

Fokker-Planck 方程在快波加热中的应用

朱学光 匡光力 赵燕平 李有宜 谢纪康

(中国科学院等离子体物理研究所, 合肥 230031)

(1997 年 10 月 20 日收到; 1998 年 1 月 16 日收到修改稿)

快波加热算法, 一般都是假定托卡马克中粒子为麦克斯韦分布. 其实由于准线性扩散效应, 共振粒子的平行温度与垂直温度不相等, 这样必然产生一定的计算误差. 针对这种情况, 本文引入 Fokker-Planck 方程, 采用叠代算法较好地解决了这一问题.

PACC: 5250; 5265

1 引 言

快波加热是托卡马克中最有效的辅助加热手段之一. 快波加热的能量耦合算法, 一般都采用平板模型^[1] (即认为托卡马克中纵场及粒子密度只沿 x 方向变化) 进行分析. 早先的算法大多采用冷等离子体模型, 随加热功率的增大, 等离子体温度的逐年提高, 热等离子体模型越来越得到人们的普遍重视. 目前热等离子体快波加热的算法较多, 这些算法一般都是把等离子体看成是一种吸收介质, 而介质的介电张量与粒子温度的空间分布有很大关系. 目前的快波加热算法常常假定等离子体中离子和电子为麦克斯韦分布^[2]. 而实际上理论分析及模拟计算指出, 共振离子的速度分布明显偏离麦克斯韦分布, 并且其垂直温度大于其平行温度 (垂直与平行是相对于约束等离子体的磁场而言), 偏差随加热功率的增大而显著增大. 这样若按麦克斯韦分布 (即平行温度等于垂直温度) 进行计算, 必然会带来较大的误差.

本文是将托卡马克中等离子体按磁面分层, 用 Fokker-Planck (F-P) 方程, 计算出每种离子的速度分布. 计算等离子体介电张量时, 离子温度近似用双温模型来表示, 知道介电张量, 即可进行快波加热的耦合计算来求出每一种类粒子吸收的能量. 这些值求出后, 即可代入 F-P 方程, 再次计算出各磁面每种粒子的新的双温值. 这样进行多次叠代, 即可给出更精确的计算结果.

2 F-P 方程计算

F-P 方程可写为

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial t} = n_0 \Gamma_{\beta} \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[A f_{\beta} + B v \frac{\partial f_{\beta}}{\partial v} + C \frac{\partial f_{\beta}}{\partial \theta} \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{uv^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[D f_\beta + E u \frac{\partial f_\beta}{\partial v} + F \frac{\partial f_\beta}{\partial \theta} \right] \} + S_\beta, \quad (1)$$

其中 $\Gamma_\beta = 4\pi Z_\beta^4 e^4 / m_\beta^2$, u 为速度归一化常数, S_β 为源项. 系数 A, B, C, D, E, F 应包括碰撞项和射频项的贡献. 理论分析指出, 快波加热可以用速度空间的准线性扩散来等效, 即共振(基频或谐频共振)离子射频准线性扩散效应对各系数的贡献分别为

$$A_{rf} = 0, \quad (2)$$

$$B_{rf} = \frac{C v^2 \sin^2 \theta}{u}, \quad (3)$$

$$C_{rf} = - C v \sin \theta \left[\frac{k_{\parallel} v}{\omega} - \cos \theta \right], \quad (4)$$

$$D_{rf} = 0, \quad (5)$$

$$E_{rf} = - C v \sin^2 \theta \left[\frac{k_{\parallel} v}{\omega} - \cos \theta \right], \quad (6)$$

$$F_{rf} = C u \sin \theta \left[\frac{k_{\parallel} v}{\omega} - \cos \theta \right]^2. \quad (7)$$

通常 $k_{\parallel} v / \omega \ll 1$, 可以忽略. 沿半径为 r 的磁面取积分平均后, 可求出 C 值为^[3]

$$C = \frac{|E_+ J_{n-1}|^2 + |E_- J_{n+1}|^2 + |E_{\parallel} J_n|^2 c t n^2 \theta}{32 \pi r Z_\beta^2 e^2 n_{0\beta} \xi}, \quad (8)$$

其中 $\xi = \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{n \omega_{c0\beta}}{\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}} - 1 \right)^2 \right]^2$, 贝塞尔函数的自变量为 $\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ci}}$, C 值主要决定于加热功率.

