \alpha \frac{1}{\ln \epsilon} + \beta$, 其中 α 和 β 也为常数. 这是对李雅普诺夫指数标度律得到解析结果的少数例子之一. 这条重要规律至今尚未见到实验验证. 本文将报道在一种电子张弛振荡电路中获得的这种标度律的实验证据.

2 实验系统

用来验证上述李雅普诺夫指数标度律的实验系统是文献[9]已报道过的电子张弛振荡电路. 在电路中, 两个电子开关 S_1 , S_2 分别使一个恒压源 E 向一个电容 C 充电或使 C 放电. S_1 , S_2 的动作受一个函数发生器产生的正弦波 $U_0 \sin \omega t$ 的控制. 当 C 两端电压 U_a 达到一个由此正弦波调制的上阈值 $T(t) = U_{\max} + U_0 \sin \omega t$ 时, S_1 打开, S_2 合上, 使 C 放电; 当 U_a 降到下阈值 $U_{\min}$ (常量) 时, S_1 合上, S_2 打开, 又使 C 充电, 如此不断张弛振荡. 上阈值调制正弦波的频率 ω 和幅度 U_0 均由一个单片机控制, 可以以极高的精度调节. U_a 每相邻两次达到下阈值的时间间隔或相应的上阈值位相差也由单片机以很高的精度记录, 并在数值化后输入计算机进行处理.

文献[9]已解析导出了描述此系统的映象 $x_{n+1} = f(x_n)$, 其中 x_n , x_{n+1} 是张弛振荡达到下阈值处对应的上阈值调制信号位相. 本文中此映象各参数值 A_i , B_i , C_i ($i=1, 2$) 也与文献[9]相同, ω 固定为 7500 Hz, U_0 选为控制参数.

3 V 型阵发

文献[9]已报道过映象 $x_{n+1} = f(x_n)$ 在 $U_0 = U_{0c}$ (其值在 2.713—2.72 V 之间) 发生的 V 型阵发, 并发表了数值和实验得到的、在 V 型阵发阈值前后的“回归映象图”. 图中显示了一个稳定三周期轨道在 $U_0 = U_{0c}$ 处与映象的一个不连续点的碰撞, 以及碰撞后形成的 V 型阵发隧道. 我们最近对此例阵发作了更仔细的数值研究. 图 1 示出我们数值得到的 U_0 在 2.714—2.718 V 范围的分岔图, 可清楚地看到一个三周期轨道在 $U_0 = U_{0c}$ 处突然转变为混沌. 不断放大突然转变发生的部分, 可以精确地得到阵发的临界值 $U_{0c} = 2.7152065$ V. 图 1 中混沌区域分为 4 片. 右边与三条周期轨道相连的三个混沌片对应着回归映象中的隧道, 即层流运动, 而左边孤立的一个混沌片则对应逸出隧道期间的叠代.

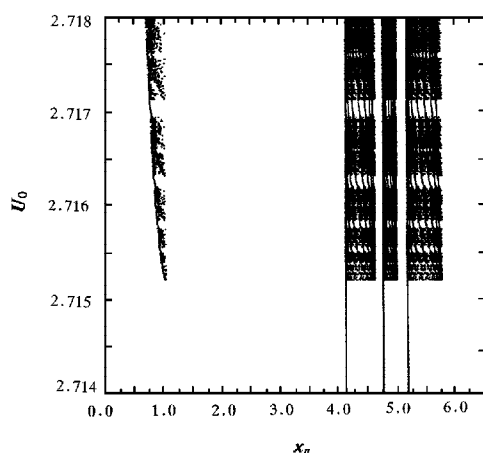


图1 数值得到的映象 $x_{n+1} = f(x_n)$ 的分岔图 对每个 U_0 值略去 500 次叠代后, 记录 200 次得到. 固定初值 $x_0 = 0.1$

4 李雅普诺夫指数的计算与测量

由上述映象容易解析得到一个叠代轨道的李雅普诺夫指数的表达式为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)|$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{[C_2 + U_0(\sin x_{iz} + A_2 \cos x_{iz})](C_1 - U_0 \sin x_{iz})}{(C_2 + U_0 \sin x_{iz})(C_1 - U_0(\sin x_{iz} + A_1 \cos x_{iz}))} \right|, \quad (1)$$

其中 x_{iz} 为张弛振荡在 x_n, x_{n+1} 之间达到上阈值处对应的位相, 可由映象解出. 图 2 示出由 (1) 式数值得到的阵发后 (即 $\epsilon = U_0 - U_{0c} > 0$ 情况) 的李雅普诺夫指数谱. 由于计算机性能所限, 仅画出了 $0.062 \text{ V} > \epsilon > 0.0000453 \text{ V}$ 范围内的数据. 图 2 直线表示这些数据最小二乘拟合得到的线性规律. 它的方程为 $\lambda = \frac{-0.92}{\ln \epsilon} - 0.16$.

