

离子回旋波加热天线耦合的一种改进模型

朱学光 匡光力 赵燕平 李有宜 谢纪康

(中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031)

(1997 年 7 月 14 日收到; 1997 年 12 月 16 日收到修改稿)

讨论了离子回旋波在托卡马克中的电磁场分布. 针对传统的天线耦合平板模型计算大孔径天线存在较大误差这一问题, 提出了一种改进模型, 使得计算精度有了很大提高. 理论计算结果与实验观测更加符合.

PACC: 5250; 5240F

1 引 言

离子回旋共振加热(ICRH)是托卡马克中最有效的辅助加热手段之一, 极有可能应用于未来实用聚变反应堆上. 现在大小装置纷纷用它进行加热实验, 取得了可喜的实验结果. 与电子回旋及低混杂波相比, ICRH 的频率较低, 能量能否实现高效的耦合问题显得十分突出, 因此 ICRH 的天线设计受到了人们的普遍关注.

ICRH 的天线能量耦合算法, 一般都采用平板模型(即认为托卡马克中纵场及粒子密度只沿 x 方向变化)进行分析. 有的算法采用二维天线模型^[1,2](即认为天线的激励电流完全处于 y, z 平面内, 无 J_x 分量), 有的采用三维天线模型^[3-6](即考虑了天线馈线电流的 J_x 分量的影响). 关于能量吸收方面也由原来的冷等离子体且能量一次吸收模型, 发展到有限温度模型, 并考虑了能量的一次非完全吸收情形, 使得 ICRH 快波加热的耦合计算精度有了较大的提高. 然而, 当天线孔径相对于装置小半径尺度较大时, 传统的算法给出的场分布, 与短天线情况下的计算结果类似, 因而计算精度较差. 针对这种情况, 本文提出一种改进模型, 对天线进行分段线性化处理, 使得计算精度得到了明显的改善, 并与实验观测^[7]更加符合.

2 三维天线快波加热的理论模型^[3]

如图 1 所示, 法拉第屏蔽和等离子体边界分别位于 $-s$ 和 $-a$, 假定装置的内外壁面为理想导体, 分别位于 $-w$ 和 d , 等离子体中心密度为 n_0 , 分布近似为抛物型. 纵场 B_z 为 $B_0 R_0 / (R_0 + x + (w - d)/2)$, 其中 B_0 和 R_0 分别为装置中心磁场强度和大半径.

在真空区域: $-a < x < d$, 电磁场服从于 Maxwell 方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} - i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2)$$

将场分量分解为 TE 和 TM 波,取纵场 B_z 的方向为 z 方向(或平行方向).保留对 x 分量的微分.对时域和 y, z 空间分量分别采用时间和空间傅里叶变换,即 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, ik_y, ik_z \right)$, 经过简单的代数运算后得

$$\begin{vmatrix} B_x \\ E_y \end{vmatrix} = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} -i\omega/c^2 & ik_z \\ ik_z & -i\omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ik_y E_z \\ dB_z/dx + \mu_0 j_y \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} E_x \\ B_y \end{vmatrix} = \frac{1}{H^2} \begin{vmatrix} -i\omega & ik_z \\ -ik_z & i\omega/c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -ik_y B_z + \mu_0 j_x \\ dE_z/dx \end{vmatrix}, \quad (4)$$

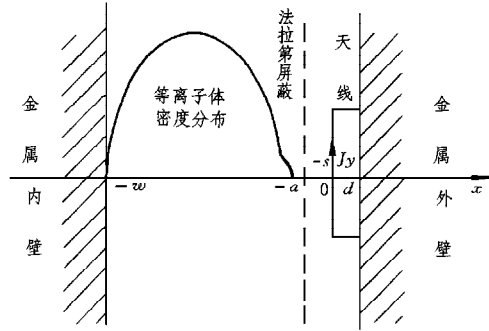


图 1 HT-6M 托卡马克三维天线快波加热的平板模型示意图
等离子体的密度和温度均为典型的抛物型分布

并且 B_z 和 E_z 服从下列微分方程:

$$d^2 \psi / dx^2 - p^2 \psi = \phi, \quad (5)$$

其中

$$\psi^T = (cB_z, E_z), \quad \phi^T = (c\phi_b, \phi_e), \quad (6)$$

$$\phi_b = -\mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j})_z = -\mu_0 (dj_y/dx - ik_y j_x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \phi_e &= (k_z / \omega \epsilon_0) (\nabla \cdot \mathbf{j}) - i\omega \mu_0 j_z \\ &= (1 / \omega \epsilon_0) [k_z (dj_x/dx + ik_y j_y) - iH^2 j_z], \end{aligned} \quad (8)$$

c 为光速, $k_0 = \omega/c$ 为真空中的波数, $H^2 = k_0^2 - k_z^2$, $p^2 = k_y^2 + k_z^2 - k_0^2$, 上标 T 为转置. 天线上的电流分布为

$$J_y(x, y, z) = J_a \delta(x) Q(w_y, y) Q(w_z, z) \cos(\beta y + \gamma), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} J_x(x, y, z) &= J_a Q(w_z, z) Q(d/2, x - d/2) [\delta(y - y_1) \cos(\beta y_1 + \gamma) \\ &\quad - \delta(y - y_2) \cos(\beta y_2 + \gamma)], \end{aligned} \quad (10)$$

其中 w_y 和 w_z 分别为天线的半长度和半宽度. $\beta^{[4]}$ 为激励电流在天线上的传播常数, γ 为其初相. y_1 和 y_2 分别为天线两个水平臂在 y 轴上的坐标. Q 为门函数, 其定义为

$$Q(w, x) = \begin{cases} 1 & -w \leq x \leq w, \\ 0 & x < -w \text{ 或 } x > w. \end{cases} \quad (11)$$

在等离子体区域: $-w < x < -a$, 忽略电子的质量, 即假定沿磁力线方向的电场 E_z

$=0$, 则快波场服从下列方程:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} i\omega B_z \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu k_y & -k_{\perp}^2 \\ 1 - \frac{k_y^2}{u} & \mu k_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i\omega B_z \\ E_y \end{vmatrix}, \quad (12)$$

其中 $u = k_0^2 \epsilon_1 - k_z^2$, $\mu = \epsilon_2 k_0^2 / u$, $k_{\perp}^2 = u(1 - \mu^2)$, ϵ_1, ϵ_2 为等离子体介电张量^[8]. 介电张量考虑了粒子的热效应、离子的有限拉莫尔半径. 粒子对波的能量吸收机制为离子回旋共振的基频及二次谐频吸收. 方程(5)在 $x = d$ 处服从 $dB_z/dx = E_y = 0$ 的边界条件, 另一端服从一般的边界条件, 即在 $x = -a$ 处

$$\frac{d\psi}{dx} = \mathbf{b}\psi. \quad (13)$$

由(6)式知, ψ 为二维矢量, $\mathbf{b}$ 为 2×2 维矩阵. 由(3), (4), (12)和(13)式定义波阻抗 ξ 为

$$\begin{vmatrix} E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \xi \begin{vmatrix} \omega B_z \\ \omega B_y \end{vmatrix}. \quad (14)$$

方程(5)用格林函数法求解较为方便. $\mathbf{G}(x, \rho)$ 为格林函数, 则

$$\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{G}(x, \rho) - p^2 \mathbf{G}(x, \rho) = \delta(x - \rho) \mathbf{I}, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{I}$ 为 2×2 阶矩阵.

$$\psi = \int_{-a}^d \mathbf{G}(x, \rho) \Phi(\rho) d\rho, \quad (16)$$

$$\mathbf{G}(x, \rho) = \mathbf{G}_+(x, \rho) \gamma(x - \rho) + \mathbf{G}_-(x, \rho) \gamma(\rho - x), \quad (17)$$

其中 γ 为阶跃函数, 当 x 小于零、等于零、大于零时, γ 的值分别为 0, 1/2, 1.