3 快波加热平板模型

求解快波加热的天线耦合问题, 一般都采用平板模型. 平板模型的详细计算过程参见文献[1, 2]. 但是, 本文不是采用单温平板模型, 而是使用了双温平板模型, 即在等离子体区域中, 同样把等离子体看成是一种各向异性的吸收介质^[4, 5], 但介电张量的表达式与水平温度和垂直温度同时有关. 忽略电子的质量, 即假定沿磁力线方向的电场 $E_{\parallel} = 0$, 则快波场服从下列方程:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} i \omega B_z \\ E_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mu k_y & -k_{\perp}^2 \\ 1 - \frac{k_y^2}{q} & \mu k_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i \omega B_z \\ E_y \end{vmatrix}, \quad (9)$$

其中 $q = k_0^2 \epsilon_1 - k_{\parallel}^2$, $\mu = \epsilon_2 k_0^2 / q$, $k_{\perp}^2 = q(1 - \mu^2)$, B_z 和 E_y 分别为环向磁场和极向电场.

假定忽略电子的质量, 即认为 $\omega_{pe} \gg \omega^2$, 这时, 等离子体介电张量可近似为^[6]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sum_{\alpha=i,e} \omega_{p\alpha}^2 / \omega^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_1 = 1 + \sum_{\alpha=i,e} (\omega_{p\alpha}^2 / 2\omega) (A_1^\alpha + A_{-1}^\alpha) - k_\perp^2 \sum_{\alpha=i,e} (\omega_{p\alpha}^2 v_\alpha^2 / 4\omega\omega_c^2) (A_1^\alpha + A_{-1}^\alpha - A_2^\alpha - A_{-2}^\alpha), \quad (11)$$

$$\varepsilon_2 = \sum_{\alpha=i,e} (\omega_{p\alpha}^2 / 2\omega) (A_{-1}^\alpha - A_1^\alpha) - k_\perp^2 \sum_{\alpha=i,e} (\omega_{p\alpha}^2 v_\alpha^2 / 4\omega\omega_c^2) (2A_{-1}^\alpha - 2A_1^\alpha - A_{-2}^\alpha + A_2^\alpha), \quad (12)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + k_\perp^2 \sum_{\alpha=i,e} (\omega_{p\alpha}^2 v_\alpha^2 / \omega\omega_c^2) \left(A_0^\alpha - \frac{1}{2} (A_1^\alpha + A_{-1}^\alpha) \right), \quad (13)$$

$$A_n = \sum_{\alpha=i,e} \left(\frac{1}{\omega} \frac{T_{\perp\alpha} - T_{\parallel\alpha}}{T_{\parallel\alpha}} + \frac{1}{k_{\parallel} v_\alpha} \frac{(\omega - k_{\parallel} \bar{V}_\alpha - n\omega_c) T_{\perp\alpha} + n\omega_c T_{\parallel\alpha}}{\omega T_{\parallel\alpha}} Z_0(\xi_n) \right), \quad (14)$$

$$\xi_n = \frac{\omega - k_{\parallel} \bar{V}_\alpha - n\omega_c}{k_{\parallel} v_\alpha}, \quad (15)$$

其中 Z_0 为等离子体色散函数, v_α 为 α 种类粒子的平行热速度, $\bar{V}_\alpha$ 为其宏观速度. 由此可知, 当粒子的平行温度与垂直温度相等, 并忽略其宏观速度时, 上式可以简化为

$$A_n = \sum_{\alpha=i,e} \frac{1}{k_{\parallel} v_\alpha} Z_0(\xi_n). \quad (16)$$

这就还原成传统算法所采用的模型, 即单温模型.

理论分析指出, 快波加热过程中, 共振离子的垂直温度明显大于平行温度, 两者的差异随加热功率的增大而逐渐增大. 知道每一种类粒子吸收波能的大小后, 才能由 **F-P** 方程求出每一种类的粒子温度分布. 另一方面, 粒子吸收波能的大小, 需要知道等离子体介电张量后, 才能由平板模型求出. 解决这一问题较好的方法就是采用叠代算法.

4 叠代算法

如图 1 所示, 将等离子体按磁面分成 L 层, 对每一层按 **F-P** 方程求出每一种类离子的速度分布, 再求出其平行温度和垂直温度. 同时, 在平板模型的计算中, 将等离子体区域分解成 $2L-1$ 层. 等离子体介质对波的能量吸收可表示为

$$p = \omega \varepsilon_0 (\mathbf{E}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^A \cdot \mathbf{E}) / 2, \quad (17)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^A$ 为介电张量的反哈密顿分量. 将 $\boldsymbol{\varepsilon}^A$ 按有限拉莫尔半径展开, 化简后得离子和电子吸收的能量分别为^[6,7]

$$p_i = \left(\frac{\pi^{1/2} \epsilon_0 \omega_{pi}^2}{4 k_{//} v_i} \right) \text{Re}(\lambda_i)^{n-1} |E_+|^2 \exp \left[- \left(\frac{\omega - n\omega_{ci}}{k_{//} v_i} \right)^2 \right], \quad (18)$$

$$p_e = \left(\frac{\pi^{1/2} \mu_0}{4 k_{//}} \right) \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \right)^2 v_e (\omega^2/c^2) |H_{//}|^2 \exp \left[- \left(\frac{\omega}{k_{//} v_e} \right)^2 \right], \quad (19)$$

其中 n 为谐波数, $\lambda_i = k_{\perp}^2 \rho_i^2/2$, ρ_i 为离子拉莫尔半径.