我们在实验系统中观测到特征完全相同的 V 型阵发. 然而, 正如在文献 [8, 9] 中已报道的, 我们的实验系统存在频率漂移, 因而实验观察到 V 型阵发的频率值常常与数值计算存在一个系统误差. 对本文例子, 实验观察到最与数值结果符合的 V 型阵发阈值为 $\omega_c = 8000 \text{ Hz}$, $U_{0c} = 2.72 \text{ V}$ (U_0 的实验分辨率为 0.01 V). 由实验得到的时间序列中提取李雅普诺夫指数的方法已有数种. 我们仍采取著名的 Wolf-Swinney 方法 [14]. 大致思想是: (1) 对每个 ϵ 值, 抽提 200 次叠代以略去瞬态行为后, 由单片机采集数据输入计算机. (2) 选初值 x_0 和 y_0 , 使 $d = |x_0 - y_0| = 0.02$. (3) 每隔 $n = 9$ 点提取 x_0, y_0 的 9 次映象点的相距 $d'_{(j)} = |x_{j,9} - y_{j,9}|$. (4) 找一个点 y_{j+1} , 使近似关系 $d' = |x_{j,9} - y_{(j+1),9}| \approx d$ 满足最好, 然后类似地得到 $d(j+1)$. (5) 重复 M 步以上操作, 以处理完整个采集的时间序列, 由 $\lambda = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \ln \frac{d(j)}{d}$ 即可得到近似的 ϵ 值下的李雅普诺夫指数值. 图 3 示出由此方法得

到的李雅普诺夫指数谱. 图 3 数据对应的最小 ϵ 值为 0.0044 V , 已是实验测试精度的极限. 更小 ϵ 值的测量结果将完全不可靠. 由这些实验数据点的最小二乘拟合得到的直线 (如图 3) 方程为 $\lambda = \frac{-0.91}{\ln \epsilon} - 0.16$. 这与图 2 的数值结果完全一致, 证明上述实验方法虽然简单, 却是可靠且具有相当精度, 而且实验系统也完全正常.

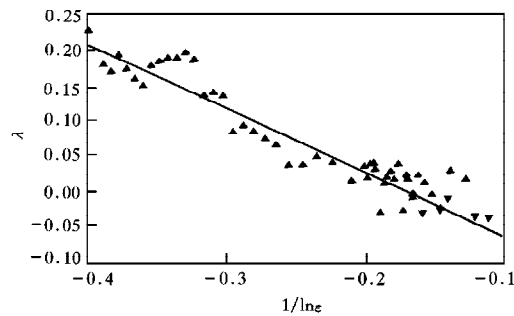


图 2 ▲为数值得到的 $U_0 = U_{0c} = 2.7152065 \text{ V}$ 处的 V 型阵发后的李雅普诺夫指数谱数据. 对每个 $\epsilon = U_0 - U_{0c}$ 值略去 500 次叠代后, 记录 20000 次叠代, 然后按 (1) 式计算得到. 固定初值 $x_0 = 0.1$. ——为数据最小二乘拟合的结果, 也表示文献[12, 6]所预言的标度律

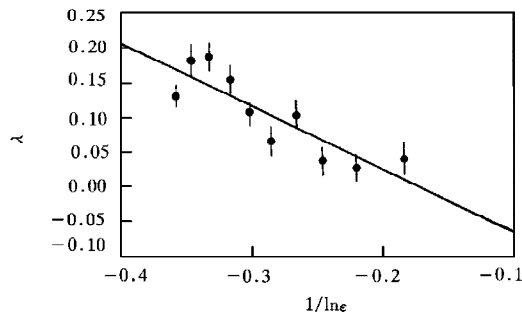


图 3 ●为实验得到的李雅普诺夫指数谱数据. 穿过这些点的短线表示实验误差范围. ——为数据最小二乘拟合的结果

5 讨 论

在一个“处处光滑”, 即函数值 $f(x)$ 及其各阶导数处处连续的一维映象中, 在一个 p 周期吸引子向混沌过渡的临界点一定有 $\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right| = 1$. 这是非线性动力学的基本知识, 大部分关于混沌动力学的专著在开篇不久即加以论述^[15]. 因而, 在此临界点的一个叠代轨道的李雅普诺夫大指数值应为

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| = \frac{1}{p} \ln \prod_{i=1}^p \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| = \frac{1}{p} \ln \left| \frac{df^p(x)}{dx} \right| = 0.$$

然而, 上述数值或实验所得的规律却是 $\lambda = \frac{-\alpha}{\ln \epsilon} - \beta$. 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\lambda \rightarrow -\beta \cong -0.16$. 这正是 V 型阵发有别于传统的 I, III 型阵发的特点之一.