$$\mathbf{C}(x) = \begin{vmatrix} \cosh[p(x - d)] & 0 \\ 0 & \sinh[p(x - d)] \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{I} \cosh[p(x + v)] + p^{-1} \mathbf{b} \sinh[p(x + v)], \quad (19)$$

$$\mathbf{G}_+(x, \rho) = p^{-1} \mathbf{C}(x) \mathbf{C}^{-1}(\rho) \mathbf{B}(\rho) | \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{B}} |^{-1} \mathbf{C}(\rho), \quad (20)$$

$$\mathbf{G}_-(x, \rho) = p^{-1} \mathbf{B}(x) | \dot{\mathbf{C}}\mathbf{B} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{B}} |^{-1} \mathbf{C}(\rho), \quad (21)$$

其中符号上“ $\cdot$ ”为 $\frac{1}{p} \frac{d}{d\rho}$ 运算, ρ 为自变量. 对快波加热而言, 假定法拉第屏蔽是理想的, 具有非各向同性的电导 ($\sigma_{yy} = 0, \sigma_{zz} = \infty$), 静磁场 B_0 方向为 z 方向, 已知该平面处于 $x = -s$, 用边界条件 $E_z = 0$ 取代方程(13)第二式, 于是 $b_{12} = b_{21} = 0, b_{22} = \infty$, TE 波和 TM 波完全去耦合. 对 $x = -a$ 处, 由方程(14)第一式可得

$$\left[\frac{E_y}{\omega B_z} \right]_{x=-a} = \xi_1 = -i b_{11} / H^2, \quad (22)$$

于是便得

$$B_z = \int_{-a}^d D(x, \rho) \phi_b(\rho) d\rho, \quad (23)$$

$$E_z = \int_{-s}^d S(x, \rho) \phi_e(\rho) d\rho, \quad (24)$$

$$D(x, \rho) = g(x, \rho) \gamma(x - \rho) + g(\rho, x) \gamma(\rho - x), \quad (25)$$

$$g(x, \rho) = \frac{1}{p} \frac{p \cosh[p(\rho + a)] + i \xi_1 H^2 \sinh[p(\rho + a)]}{p \sinh[p(a + d)] + i \xi_1 H^2 \cosh[p(a + d)]} \cosh[p(x - d)], \quad (26)$$

$$S(x, \rho) = T(x, \rho) \gamma(x - \rho) + T(\rho, x) \gamma(\rho - x), \quad (27)$$

$$T(x, \rho) = \frac{\sinh[p(\rho + s)] \sinh[p(x - d)]}{p \sinh[p(s + d)]}. \quad (28)$$

在天线安装侧对面的装置壁面的边界条件为 $E_y(-w) = 0$. 为了求等离子体在 $-a$ 处的表面阻抗, 首先可以利用 $x = -w$ 处(金属内壁)的边界条件, 通过(12)式进行积分, 即可求出等离子体在 $-a$ 处的表面阻抗, 可写为

$$\xi_a = \frac{E_y}{\omega B_z} \Big|_{x=-a} \quad (29)$$

由于在 $-a$ 处 B_z 和 E_y 的连续性, 从(23)式可求出 $B_z(-a)$, 于是 $E_y(-a) = \xi_a \omega B_z(-a)$, 再由(12)式反推, 即可求出等离子体中的电磁场分布.

3 改进的模型

由于托卡马克装置的小截面一般为圆形或 D 形截面, 而 ICRH 天线为了有效地将能量耦合于等离子体, 一般都是使天线辐射面与真空室内的等离子体表面相互平行. 这样, 天线的辐射面一般都是曲面. 在这种情况下, 当天线的辐射面相对于磁轴的张角较大时(例如在 HT-6M 托卡马克上离子回旋加热采用的环天线, 张角达 90°), 若仍然采用平板模型进行计算, 必然会带来较大误差. 减小这种误差, 可以采用本文的改进模型.

由(7), (8), (23), (24)式可以看出, 电磁场是激励电流的线性函数, 因此满足叠加定理. 将快波加热天线沿极向等分成 N 个等长度的天线段, 对每一天线段激励电流产生的辐射场单独进行计算. 真空室内任意一点的总场量, 实际上是由每一天线段的激励电流在该点产生的场量的矢量和.