将等离子体按图 1 所示方式分成 $2L-1$ 层, 由快波加热模型可以求出各平板层中电场和磁场的分布. 然后由(18)和(19)式, 计算出每一磁面每一种类粒子吸收的总功率, 电子吸收的功率将直接影响 **F-P** 方程计算中电子温度的增长率, 每种离子吸收的功率将决定每种离子准线性扩散系数的大小, 即(3), (4), (6)和(7)式中的 C 值. 这样即可为 **F-P** 方程提供新的输入参数, 以便再次叠代.

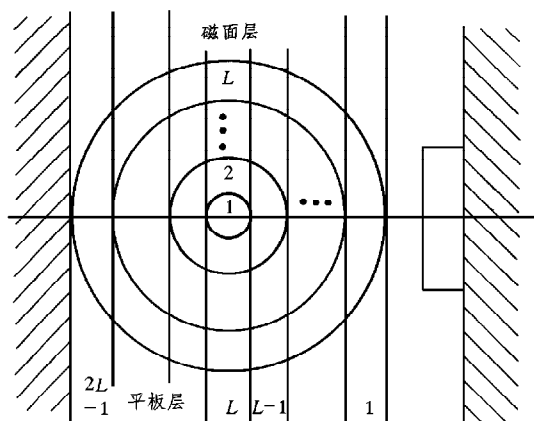
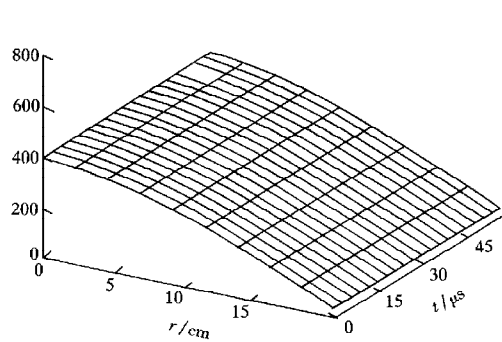


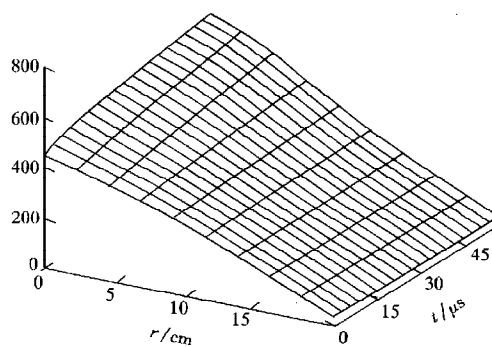
图 1 快波加热及等离子体按磁面分层的截面结构示意图

5 计算结果

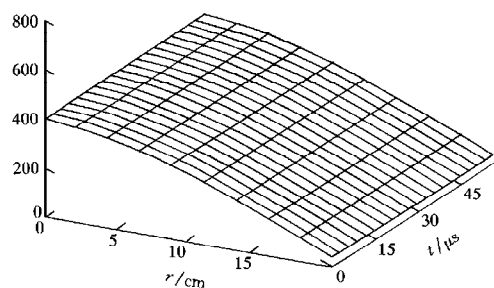
本文的模拟基于 HT-6M 托卡马克, 采用 1/4 周快波加热天线, 在 HT-6M 的典型参数下, 采用基频加热. 氢基频共振层经过等离子体中心, 共振能量被各磁面层所吸收. 加热功率取 2 MW. 用叠代算法, 求得的温度沿小半径分布曲线随时间的演变过程如图 2 所示. 其中能量约束时间取 4.5 ms, 是根据 6 M 装置能量约束时间实验测试的典型值取定的. 由图 2 可知, 共振离子的水平温度与垂直温度显然不相等, 氖离子的平行温度与垂直温度近似相等, 因此, 仅给出其温度对小半径分布随时间的变化图. 图 3(a)为等离子体中心处共振离子温度随时间的变化曲线, (b)为 $t=60 \mu\text{s}$ 时共振离子的温度随小半径的分布图. 由图 3 可知, 射频能量主要是被共振离子的垂直分量所吸收, 而单温模型不能揭示共振离子的水平温度与垂直温度的差异. 另外, 由于电子的弛豫时间很短, 模拟中已假定其为麦克斯韦分布. 当共振离子垂直温度偏大时, 等离子体介电张量将随之改变, 因此天线耦合算法求出的场分布也随之改变. 由(18)和(19)式知, 场分布改变时, 各磁面每种粒子吸收功率也随之改变, 这将确定下一时刻每种粒子温度的变化趋势. 这说明用叠代算法较为合理.