如引言中所述, 在 V 型阵发的临界点, 临界稳定的 p 周期轨道中至少一个周期点与不连续点集中的一个点重合. 如果此不连续点处映象函数值或它的 k 阶导数 ($k < p$) 不连续, 则映象在此周期轨道附近的线性化映象及其雅可比矩阵都不能定义. 上述 $\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right| < 1$ 的周期轨道稳定判据也不再成立. 所以, 在 V 型阵发发生前, 此周期轨道的 $\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right|$ 值可以为小于 1 的任何值. 从 1992 年以来, 在不同系统中所观察到的 V 型

阵发的例证^[4,9,12,13,6]均是在 $\left| \frac{df^p(x)}{dx} \right|$ 还远小于 1 时突然发生的. 显然, V 型阵发的临界点 $\lambda_0 < 0$ 正是典型情况. 那么, 当一个 p 周期稳定轨道经过 V 型阵发转变为一个混沌吸引子时, λ 值是如何从一个负值变为一个正值的呢? 由于 ϵ 近于零时, 隧道口尺寸也近于零, 在斜率近于零的隧道口部分叠代数将大于在其他斜率大于 1 的函数部分的叠代数, 所以叠代轨道的李雅普诺夫指数值总是负值. 只有在 ϵ 大于某一正阈值时, 李雅普诺夫指数值才会为正, 亦即经由本类 V 型阵发向混沌的过渡总要经过一系列周期吸引子作为过渡. 这种过渡又可能存在两种情况. 第一, λ 值在临界点, 即 $\epsilon = 0$ 时发生一次不连续的突变, 从一个远小于零的负值突然跳跃到一个接近于零的负值, 然后逐渐过渡到正值. 这可称为突变模式. 第二, λ 值从临界点前的负值经过一系列小于零的中间值“逐渐跳跃”到正值. 这可称为渐变模式. 文献^[12]提供了第二种情况的一个典型例证.

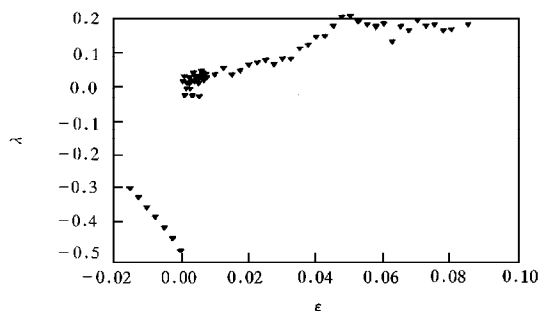


图 4 λ - ϵ 坐标平面上表示的李雅普诺夫指数变化规律 计算方法同图 2

为了说明本文讨论的 V 型阵发例证的模式类型, 我们计算了 $\epsilon (\equiv U_0 - U_{0c})$ 从负值到正值时 λ 指数的变化情况, 并以 λ - ϵ 坐标示于图 4. 图 4 清楚地显示了 λ 从一个远小于零的负值到一个接近于零的负值的突然跳跃, 说明此例证属于突变模式.

- [1] J. P. Eckmann, *Rev. Mod. Phys.*, **53**(1981), 643.
- [2] Y. Pomeau, P. Manneville, *Commun. Math. Phys.*, **74**(1980), 189.
- [3] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1507; *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 5365.
- [4] D. R. He, B. H. Wang *et al.*, *Phys. Lett.*, **A171**(1992), 61; He Da-ren *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **42**(1993), 711(in Chinese).
- [5] N. Platt, E. A. Spiegel, C. Tresser, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993), 279; J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1140.
- [6] H. Lamba, C. Budd, *Phys. Rev.*, **E50**(1994), 84.
- [7] H. E. Nusse, E. Ott, J. A. Yorke, *Phys. Rev.*, **E49**(1994), 1073.
- [8] J. Fan, F. Ji, S. Guan *et al.*, *Phys. Lett.*, **A182**(1993), 232; **191**(1994), 139.
- [9] F. Ji, D. R. He, *Phys. Lett.*, **A177**(1993), 125.
- [10] C. Wunderlich, L. Moorman, P. M. Koch, *Phys. Lett.*, **A176**(1993), 317.
- [11] R. Richter, A. Kittel, K. Pyragas *et al.*, *Z. Phys.*, **B91**(1993), 527.
- [12] S. Wu, E. J. Ding, D. R. He, *Phys. Lett.*, **A197**(1995), 287.
- [13] D. R. He, B. H. Wang *et al.*, *Physica*, **D79**(1994), 335.

- [14] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney *et al.*, *Physica*, **D16**(1985), 285.
- [15] 例如: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, ed. by J. M. T. Thompson and H. B. Stewart (John Wiley & Sons Ltd., 1986), p. 138.

AN EXPERIMENTAL PROOF FOR THE SCALING LAW OF LYAPUNOV EXPONENT IN TYPE V INTERMITTENCY^{*}

FAN JIAN-PING

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800*)

HOU YU-QING

(*Department of Electronic Science, Northwest University, Xi'an 710069*)

WANG YING-MEI HE DA-REN

(*Department of Physics, Teachers College, Yangzhou University, Yangzhou 225002*)

WU SHUN-GUANG

(*Department of Physics, Northwest University, Xi'an 710069*)

(Received 10 July 1997; revised manuscript received 14 November 1997)

ABSTRACT

This paper reports the experimental evidence for the scaling law of Lyapunov exponent in type V intermittency obtained in an electronic relaxation oscillator. The results are in very good agreement with the numerical computations conducted with the theoretical model of the oscillator.

PACC: 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China under the Grant No. 19575037.