现在分析第 n 天线段激励电流产生的辐射场. 设第 n 段的中心点和小截面中心点的连线与赤道面的夹角为 θ , 将坐标轴旋转 θ 弧度, 如图 2 所示, 然后按 x', y' 坐标系来求解场分布. 为了叙述方便, 将坐标原点取在托卡马克小截面中心点. 由于假设等离子体为柱对称的, 因而密度分布仍然近似为抛物型. 唯一不同的是纵场. 对于传统的快波加热模型, 实际上是用下式来近似:

$$B_z(x', y') = B_0 / (1 + x' / R_0). \quad (30)$$

改进的快波加热模型取

$$B_z(x', y') = B_0 / (1 + x' \cos \theta / R_0), \quad (31)$$

即改进的快波加热模型仍然保留纵场与 y' 无关

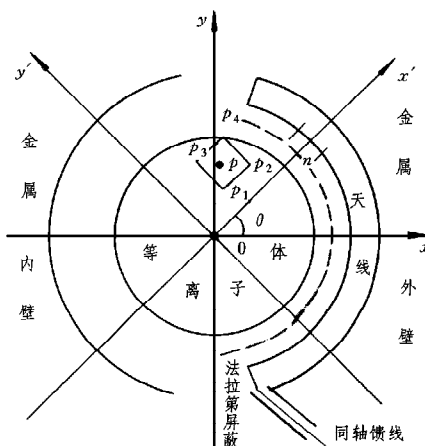


图 2 改进的离子回旋加热的理论模型

的特点,否则就不能用时空傅里叶变换得到(12)式,这将使得求解很复杂.另一方面,对于第 n 天线元,关于 x' 坐标轴对称的、纵场与 y' 无关的近似仍具有一级精度,是可以接受的.总之就纵场的近似理论而言,改进的模型更精确些.

以下讨论求托卡马克内场分布的具体方法:

仅讨论 $z=0$ 截面上的场量,首先求 B_z , 设第 n 天线段激励电流对环内任一点 (x, y) 的总场量 B_z 的贡献记为 $B_z^n(x, y)$. 在旋转坐标系里所考虑点的坐标为

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (32)$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta. \quad (33)$$

由于通过数值计算得到的是离散分布的场量值(如图2), (x', y') 点必然是落在某一方格内(或落在该小方格的边界上或小方格的顶点上). 设该小方格4个顶点的值及其对应的坐标分别为 $p_1(x'_0, y'_0)$, $p_2(x'_1, y'_0)$, $p_3(x'_0, y'_1)$, $p_4(x'_1, y'_1)$ (由平板模型求出), 按如下的加权平均方法:

$$B_z^n(x, y) = 0.5 [((x' - x'_0)(p_2 + p_4) + (x'_1 - x')(p_1 + p_3))/(x'_1 - x'_0) + ((y' - y'_0)(p_3 + p_4) + (y'_1 - y')(p_1 + p_2))/(y'_1 - y'_0)], \quad (34)$$

于是

$$B_z(x, y) = \sum_{n=1}^N B_z^n(x, y). \quad (35)$$

同理可求出 $E_x^n(x, y)$ 和 $E_y^n(x, y)$ 的值, 其中下标 x', y' 为它们在 (x', y') 坐标系里表示的物理量, 则

$$E_x^n(x, y) = E_x^n(x, y) \cos \theta - E_y^n(x, y) \sin \theta, \quad (36)$$

$$E_y^n(x, y) = E_y^n(x, y) \cos \theta + E_x^n(x, y) \sin \theta, \quad (37)$$

$$E_x(x, y) = \sum_{n=1}^N E_x^n(x, y), \quad (38)$$

$$E_y(x, y) = \sum_{n=1}^N E_y^n(x, y). \quad (39)$$

对 z 不为零的截面的场量也可以用同样的方法求得.