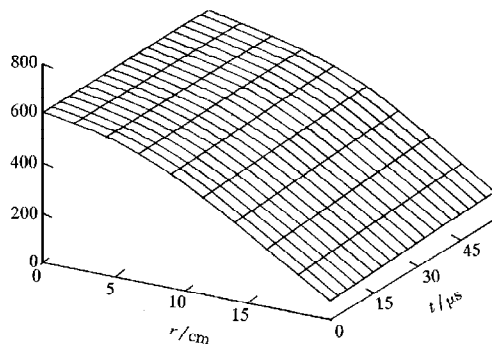
(a) 共振离子的平行温度



(b) 共振离子的垂直温度

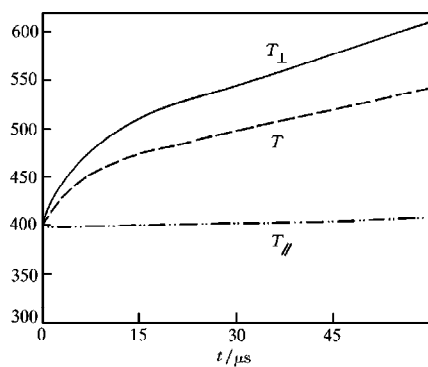


(c) 氘离子温度



(d) 电子温度

图2 等离子体各组分温度分布随时间的演化 计算按 HT-6M 的典型参数, 即 $B_0 = 1.0 \text{ T}$, $f_0 = 15.2 \text{ MHz}$, $H:D = 1:1$, $n_0 = 3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $T_{e0} = 600 \text{ eV}$, $a = 0.2 \text{ m}$, $P_{\text{OH}} = 100 \text{ kW}$, $P_{\text{rf}} = 2 \text{ MW}$, 温度单位为 eV



(a) 等离子体中心处共振离子温度随时间的变化曲线

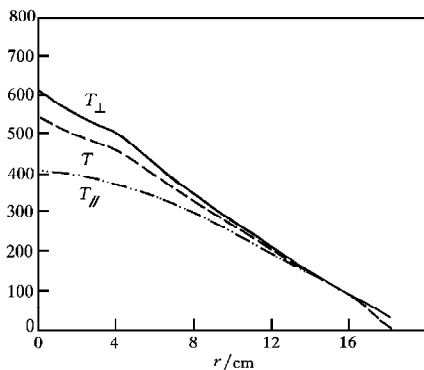
(b) $t = 60 \mu\text{s}$ 时共振离子温度随小半径的分布图

图3 共振离子的温度特性 $T_{\parallel}$ 和 $T_{\perp}$ 分别为双温模型中共振离子的平行温度和垂直温度, T 为单温模型的共振离子温度, 计算所用参数同图2

6 结 论

对于加热功率较小, 共振粒子平行温度与垂直温度偏差不大时, 快波加热算法假定托卡马克中粒子的速度为麦克斯韦分布是合理的近似. 然而, 对于大功率快波加热, 应采用叠代算法较为合理.

- [1] R. Koch, *Computer Phys. Commun.*, **40**(1986), 1.
- [2] Shen Xue-min, *Acta Physica Sinica*, **44**(1995), 570(in Chinese).
- [3] J. Scharer *et al.*, *Nucl. Fusion*, **25**(1985), 435.
- [4] T. Stix, *Waves in Plasmas*(American Institute of Physics, New York, 1992).
- [5] T. H. Stix, *Nucl. Fusion*, **15**(1975), 737.
- [6] J. E. Scharer *et al.*, *Nucl. Fusion*, **17**(1977), 297.
- [7] M. Brambilla, T. Krucken, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **30**(1988), 1083.

FOKKER-PLANCK EQUATION IN THE APPLICATION OF FAST WAVE HEATING

ZHU XUE-GUANG KUANG GUANG-LI ZHAO YAN-PING LI YOU-YI XIE JI-KANG

(*Institute of Plasma Physics, Academia Sinica, Hefei 230031*)

(Received 20 October 1997; revised manuscript received 16 January 1998)

ABSTRACT

The standard normal distribution for particles in tokamak geometry is usually assumed in fast wave heating. In fact, due to the quasi-linear diffusion effect, the parallel and vertical temperatures of the resonant particles are not equal to each other, so, this will bring some error. For this case, the Fokker-Planck equation is introduced in this paper, and iteration algorithm is adopted to solve the problem well.

PACC: 5250; 5265