4 计算结果及分析

HT-6M 托卡马克采用 1/4 周 ICRH 天线, 用改进的模型将天线等分成 10 等份对其进行计算. 图3为三维天线非全吸收等离子体模型及按 HT-6M 托卡马克典型参数计算得到的. 由图3可看到场的分布为驻波分布形式, 说明了装置器壁反射波与入射波的干涉效应. 这与文献[9]给出的结果类似, 也与中小型装置上所见到的实验结果^[7]一致. 由此可见沿着电波传播的方向, 电磁场量逐渐减小, 反映了等离子体对射频波的逐渐吸收过程.

图4为在相同参数条件下, 用传统的三维天线及能量一次非完全吸收的平板模型的计算结果. 从图4显然可以看出, 场分布沿 y 方向变化很小, 这是因为未考虑天线的曲率

效应而造成的偏差. 由天线的辐射功率谱可以看出(见图 5), 天线的辐射功率主要在 $-20 \text{ m}^{-1} < k < 20 \text{ m}^{-1}$ 区域内, 而最大值是在 $k = 10 \text{ m}^{-1}$ 附近, 说明了当快磁声波满足“谐振腔”条件时耦合功率较大, 这正是实验中观察到的“本振模”^[7]现象.

关于天线的辐射阻抗计算可定义为天线的总辐射功率除以天线电流最大值的平方,

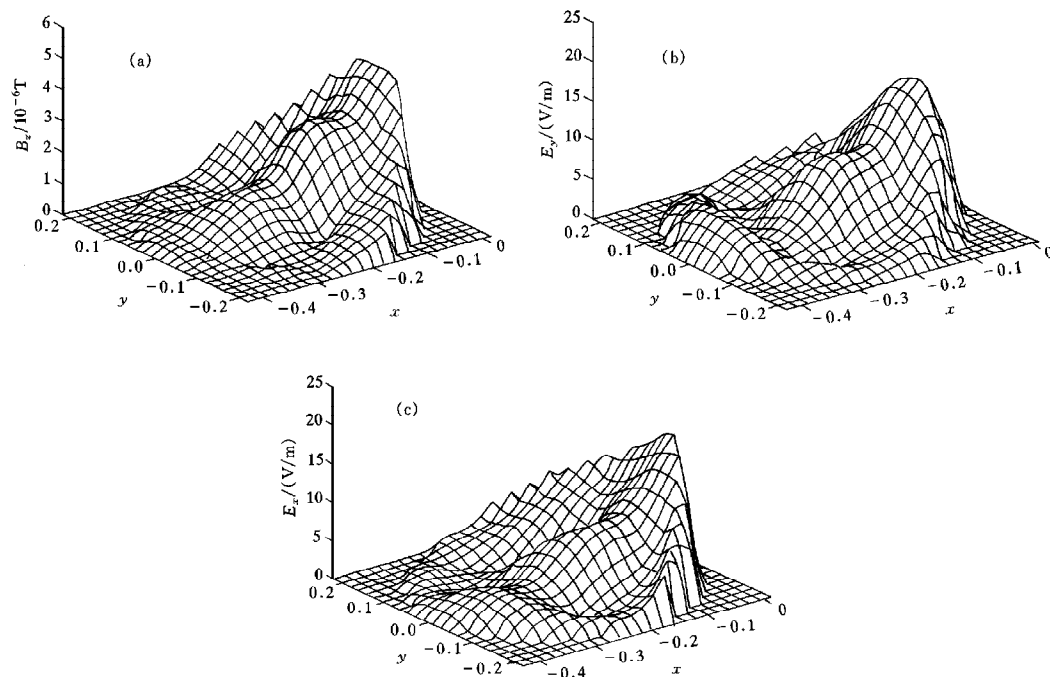


图 3 (a), (b), (c) 分别用改进模型计算得到的 $z=0$ 截面的 B_z , E_y , E_x 分布. 计算按 HT-6M 的典型参数, 即 $B_0 = 1.0 \text{ T}$; 工作频率: $f_0 = 15.5 \text{ MHz}$, $H:D = 1:4$, $n_0 = 3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $T_{e0} = 600 \text{ eV}$, $R_0 = 0.65 \text{ m}$, $a_0 = 0.2 \text{ m}$; 天线: $2 W_y = 0.4 \text{ m}$, $2 W_z = 0.1 \text{ m}$

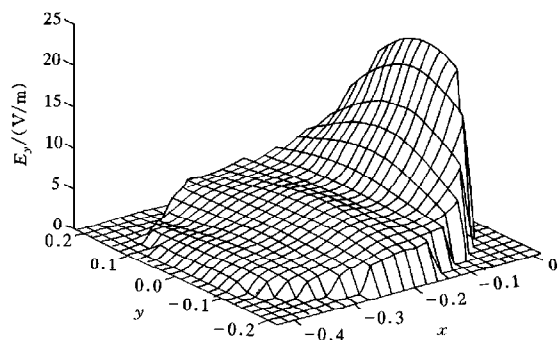


图 4 用传统的方法计算 $z=0$ 截面的 E_y 所给出的分布. 计算所用参数同图 3

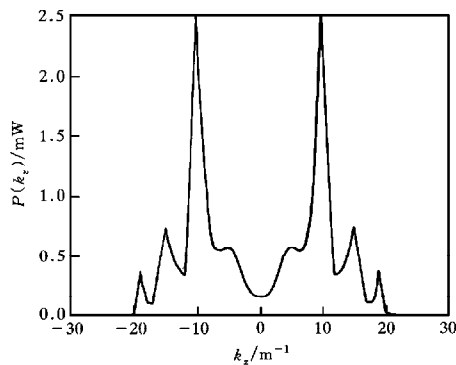


图 5 天线的辐射功率谱. 计算所用参数同图 3

而总辐射功率为

$$P = 2 \omega_z R_e \{ \mathbf{E}_y \cdot \mathbf{J}_y^* \}, \quad (40)$$

天线的辐射电阻为

$$R = P / I_{\max}^2. \quad (41)$$

在 HT-6M 的典型参数下, 采用基频加热, 用改进模型求得的辐射电阻值为 1.43Ω , 用早先的模型在同等的输入参数情况下, 求得的辐射电阻值为 2.51Ω , 而实验测试的辐射电阻值为 1.3Ω 左右. 这说明了改进模型的计算精度有了明显的提高.

5 结 论

传统的 ICRH 天线耦合的平板模型, 随天线的张角增大, 计算误差逐渐增大, 特别是对一些中小型装置, 计算结果不能令人满意. 本文提出的改进模型, 较好地解决了这一问题, 改善了天线耦合问题的计算精度.

- [1] W.N.C. Cy, T. Amano, R. Ando *et al.*, *Nucl. Fusion*, **25**(1985), 795.
- [2] N.T. Lam *et al.*, *Nucl. Fusion*, **31**(1991), 2141.
- [3] R. Koch, *Computer Phys. Commun.*, **40**(1986), 1.
- [4] V.P. Bhatnagar, R. Koch *et al.*, *Nucl. Fusion*, **22**(1982), 280.
- [5] Shen Xue-min, *Acta Physica Sinica*, **44**(1995), 570 (in Chinese).
- [6] M. Brambilla, *Nucl. Fusion*, **28**(1988), 549.
- [7] P. Descampa *et al.*, 16th Eur. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Heating (Venezia, 1989), p. 1053.
- [8] T. Stix, *Waves in Plasmas* (American Institute of Physics, New York, 1992), p. 7.
- [9] G. Cattanei *et al.*, *Nucl. Fusion*, **31**(1991), 219.

AN IMPROVED MODEL OF COUPLE CALCULATION OF ION CYCLOTRON WAVE HEATING

ZHU XUE-GUANG KUANG GUANG-LI ZHAO YAN-PING LI YOU-YI XIE JI-KANG

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei 230031*)

(Received 14 July 1997; revised manuscript received 16 December 1997)

ABSTRACT

The electromagnetic field distribution of ion cyclotron wave in tokamak geometry is discussed in detail in this paper. As for the problem that conventional antenna coupling slab model gives larger error to the calculation of large aperture antenna, an improved model is presented that can upgrade the calculation precision greatly. The theoretically computed results are in good agreement with the experimental observation.

PACC: 5250; 5240F